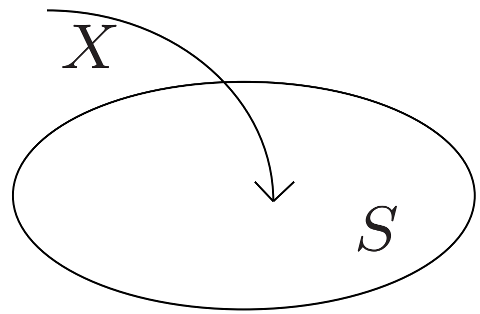
Vorlesung 13a

Schätzen von Parametern

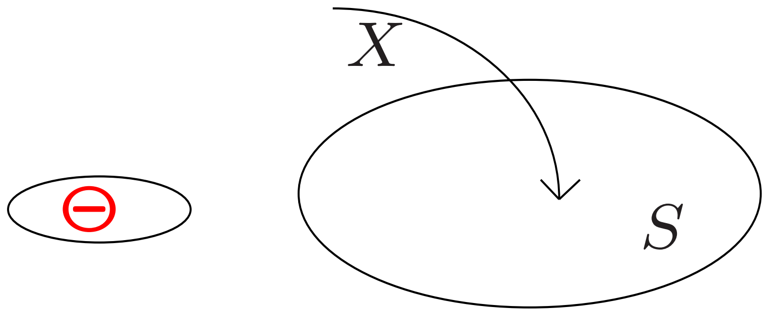
Teil 2

Unser Logo der ersten Stunde:



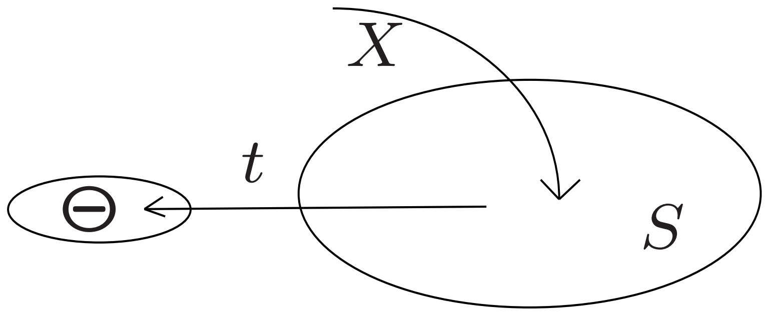
$$\mathbf{P}\ (X \in da) = \rho\ (da)$$

Ein Logo der Statistik:



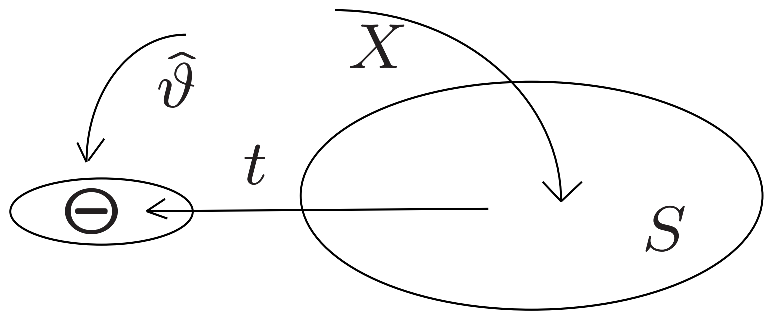
$$\mathbf{P}_\vartheta(X \in da) = \rho_\vartheta(da)\,, \quad \vartheta \in \Theta$$

Ein Logo der Statistik:



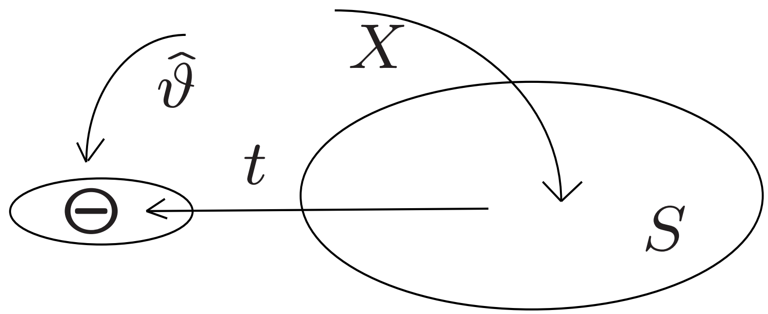
$$\mathbf{P}_\vartheta(X \in da) = \rho_\vartheta(da)\,, \quad \vartheta \in \Theta$$

Ein Logo der Statistik:



$$\mathbf{P}_\vartheta(X \in da) = \rho_\vartheta(da)\,, \quad \vartheta \in \Theta$$

Ein Logo der Statistik:



$$\mathbf{P}_\vartheta(X \in da) = \rho_\vartheta(da)\,, \quad \vartheta \in \Theta$$

Θ ... *Parameterraum*

S ... *Beobachtungsraum*

$\widehat{\vartheta} := t(X)$ ... *Schätzer* für den Parameter ϑ

Ein tragfähiger Vorschlag für die Schätzung von ϑ:

Ein tragfähiger Vorschlag für die Schätzung von ϑ:

Für jedes $a \in S$ sei $t(a)$ dasjenige (oder eines von den) ϑ,

für das die W'keit, den Ausgang a zu erhalten, maximal wird.

