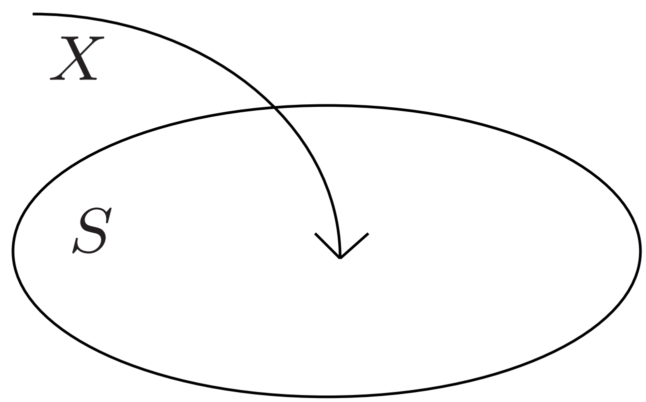
Vorlesung 2b

Diskret uniform verteilte Zufallsvariable



X . . . **Zufallsvariable**

mit *Zielbereich (Wertebereich)* S

Eine Zufallsvariable X heißt *diskret uniform verteilt*,

wenn ihr Zielbereich S endlich ist und

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } a \in S.$$

Damit beschreibt X eine rein zufällige Wahl

aus der (endlichen) Menge S.

Beispiele aus der Vorlesung vom Dienstag:

a) rein zufällige $1, \ldots, r$ - Folge der Länge n.

Beispiele aus der Vorlesung vom Dienstag:

a) rein zufällige $1, \ldots, r$ - Folge der Länge n.

b) rein zufällige Permutation von $1, \ldots, n$

Heute lernen wir zwei weitere Beispiel kennen:

- Rein zufällige k-elementige Teilmenge

- Uniform verteilte Besetzung

Erst eine kurze Wiederholung:

Rein zufällge Permutation

Eine *Permutation* von $1, \ldots, n$

ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \ldots, n\}$ auf sich.

Es gibt

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

Permutationen von $1, \ldots, n$.

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \ldots, n$,

d.h. eine Zufallsvariable, deren Zielbereich

$S :=$ die Menge aller Permutationen von $1, \ldots, n$

ist, und die auf S uniform verteilt ist.

Für alle Elemente $a \in S$ gilt also:

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{n!}$$

Wie kommen rein zufällige Permutationen zustande?

Man denke an eine stets ideal durchmischte Urne

mit anfangs n Kugeln, beschriftet mit den Nummern $1, \dots, n$.

Wie kommen rein zufällige Permutationen zustande?

Man denke an eine stets ideal durchmischte Urne

mit anfangs n Kugeln, beschriftet mit den Nummern $1, \ldots, n$.

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen alle n Kugeln,

Wie kommen rein zufällige Permutationen zustande?

Man denke an eine stets ideal durchmischte Urne

mit anfangs n Kugeln, beschriftet mit den Nummern $1, \ldots, n$.

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen alle n Kugeln,

notiere die gezogenen Nummern in Reihenfolge.

2. Rein zufällige Teilmenge einer festen Größe

Sei $0 \leq k \leq n$

Sei $0 \leq k \leq n$

und sei Y eine rein zufällige k-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$.

Sei $0 \le k \le n$

und sei Y eine rein zufällige k-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$.

Wie wahrscheinlich ist das Ereignis $\{Y = \{1, \ldots, k\}\}$?

Der Zielbereich von Y ist

Der Zielbereich von Y ist

$$S := \{t : t \subset \{1, \ldots, n\},\ \#t = k\}\ ,$$

Der Zielbereich von Y ist

$$S := \{t : t \subset \{1, \dots, n\},\ \#t = k\}\ ,$$

die Menge der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es

$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ mögliche Wahlprotokolle.

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es

$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ mögliche Wahlprotokolle.

Auf die Reihenfolge kommt es nicht an,

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es

$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ mögliche Wahlprotokolle.

Auf die Reihenfolge kommt es nicht an,

also führen jeweils $k!$ dieser Wahlprotokolle

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es

$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ mögliche Wahlprotokolle.

Auf die Reihenfolge kommt es nicht an,

also führen jeweils $k!$ dieser Wahlprotokolle

auf dieselbe k-elementige Teilmenge.

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Binomialkoeffizient „ n über k “.

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Binomialkoeffizient „ n über k “.

Fazit:

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Binomialkoeffizient „ n über k “.

Fazit:

$$\mathbf{P}(Y = \{1, \ldots, k\}) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \, .$$

$\binom{n}{k}$ $\quad\ldots\quad$ die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

$\binom{n}{k}$ ... die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmengen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

$\binom{n}{k}$ $\ldots$ die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmengen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

k-köpfige Komitees aus n Leuten...)

