Vorlesung 10a

Mehrstufige Zufallsexperimente

bisher Zweistufigkeit: von “heute” zu “morgen”

bisher Zweistufigkeit: von “heute” zu “morgen”

jetzt: von “heute und morgen” zu “übermorgen”, etc.

bisher Zweistufigkeit: von “heute” zu “morgen”

jetzt: von “heute und morgen” zu “übermorgen”, etc.

Für jedes $i = 1, \ldots, n-1$ hat man

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1}) = \mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}) \; ,$$

bisher Zweistufigkeit: von “heute” zu “morgen”

jetzt: von “heute und morgen” zu “übermorgen”, etc.

Für jedes $i = 1, \ldots, n-1$ hat man

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1}) = \mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}) \;,$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i+1)$-ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

bisher Zweistufigkeit: von “heute” zu “morgen”

jetzt: von “heute und morgen” zu “übermorgen”, etc.

Für jedes $i = 1, \ldots, n-1$ hat man

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1}) = \mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}) \ ,$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i+1)$-ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \ldots, X_i = a_i\}$.

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$

ergibt sich rekursiv als

Multiplikationsregel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n)$$

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$

ergibt sich rekursiv als

Multiplikationsregel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= \mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}) P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)$$

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \dots, X_n$

ergibt sich rekursiv als

Multiplikationsregel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n)$$

$$= \mathbf{P}(X_1 = a_1, \dots, X_{n-1} = a_{n-1}) P(a_1 \dots a_{n-1}, a_n)$$

$$= \rho(a_1) P(a_1, a_2) \cdots P(a_1 \dots a_{n-1}, a_n) \, .$$

Beispiel: Die Pólya-Urne.

Beispiel: Die Pólya-Urne.

In einer Urne befinden sich anfangs

eine weiße und eine blaue Kugel.

Beispiel: Die Pólya-Urne.

In einer Urne befinden sich anfangs
eine weiße und eine blaue Kugel.

In jedem Schritt wird eine Kugel rein zufällig gezogen und gemeinsam mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe zurückgelegt.

Beispiel: Die Pólya-Urne.

In einer Urne befinden sich anfangs
eine weiße und eine blaue Kugel.

In jedem Schritt wird eine Kugel rein zufällig gezogen und gemeinsam mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe zurückgelegt.

Die Zufallsvariable Z_i mit Werten in $\{0, 1\}$ bezeichne die im i-ten Zug vorgefundene Farbe (0 für blau, 1 für weiß).

$$\mathbf{P}(Z_1 = 0) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(Z_1 = 0) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 0) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{P}(Z_1 = 0) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 0) = \tfrac{2}{3}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 1) = \tfrac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}(Z_1 = 0) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 0) = \tfrac{2}{3}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 1) = \tfrac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}_{00}(Z_3 = 0) = \tfrac{3}{4}$$

$$\mathbf{P}(Z_1 = 0) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 0) = \tfrac{2}{3}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 1) = \tfrac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}_{00}(Z_3 = 0) = \tfrac{3}{4}$$

$$\mathbf{P}_{01}(Z_3 = 0) = \tfrac{2}{4}$$

$$\mathbf{P}(Z_1 = 0) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 0) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}_{00}(Z_3 = 0) = \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{P}_{01}(Z_3 = 0) = \frac{2}{4}$$

u. s. w.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(Z_{i+1} = a_{i+1}) = \frac{1+k}{2+i} \tag{1}$$

mit $a_1, \ldots, a_i = 0, 1,$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\mathbf{P}_{a_1 \dots a_i}(Z_{i+1} = a_{i+1}) = \frac{1+k}{2+i} \tag{1}$$

mit $a_1, \dots, a_i = 0, 1,$

$$k = k(a_1, \dots, a_{i+1}) := \#\{j : 1 \le j \le i, a_j = a_{i+1}\} \ ;$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\mathbf{P}_{a_1 \dots a_i}(Z_{i+1} = a_{i+1}) = \frac{1+k}{2+i} \qquad (1)$$

mit $a_1, \dots, a_i = 0, 1,$

$$k = k(a_1, \dots, a_{i+1}) := \#\{j : 1 \leq j \leq i, a_j = a_{i+1}\} ;$$

$1 + k$ ist also die Zahl der Kugeln in der Urne,

die nach i Zügen die Farbe a_{i+1} haben.

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\Big((Z_1,\ldots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\Big)= \qquad\qquad\qquad .$$

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\Big((Z_1,\ldots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\Big)=\frac{1}{2} \qquad .$$

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\Big((Z_1, \ldots, Z_8) = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)\Big) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3} \qquad .$$

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\Big((Z_1,\ldots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\Big)=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\qquad\qquad.$$

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\Big((Z_1,\ldots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\Big)=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5} \qquad .$$

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\Big((Z_1,\ldots,Z_8) = (1,1,0,1,0,0,1,1)\Big) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6} \qquad .$$

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\Big((Z_1, \ldots, Z_8) = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)\Big) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{7}$$

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\Big((Z_1,\ldots,Z_8) = (1,1,0,1,0,0,1,1)\Big) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{7}\,\frac{4}{8}$$

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\Big((Z_1,\ldots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\Big)=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{7}\,\frac{4}{8}\,\frac{5}{9}$$