Ein tragfähiger Vorschlag für die Schätzung von ϑ:

Für jedes $a \in S$ sei $t(a)$ dasjenige (oder eines von den) ϑ,

für das die W'keit, den Ausgang a zu erhalten, maximal wird.

Für diskretes X heißt dies:

$$\mathbf{P}_{t(a)}(X = a) = \max_{\vartheta \in \Theta} \mathbf{P}_\vartheta(X = a) \ .$$

M. a. W.:

$t(a)$ ist Maximalstelle von $\vartheta \mapsto \rho_\vartheta(a)$.

Ein tragfähiger Vorschlag für die Schätzung von ϑ:

Für jedes $a \in S$ sei $t(a)$ dasjenige (oder eines von den) ϑ,

für das die W'keit, den Ausgang a zu erhalten, maximal wird.

Für diskretes X heißt dies:

$$\mathbf{P}_{t(a)}(X = a) = \max_{\vartheta \in \Theta} \mathbf{P}_\vartheta(X = a) \ .$$

M. a. W.:

$t(a)$ ist Maximalstelle von $\vartheta \mapsto \rho_\vartheta(a)$.

Die Zufallsvariable $\widehat{\vartheta} := t(X)$ nennt man dann

Maximum-Likelihood-Schätzer

für den Parameter ϑ *auf der Basis von* X.

Im Fall von Dichten:

$$\rho_\vartheta(da) = f_\vartheta(a)\,da, \quad \vartheta \in \Theta\ ,$$

nimmt man $t(a)$ als Maximalstelle von $\vartheta \mapsto f_\vartheta(a)$

Beispiel 1 (vgl. Buch Seite 124)

n unabhängige, N(μ, σ^2)-verteilte Zufallsvariable:

Beispiel 1 (vgl. Buch Seite 124)

n unabhängige, N(μ, σ^2)-verteilte Zufallsvariable:

$$f_{(\mu,\sigma^2)}(a)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\left((a_1-\mu)^2+\cdots+(a_n-\mu)^2\right)/(2\sigma^2)}$$

Beispiel 1 (vgl. Buch Seite 124)

n unabhängige, N(μ, σ^2)-verteilte Zufallsvariable:

$$\vartheta := (\mu, \sigma) \mapsto f_{(\mu,\sigma^2)}(a)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\left((a_1-\mu)^2+\cdots+(a_n-\mu)^2\right)/(2\sigma^2)}$$

Beispiel 1 (vgl. Buch Seite 124)

n unabhängige, N(μ, σ^2)-verteilte Zufallsvariable:

$$\vartheta := (\mu, \sigma) \mapsto f_{(\mu,\sigma^2)}(a)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\left((a_1-\mu)^2+\cdots+(a_n-\mu)^2\right)/(2\sigma^2)}$$

hat als Minimalstelle das Zahlenpaar mit den Komponenten

$$\bar{a} := \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n),$$

$$\sqrt{\frac{1}{n}\left((a_1 - \bar{a})^2 + \cdots + (a_n - \bar{a})^2\right)}.$$

Beispiel 1 (vgl. Buch Seite 124)

Fazit:

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt.

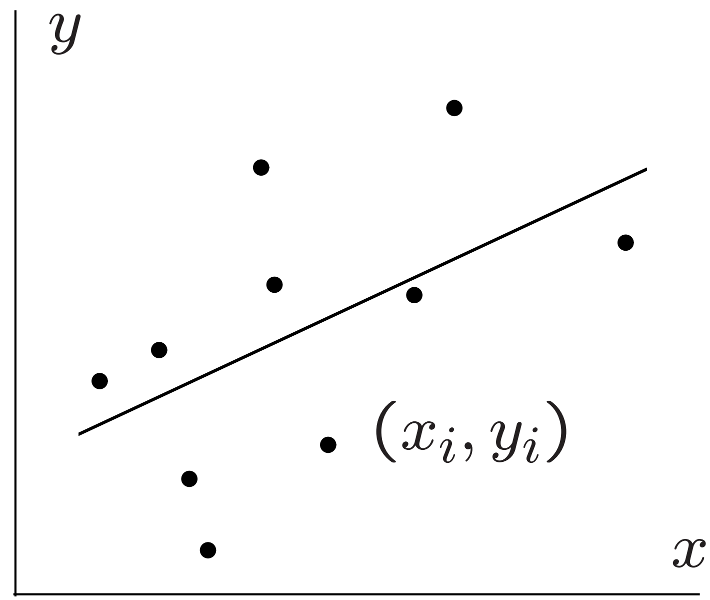
Der ML-Schätzer für $\vartheta = (\mu, \sigma)$ ist dann $(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma})$ mit

$$\widehat{\mu} := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n),$$

$$\widehat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\Big((X_1 - \widehat{\mu})^2 + \cdots + (X_n - \widehat{\mu})^2\Big) .$$

Beispiel 2 (Buch Seite 137)

Die einfache lineare Regression



$x_1, \ldots, x_n$ sind feste reelle Zahlen, und das Modell ist

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \sigma Z_i \,, \quad i = 1, \ldots, n \,,$$

mit $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}, \ \sigma > 0$.