$\binom{n}{k}$ $\quad \ldots \quad$ die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmengen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

k-köpfige Komitees aus n Leuten...)

Beispiel: **Binomischer Lehrsatz:**

$\binom{n}{k}$ $\quad\ldots\quad$ die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmengen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

k-köpfige Komitees aus n Leuten...)

Beispiel: **Binomischer Lehrsatz:**

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

$\binom{n}{k}$ $\quad \ldots \quad$ die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmengen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

k-köpfige Komitees aus n Leuten...)

Beispiel: **Binomischer Lehrsatz:**

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ ... die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmengen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

k-köpfige Komitees aus n Leuten...)

Beispiel: **Binomischer Lehrsatz:**

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Die Potenz k gibt an, wie oft der Faktor x zum Zug kommt.

Pascal'sches Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdot & & & & & \\
 & & & & & \cdot & & & & &
\end{array}
$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

.

.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdot & & & & & \\
 & & & & & \cdot & & & & &
\end{array}
$$

Rekursion: $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Rekursion: $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten, aus n Männern und einer Frau ein $k+1$ köpfiges Komitee auszuwählen.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Rekursion: $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten, aus n Männern und einer Frau ein $k+1$ köpfiges Komitee auszuwählen.

Entweder die Frau ist nicht dabei...oder sie ist dabei...

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Rekursion: $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten, aus n Männern und einer Frau ein $k+1$ köpfiges Komitee auszuwählen.

Entweder die Frau ist nicht dabei. . . oder sie ist dabei. . .

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Rekursion: $$\binom{n+1}{k+1} = \textcolor{blue}{\binom{n}{k+1}} + \textcolor{red}{\binom{n}{k}}.$$

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten, aus n Männern und einer Frau ein $k+1$ köpfiges Komitee auszuwählen.

Entweder die Frau ist nicht dabei... oder sie ist dabei...

Wie gewinnt man eine rein zufällige k-elementige Teilmenge

aus einer rein zufälligen Permutation?

Fakt ist (für $k \leq n$):

Ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$

eine rein zufälligen Permutation von $1, \ldots, n$,

dann ist (für $k \leq n$)

$$\{X_1, \ldots, X_k\}$$

eine rein zufällige k-elementigen Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$.

Anders gesagt:

Beim Ziehen ohne Zurücklegen

führen die ersten k Züge auf eine

rein zufällige Teilmenge des anfänglichen Reservoirs.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer rein zufälligen k-elementigen Teilmenge:

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer rein zufälligen k-elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne

mit k roten und $n-k$ blauen Kugeln.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer rein zufälligen k-elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne

mit k roten und $n - k$ blauen Kugeln.

Notiere die Nummern $X_1, \ldots, X_k$ der Züge,

bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer rein zufälligen k-elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne

mit k roten und $n - k$ blauen Kugeln.

Notiere die Nummern $X_1, \dots, X_k$ der Züge,

bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Dann ist $\{X_1, \dots, X_k\}$

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer rein zufälligen k-elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne

mit k roten und $n - k$ blauen Kugeln.

Notiere die Nummern $X_1, \ldots, X_k$ der Züge,

bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Dann ist $\{X_1, \ldots, X_k\}$

eine rein zufällige k-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$.

Mnemo für die beiden Möglichkeiten:

1) Auf welche Nummern $\{$1,..., n$\}$ fallen die ersten k Züge?

Mnemo für die beiden Möglichkeiten:

1) Auf welche Nummern $\{$1,..., n$\}$ fallen die ersten k Züge?

2) Welche der Züge $\{\mathtt{1}, ...n\}$ fallen auf die k roten Kugeln?

Intermezzo:

Intermezzo:

Besetzungszahlen

Intermezzo:

Besetzungszahlen

Sei $a = (a_1, \dots, a_n)$ eine $1, \dots, r$ - Folge der Länge n.

Wie oft wird der Platz j durch a besetzt?

Intermezzo:

Besetzungszahlen

Sei $a = (a_1, \ldots, a_n)$ eine $1, \ldots, r$ - Folge der Länge n.

Wie oft wird der Platz j durch a besetzt?

Für wieviele i ist $a_i = j$?

Intermezzo:

Besetzungszahlen

Sei $a = (a_1, \ldots, a_n)$ eine $1, \ldots, r$ - Folge der Länge n.

Wie oft wird der Platz j durch a besetzt?

Für wieviele i ist $a_i = j$?

$$b_j(a) := \#\{i : a_i = j, 1 \leq i \leq n\}$$

Das r-tupel der Besetzungszahlen $b_j(a)$ nennen wir kurz

die aus a entstehende **Besetzung**.