$x_1, \ldots, x_n$ sind feste reelle Zahlen, und das Modell ist

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \sigma Z_i \,, \quad i = 1, \ldots, n \,,$$

mit $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$.

Die Z_i sind gedacht als unabhängige, standard-normalverteilte ZV'e.

Das Modell lässt sich in vektorieller Form schreiben:

Sei $e := (1, \ldots, 1)$ und $x := (x_1, \ldots, x_n)$

$$Y = \beta_0 e + \beta_1 x + \sigma Z$$

= systematische Komponente + Rauschen

Das Modell lässt sich in vektorieller Form schreiben:

Sei $e := (1, \ldots, 1)$ und $x := (x_1, \ldots, x_n)$

$$Y = \beta_0 e + \beta_1 x + \sigma Z$$

= systematische Komponente + Rauschen

$$= \mu + \sigma Z$$

mit $\mu \in K :=$ der von e und x aufgespannte Teilraum von $\mathbb{R}^n$

Das Modell lässt sich in vektorieller Form schreiben:

Sei $e := (1, \ldots, 1)$ und $x := (x_1, \ldots, x_n)$

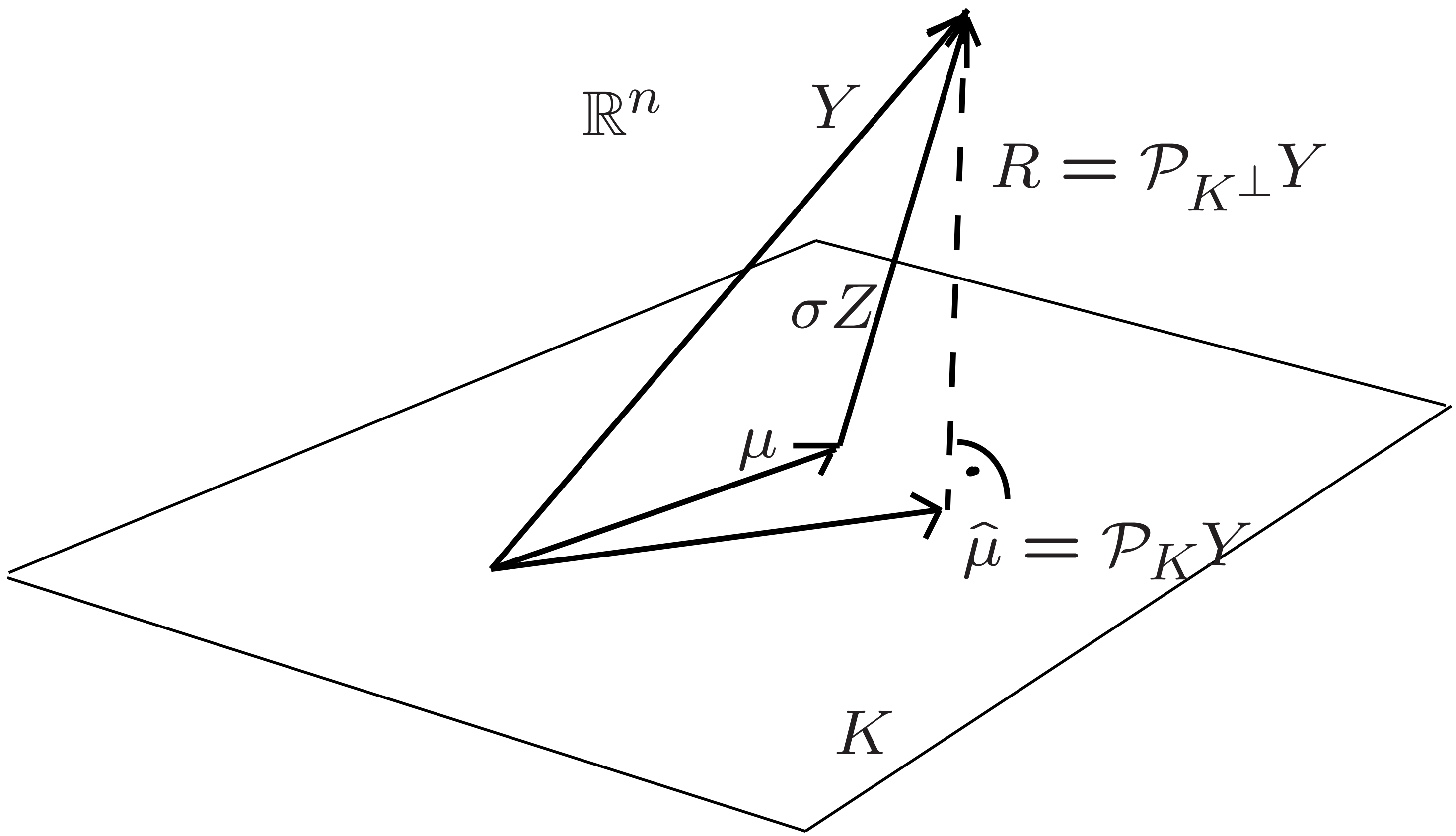
$$Y = \beta_0 e + \beta_1 x + \sigma Z$$

= systematische Komponente + Rauschen

$$= \mu + \sigma Z$$

mit $\mu \in K :=$ der von e und x aufgespannte Teilraum von $\mathbb{R}^n$

(Dies ist ein Beispiel eines *normalen linearen Modells.*)



Als Maximum-Likelihood-Schätzer für (μ, σ^2) ergibt sich

$$\hat{\mu} := \mathcal{P}_K Y \ , \quad \hat{\sigma}^2 := |\mathcal{P}_{K^\perp} Y|^2 / n \ .$$

Berechnung der Koeffizienten $\widehat{\beta}_0$ und $\widehat{\beta}_1$ in der Projektion

$$\mathcal{P}_K Y = \widehat{\beta}_0 e + \widehat{\beta}_1 x :$$

Berechnung der Koeffizienten $\widehat{\beta}_0$ und $\widehat{\beta}_1$ in der Projektion

$$\mathcal{P}_K Y = \widehat{\beta}_0 e + \widehat{\beta}_1 x:$$

Wir verwenden als Orthonormalbasis von K:

$$b := \frac{1}{\sqrt{n}} e, \quad b' := \frac{x - \bar{x}e}{|x - \bar{x}e|}.$$

$$\mathcal{P}_K Y = \langle Y, b \rangle b + \langle Y, b' \rangle b' = \bar{Y} e + \frac{\langle Y - \bar{Y}e, x - \bar{x}e \rangle}{|x - \bar{x}e|^2} (x - \bar{x}e).$$

Berechnung der Koeffizienten $\widehat{\beta}_0$ und $\widehat{\beta}_1$ in der Projektion

$$\mathcal{P}_K Y = \widehat{\beta}_0 e + \widehat{\beta}_1 x :$$

Wir verwenden als Orthonormalbasis von K:

$$b := \frac{1}{\sqrt{n}} e, \quad b' := \frac{x - \bar{x}e}{|x - \bar{x}e|}.$$

$$\mathcal{P}_K Y = \langle Y, b \rangle b + \langle Y, b' \rangle b' = \bar{Y} e + \frac{\langle Y - \bar{Y} e, x - \bar{x} e \rangle}{|x - \bar{x} e|^2} (x - \bar{x} e).$$

Also ergeben sich die x- und e-Koordinaten von $\mathcal{P}_K Y$ als:

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\langle Y - \bar{Y} e, x - \bar{x} e \rangle}{|x - \bar{x} e|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} ,$$

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{x} .$$

Berechnung der Koeffizienten $\widehat{\beta}_0$ und $\widehat{\beta}_1$ in der Projektion

$$\mathcal{P}_K Y = \widehat{\beta}_0 e + \widehat{\beta}_1 x:$$

Wir verwenden als Orthonormalbasis von K:

$$b := \frac{1}{\sqrt{n}} e, \quad b' := \frac{x - \bar{x}e}{|x - \bar{x}e|}.$$

$$\mathcal{P}_K Y = \langle Y, b \rangle b + \langle Y, b' \rangle b' = \bar{Y} e + \frac{\langle Y - \bar{Y} e, x - \bar{x} e \rangle}{|x - \bar{x} e|^2} (x - \bar{x} e).$$

Also ergeben sich die x- und e-Koordinaten von $\mathcal{P}_K Y$ als:

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\langle Y - \bar{Y} e, x - \bar{x} e \rangle}{|x - \bar{x} e|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{x}.$$

Berechnung der Koeffizienten $\widehat{\beta}_0$ und $\widehat{\beta}_1$ in der Projektion

$$\mathcal{P}_K Y = \widehat{\beta}_0 e + \widehat{\beta}_1 x :$$

Wir verwenden als Orthonormalbasis von K:

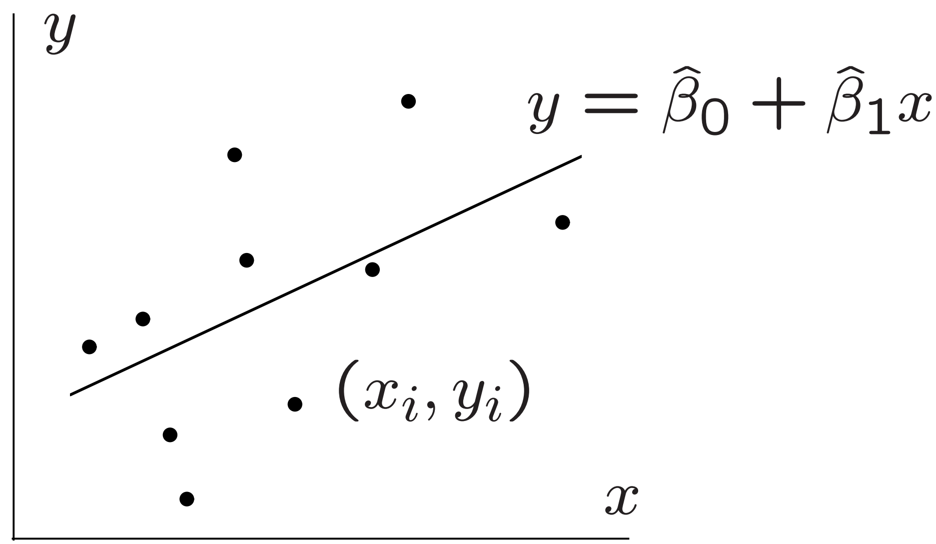
$$b := \frac{1}{\sqrt{n}} e, \quad b' := \frac{x - \bar{x}e}{|x - \bar{x}e|}.$$

$$\mathcal{P}_K Y = \langle Y, b \rangle b + \langle Y, b' \rangle b' = \bar{Y} e + \frac{\langle Y - \bar{Y}e, x - \bar{x}e \rangle}{|x - \bar{x}e|^2} (x - \bar{x}e).$$

Also ergeben sich die x- und e-Koordinaten von $\mathcal{P}_K Y$ als:

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\langle Y - \bar{Y}e, x - \bar{x}e \rangle}{|x - \bar{x}e|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{x}.$$



Die Gerade $x \mapsto y = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x$ heißt *Regressionsgerade*.

Ihr Anstieg ist der *Regressionskoeffizient* $\widehat{\beta}_1$.

Sie geht durch den zentralen Punkt $(\bar{x}, \bar{Y})$.

Man beachte die Analogie zum Beispiel am Ende von Vorlesung 7b.

Maximum-Likelihood-Schätzer am Beispiel des Münzwurfs:

Maximum-Likelihood-Schätzer am Beispiel des Münzwurfs:

$(X_1, \ldots, X_n)$ sei p-Münzwurf mit unbekanntem p

Beobachtet wird die Realisierung $(a_1, \ldots, a_n)$

mit $k = a_1 + \ldots + a_n$.

Maximum-Likelihood-Schätzer am Beispiel des Münzwurfs:

$(X_1, \ldots, X_n)$ sei p-Münzwurf mit unbekanntem p

Beobachtet wird die Realisierung $(a_1, \ldots, a_n)$

mit $k = a_1 + \ldots + a_n$.

Unter allen p ist k/n derjenige Parameter, mit dem

$$\mathbf{P}_p(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n) = p^k(1-p)^{n-k}$$

maximal ist.

Man sagt:

$$\widehat{p} := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für p.

Für $k = 0$ (kein Erfolg in n Versuchen) ergibt sich 0
als Maximum-Likelikood-Schätzung von p.

Das ist möglicherweise zu pessimistisch.
Eine Alternative bietet der sogenannte *Bayes-Schätzer*
(vgl Buch S. 127).
Hier denkt man an ein zweistufiges Experiment:

1. eine auf $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsvariable U
2. gegeben $\{U = u\}$ einen Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit U.

$$\tilde{p} := \mathbf{E}[U|K_n] \, .$$

Exkurs und Wiederholung:

Münzwurf mit zufälliger Erfolgsw'keit.

als Beispiel eines zweistufigen Zufallsexperiments.

Erste Stufe: Zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit U.

Zweite Stufe: Gegeben $U = u$ führe u-Münzwurf durch.

Erste Stufe: Zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit U.

Zweite Stufe: Gegeben $U = u$ führe u-Münzwurf durch.

Dadurch entsteht eine zufällige 01-Folge $Z_1, Z_2, \ldots$

Erste Stufe: Zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit U.

Zweite Stufe: Gegeben $U = u$ führe u-Münzwurf durch.

Dadurch entsteht eine zufällige 01-Folge $Z_1, Z_2, \ldots$

Ist U uniform verteilt auf dem Intervall $[0, 1]$,

Erste Stufe: Zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit U.

Zweite Stufe: Gegeben $U = u$ führe u-Münzwurf durch.

Dadurch entsteht eine zufällige 01-Folge $Z_1, Z_2, \ldots$

Ist U uniform verteilt auf dem Intervall $[0, 1]$,

dann ergibt sich für $X_n := Z_1 + \cdots + Z_n$

Erste Stufe: Zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit U.

Zweite Stufe: Gegeben $U = u$ führe u-Münzwurf durch.

Dadurch entsteht eine zufällige 01-Folge $Z_1, Z_2, \dots$

Ist U uniform verteilt auf dem Intervall $[0, 1]$,

dann ergibt sich für $X_n := Z_1 + \cdots + Z_n$

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} ,$$

Erste Stufe: Zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit U.

Zweite Stufe: Gegeben $U = u$ führe u-Münzwurf durch.