Das r-tupel der Besetzungszahlen $b_j(a)$ nennen wir kurz

die aus a entstehende **Besetzung**.

In der Vorstellung des sukzessiven Setzens

von n Objekten auf r mögliche Plätze

gibt sie an, wieviele Objekte auf welchem Platz landen

(und unterscheidet nicht, welche Objekte das sind).

Machen wir uns ein Bild von der zufälligen Besetzung,

die aus einem auf $\{1, \ldots, r\}^n$ uniform verteilten X entsteht.

Das war das Szenario aus Vorlesung 1b:

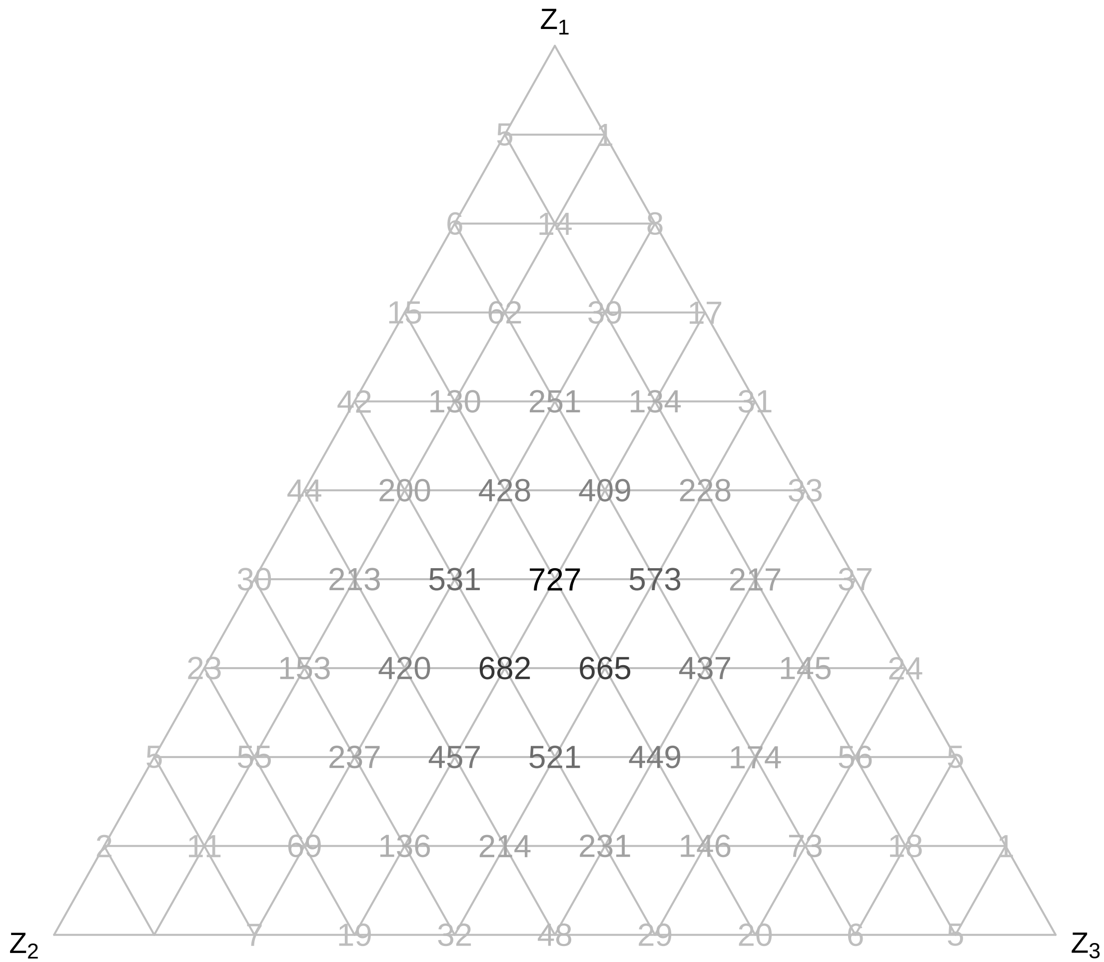
n Individuen werden rein zufällig

auf r mögliche Plätze gesetzt.

Die Verteilung dieser zufälligen Besetzung ist

(bei weitem) nicht uniform.

Häufigkeiten der Besetzungen bei 10000 Wiederholungen



Wir kommen auf diese Verteilung
in der nächsten Vorlesung zurück.

Wir kommen auf diese Verteilung

in der nächsten Vorlesung zurück.

Zum Kontrast betrachten wir jetzt die

3. Uniform verteilte Besetzung

3. Uniform verteilte Besetzung

von r Plätzen mit n Objekten:

3. Uniform verteilte Besetzung

von r Plätzen mit n Objekten:

Der Zielbereich ist

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \dots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

3. Uniform verteilte Besetzung

von r Plätzen mit n Objekten:

Der Zielbereich ist

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

k ist das r-tupel der Besetzungszahlen, kurz: die Besetzung.