Dadurch entsteht eine zufällige 01-Folge $Z_1, Z_2, \ldots$

Ist U uniform verteilt auf dem Intervall $[0, 1]$,

dann ergibt sich für $X_n := Z_1 + \cdots + Z_n$

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} ,$$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 u^k (1-u)^{n-k} \, du , \quad k = 0, 1, \ldots, n .$$

Eine Darstellung des Münzwurfs mit zufälliger,

uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit:

Eine Darstellung des Münzwurfs mit zufälliger, uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit:

Seien $U, U_1, U_2, \ldots$ unabhängig und uniform auf $[0, 1]$.

Eine Darstellung des Münzwurfs mit zufälliger,

uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit:

Seien $U, U_1, U_2, \ldots$ unabhängig und uniform auf $[0, 1]$.

U gibt die zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit, und

Eine Darstellung des Münzwurfs mit zufälliger, uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit:

Seien $U, U_1, U_2, \ldots$ unabhängig und uniform auf $[0, 1]$.

U gibt die zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit, und

$$Z_1 := I_{\{U_1 < U\}}\,, \quad Z_2 := I_{\{U_2 < U\}}\,, \quad \ldots$$

Eine Darstellung des Münzwurfs mit zufälliger, uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit:

Seien $U, U_1, U_2, \ldots$ unabhängig und uniform auf $[0, 1]$.

U gibt die zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit, und

$$Z_1 := I_{\{U_1 < U\}}, \quad Z_2 := I_{\{U_2 < U\}}, \quad \ldots$$

stellt einen Münzwurf mit zufälligem Parameter U dar.

Eine Darstellung des Münzwurfs mit zufälliger, uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit:

Seien $U, U_1, U_2, \ldots$ unabhängig und uniform auf $[0, 1]$.

U gibt die zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit, und

$$Z_1 := I_{\{U_1 < U\}}\,, \quad Z_2 := I_{\{U_2 < U\}}\,, \quad \ldots$$

stellt einen Münzwurf mit zufälligem Parameter U dar.

$$\{X_n = k\} = \{Z_1 + \cdots + Z_n = k\}$$

Eine Darstellung des Münzwurfs mit zufälliger, uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit:

Seien $U, U_1, U_2, \ldots$ unabhängig und uniform auf $[0, 1]$.

U gibt die zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit, und

$$Z_1 := I_{\{U_1 < U\}}\,, \quad Z_2 := I_{\{U_2 < U\}}\,, \quad \ldots$$

stellt einen Münzwurf mit zufälligem Parameter U dar.

$$\{X_n = k\} = \{Z_1 + \cdots + Z_n = k\}$$

$$= \Big\{\text{von den } U_1, \ldots, U_n \text{ sind genau } k \text{ Stück kleiner als } U\Big\}.$$

Aus Symmetriegründen hat jedes der Ereignisse $E_k :=$

$= \Big\{$von den $U_1, \ldots, U_n$ sind genau k Stück kleiner als $U\Big\}$

die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$

Aus Symmetriegründen hat jedes der Ereignisse $E_k :=$

$= \{$von den $U_1, \ldots, U_n$ sind genau k Stück kleiner als $U\}$

die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$

(denn die Anordnung der $U, U_1, U_2, \ldots$ ist rein zufällig).

Aus Symmetriegründen hat jedes der Ereignisse $E_k :=$

$= \{$von den $U_1, \ldots, U_n$ sind genau k Stück kleiner als $U\}$

die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$

(denn die Anordnung der $U, U_1, U_2, \ldots$ ist rein zufällig).

Also folgt:

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Aus Symmetriegründen hat jedes der Ereignisse $E_k :=$

$= \{$von den $U_1, \ldots, U_n$ sind genau k Stück kleiner als $U\}$

die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$

(denn die Anordnung der $U, U_1, U_2, \ldots$ ist rein zufällig).

Also folgt:

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Fazit:

Die Anzahl der Erfolge im n-fachen Münzwurf mit zufälliger auf $[0, 1]$ uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit ist uniform verteilt auf $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Münzwurf mit zufälliger Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

Münzwurf mit zufälliger Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$$

Münzwurf mit zufälliger Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{\mathbf{P}(U \in du, X_n = k)}{\mathbf{P}(X_n = k)} = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \Big/ \frac{1}{n+1}$$

Münzwurf mit zufälliger Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{\mathbf{P}(U \in du, X_n = k)}{\mathbf{P}(X_n = k)} = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \Big/ \frac{1}{n+1}$$

$$\mathbf{P}(U \in du \,|\, X_n = k) = \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} u^k (1-u)^{n-k} \, du$$

$$\mathbf{E}[U \mid K_n = k] = \int \frac{1}{\frac{1}{n+1}} \binom{n}{k} u^{k+1} (1-u)^{n-k} \, du$$

$$= \frac{k+1}{n+2} \int \frac{1}{\frac{1}{n+2}} \binom{n+1}{k+1} u^{k+1} (1-u)^{(n+1)-(k+1)} \, du$$

$$= \frac{k+1}{n+2}.$$

Man nennt dies auch den

Bayes-Schätzer für die Erfolgswahrscheinlichkeit

(bei a priori uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit).

Man muss hier gar nicht rechnen. Mit der totalen W'keit gilt:

$$\mathbf{E}[U \mid K_n] = \mathbf{E}[\mathbf{P}[Z_{n+1} = 1 \mid U] \mid K_n] = \mathbf{P}[Z_{n+1} = 1 | K_n]$$

Im Buch S. 113/114 liest man nach

(vgl. dazu auch unsere Übungsaufgabe 38):

Ein Münzwurf $(Z_1, Z_2, \dots)$

mit uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit U

ist so verteilt wie die Folge der Zuwächse in Richtung Osten

in einer Nordost-Wanderung à la Pólya. Also:

$$\mathbf{P}[Z_{n+1} = 1 | K_n = k] = \frac{k+1}{n+2}.$$

Wir haben also zwei Schätzer für die

Erfolgswahrscheinlichkeit p:

den Maxkimum-Liekelohood Schätzer

$$\hat{p} = \frac{K_n}{n}$$

Wir haben also zwei Schätzer für die Erfolgswahrscheinlichkeit p:

den Maxkimum-Liekelohood Schätzer

$$\widehat{p} = \frac{K_n}{n}$$

und den Bayes-Schätzer

$$\tilde{p} = \frac{K_n + 1}{n + 2}.$$

Die nächsten beiden Folien zeigen einen Vergleich

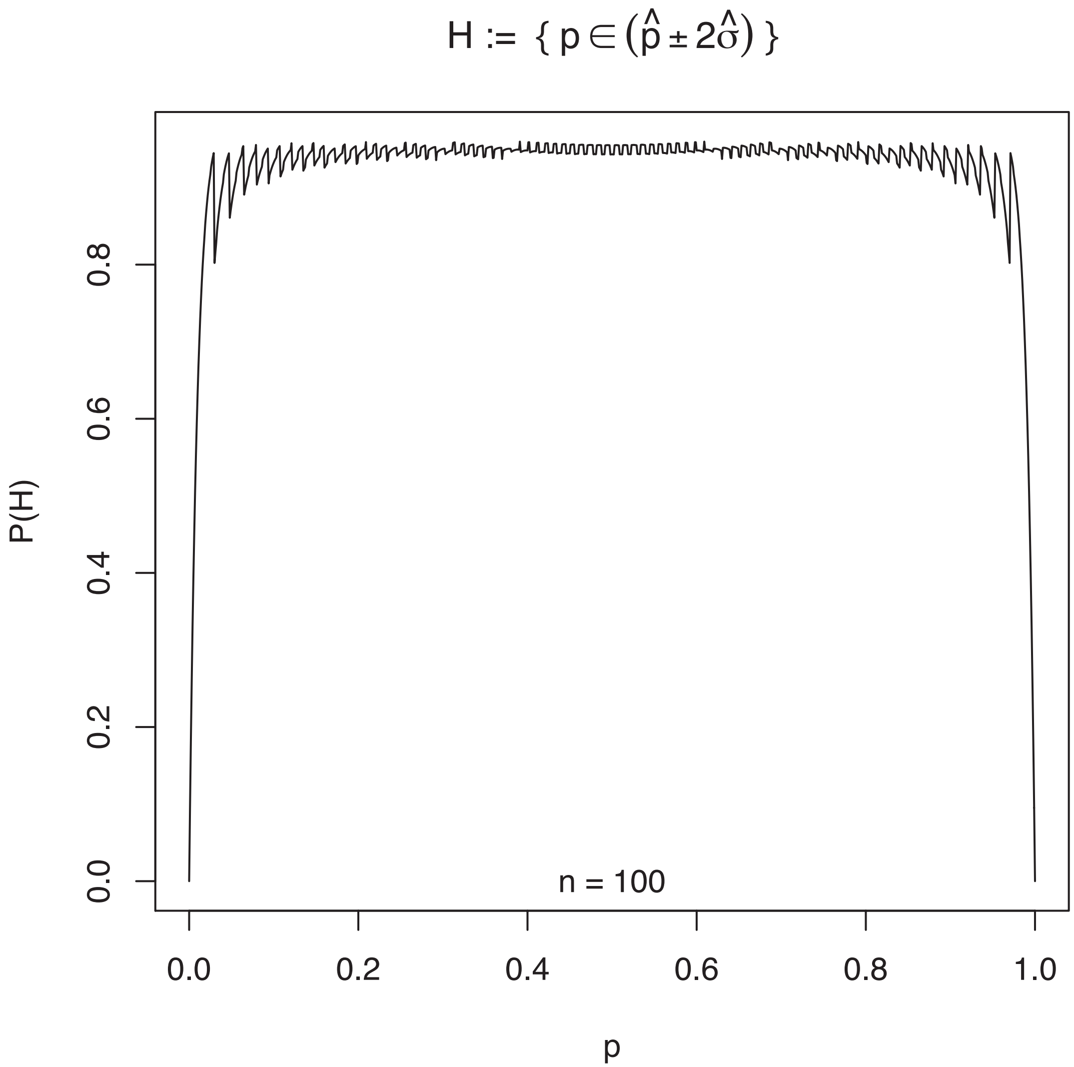
der Überdeckungsw'keiten der beiden Konfidenzintervalle

$$I := \left(\widehat{p} - 2\sqrt{\tfrac{1}{n}\widehat{p}(1-\widehat{p})},\, \widehat{p} + 2\sqrt{\tfrac{1}{n}\widehat{p}(1-\widehat{p})}\right) := (\widehat{p} \pm 2\widehat{\sigma})$$