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

$$\# S_{n,r} = ?$$

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

$$\#S_{n,r} = ?$$

Fakt:

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \dots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

$$\#S_{n,r} = ?$$

Fakt:

$$h(k_1, k_2, \dots, k_r) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}}\, 0\, \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}}\, 0 \dots 0\, \underbrace{1 \dots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

$$\#S_{n,r} = ?$$

Fakt:

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}}\, 0\, \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}}\, 0 \ldots 0\, \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

ist eine bijektive Abbildung von $S_{n,r}$ nach

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \dots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \dots + k_r = n\}$$

$$\# S_{n,r} = ?$$

Fakt:

$$h(k_1, k_2, \dots, k_r) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

ist eine bijektive Abbildung von $S_{n,r}$ nach

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$

mit genau n Einsen

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Beispiel: $n = 5$, $r = 4$:

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1\ldots1}_{k_1\text{-mal}}0\underbrace{1\ldots1}_{k_2\text{-mal}}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{k_r\text{-mal}}$$

Beispiel: $n = 5$, $r = 4$:

$$(k_1, k_2, \ldots, k_4) = (2, 0, 3, 0)$$

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1\ldots1}_{k_1\text{-mal}}0\underbrace{1\ldots1}_{k_2\text{-mal}}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{k_r\text{-mal}}$$

Beispiel: $n = 5$, $r = 4$:

$$(k_1, k_2, \ldots, k_4) = (2, 0, 3, 0)$$

$$h(2, 0, 3, 0) = 11001110$$

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Beispiel: $n = 5$, $r = 4$:

$$(k_1, k_2, \ldots, k_4) = (2, 0, 3, 0)$$

$$h(2, 0, 3, 0) = 11001110$$

Der zweite und der vierte Block aus Einsen sind hier leer.

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1\ldots1}_{k_1\text{-mal}}0\underbrace{1\ldots1}_{k_2\text{-mal}}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{k_r\text{-mal}}$$

Die Länge des j-ten Blocks aus Einsen steht für

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1\ldots1}_{k_1\text{-mal}}\,0\,\underbrace{1\ldots1}_{k_2\text{-mal}}\,0\ldots0\,\underbrace{1\ldots1}_{k_r\text{-mal}}$$

Die Länge des j-ten Blocks aus Einsen steht für

die Anzahl der Objekte auf Platz j.

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1\ldots1}_{k_1\text{-mal}}\,0\,\underbrace{1\ldots1}_{k_2\text{-mal}}\,0\ldots0\,\underbrace{1\ldots1}_{k_r\text{-mal}}$$

Die Länge des j-ten Blocks aus Einsen steht für

die Anzahl der Objekte auf Platz j.

Die Blöcke aus Einsen sind durch Nullen getrennt.

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Die Länge des j-ten Blocks aus Einsen steht für

die Anzahl der Objekte auf Platz j.

Die Blöcke aus Einsen sind durch Nullen getrennt.

Die Nullen fungieren als “Trennwände” zwischen den r Plätzen, insgesamt gibt es $r - 1$ solche Trennwände.

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$

mit genau n Einsen

$$S := \text{Menge der 01-Folgen der Länge } n + r - 1$$
$$\text{mit genau } n \text{ Einsen}$$

$$\#S = ?$$

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$

mit genau n Einsen

$$\#S = ?$$

$$\#S = \binom{n + r - 1}{n}$$

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$

mit genau n Einsen

$$\#S = ?$$

$$\#S = \binom{n + r - 1}{n}$$

Also (wegen der Bijektion) auch:

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$
mit genau n Einsen

$$\#S = ?$$

$$\#S = \binom{n+r-1}{n}$$

Also (wegen der Bijektion) auch:

$$\#S_{n,r} = \binom{n+r-1}{n}$$

Eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer uniform verteilten Besetzung:

Eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit n weißen und $r-1$ schwarzen

Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit n weißen und $r-1$ schwarzen Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Notiere 0 beim Zug einer schwarzen und 1 beim Zug einer weißen Kugel.

Eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit n weißen und $r-1$ schwarzen Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Notiere 0 beim Zug einer schwarzen und 1 beim Zug einer weißen Kugel.

Erzeuge so ein rein zufälliges Element aus S.

Eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit n weißen und $r-1$ schwarzen

Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Notiere 0 beim Zug einer schwarzen

und 1 beim Zug einer weißen Kugel.

Erzeuge so ein rein zufälliges Element aus S.

Übersetze dieses (mit der Umkehrung von h)

in eine rein zufällige Besetzung.