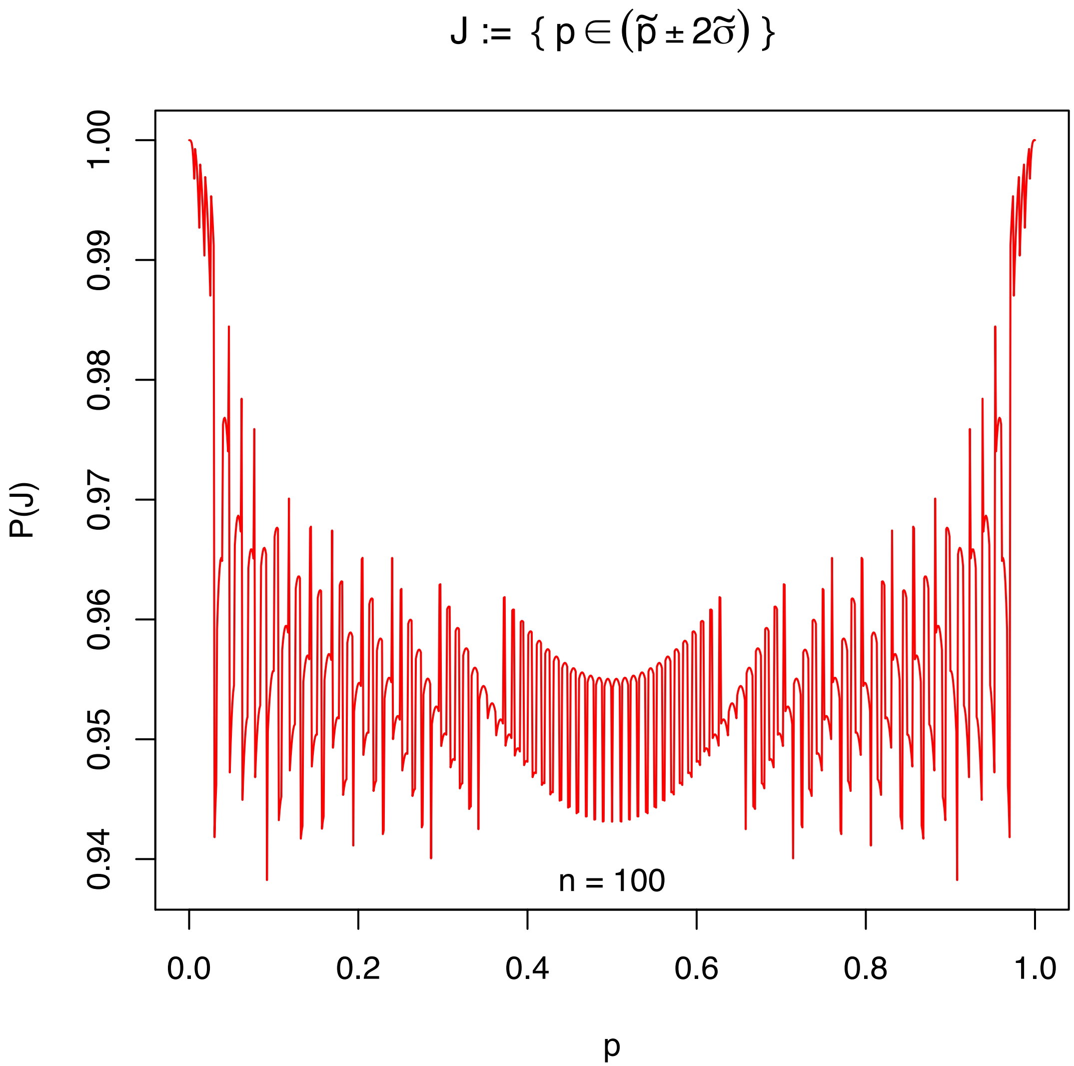
und

$$\tilde{I} := \left(\tilde{p} - 2\sqrt{\tfrac{1}{n}\tilde{p}(1-\tilde{p})},\, \tilde{p} + 2\sqrt{\tfrac{1}{n}\tilde{p}(1-\tilde{p})}\right) := (\tilde{p} \pm 2\tilde{\sigma})$$

(siehe dazu Buch Seite 129/130)



$H := \{ p \in (\hat{p} \pm 2\hat{\sigma}) \}$
P(H)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
n = 100
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
p


$J := \{ p \in (\tilde{p} \pm 2\tilde{\sigma}) \}$
P(J)
1.00
0.99
0.98
0.97
0.96
0.95
0.94
n = 100
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
p