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\Big((Z_1,\ldots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\Big)=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{7}\,\frac{4}{8}\,\frac{5}{9}$$

$$=\frac{5!\;3!}{9!}\,.$$

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\big((Z_1,\dots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\big)=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{7}\,\frac{4}{8}\,\frac{5}{9}$$

$$=\frac{5!\;3!}{9!}\,.$$

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1,\dots,a_n)$

mit $a_1+\dots+a_n=k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\Big((Z_1,\ldots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\Big)=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{7}\,\frac{4}{8}\,\frac{5}{9}$$

$$=\frac{5!\;3!}{9!}\,.$$

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1,\ldots,a_n)$ mit $a_1+\cdots+a_n=k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}\Big((Z_1,\ldots,Z_n)=(a_1,\ldots,a_n)\Big)=\frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}.$$

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1, \dots, a_n)$ mit $a_1 + \cdots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}\big((Z_1, \dots, Z_n) = (a_1, \dots, a_n)\big) = \frac{1}{n+1} \binom{n}{k}^{-1} .$$

Für $0 \leq k \leq n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1, \ldots, a_n)$

mit $a_1 + \cdots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}\big((Z_1, \ldots, Z_n) = (a_1, \ldots, a_n)\big) = \frac{1}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}.$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ derartige Zugfolgen. Also ist

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_1 + \cdots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}\big((Z_1, \ldots, Z_n) = (a_1, \ldots, a_n)\big) = \frac{1}{n+1} \binom{n}{k}^{-1} .$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ derartige Zugfolgen. Also ist

$$\mathbf{P}(Z_1 + \cdots + Z_n = k) = \frac{1}{n+1} , \quad k = 0, \ldots, n .$$

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1, \dots, a_n)$

mit $a_1 + \cdots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}\big((Z_1, \dots, Z_n) = (a_1, \dots, a_n)\big) = \frac{1}{n+1} \binom{n}{k}^{-1} .$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ derartige Zugfolgen. Also ist

$$\mathbf{P}(Z_1 + \cdots + Z_n = k) = \frac{1}{n+1} , \quad k = 0, \dots, n .$$

Fazit:

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1, \dots, a_n)$

mit $a_1 + \cdots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}\big((Z_1, \dots, Z_n) = (a_1, \dots, a_n)\big) = \frac{1}{n+1} \binom{n}{k}^{-1} .$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ derartige Zugfolgen. Also ist

$$\mathbf{P}(Z_1 + \cdots + Z_n = k) = \frac{1}{n+1}\,, \quad k = 0, \dots, n\,.$$

Fazit:

Die Anzahl der weißen Kugeln nach n Zügen

ist uniform verteilt in $\{0, 1, \dots, n\}$.

Pólya-Urne mit r Farben:

Pólya-Urne mit r Farben:

Wieder wird in jedem Zug die gezogene Kugel zusammen mit einer gleichfarbigen Kugel zurückgelegt.

Pólya-Urne mit r Farben:

Wieder wird in jedem Zug die gezogene Kugel zusammen mit einer gleichfarbigen Kugel zurückgelegt.

Die Anfangsbesetzung sei $(1, \ldots, 1)$, also je eine Kugel von jeder Farbe.

Pólya-Urne mit r Farben:

Wieder wird in jedem Zug die gezogene Kugel
zusammen mit einer gleichfarbigen Kugel zurückgelegt.

Die Anfangsbesetzung sei $(1, \ldots, 1)$,
also je eine Kugel von jeder Farbe.

$X_{jn} :=$ # Neuzugänge der Farbe j in n Schritten.

Sei $(k_1, \ldots, k_r) \in S_{n,r}$,

d.h. $k_j \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Sei $(k_1, \ldots, k_r) \in S_{n,r}$,

d.h. $k_j \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Man sieht wie im Fall $r = 2$:

Sei $(k_1, \ldots, k_r) \in S_{n,r}$,

d.h. $k_j \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Man sieht wie im Fall $r = 2$:

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_r)$

Sei $(k_1, \ldots, k_r) \in S_{n,r}$,

d.h. $k_j \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Man sieht wie im Fall $r = 2$:

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_r)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\frac{k_1! \cdots k_r!}{r \cdot (r+1) \cdots (n+r-1)} .$$

Sei $(k_1, \dots, k_r) \in S_{n,r}$,

d.h. $k_j \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Man sieht wie im Fall $r = 2$:

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \dots, 1)$ nach $(1 + k_1, \dots, 1 + k_r)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\frac{k_1! \cdots k_r!}{r \cdot (r+1) \cdots (n+r-1)} = \frac{k_1! \cdots k_r!}{(n+r-1)!}(r-1)!\ .$$

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_r)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$k_1! \cdots k_r! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!} \; .$$

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_r)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$k_1! \cdots k_r! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!} \,.$$

Es gibt $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ solche Zugfolgen. Also ist

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_r)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$k_1! \cdots k_r! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!} \ .$$

Es gibt $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ solche Zugfolgen. Also ist

$$\mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \ldots, X_{rn} = k_r) = n! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!}$$

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_r)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$k_1! \cdots k_r! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!} \, .$$

Es gibt $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ solche Zugfolgen. Also ist

$$\mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \ldots, X_{rn} = k_r) = n! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!}$$
$$= \frac{1}{\binom{n+r-1}{n}}$$

$$\mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \ldots, X_{rn} = k_r) = \frac{1}{\binom{n+r-1}{n}}\,,$$

d.h. $(X_{1n}, \ldots, X_{rn})$ ist uniform verteilt auf $S_{n,r}$.

$$\mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \ldots, X_{rn} = k_r) = \frac{1}{\binom{n+r-1}{n}}\,,$$

d.h. $(X_{1n}, \ldots, X_{rn})$ ist uniform verteilt auf $S_{n,r}$.

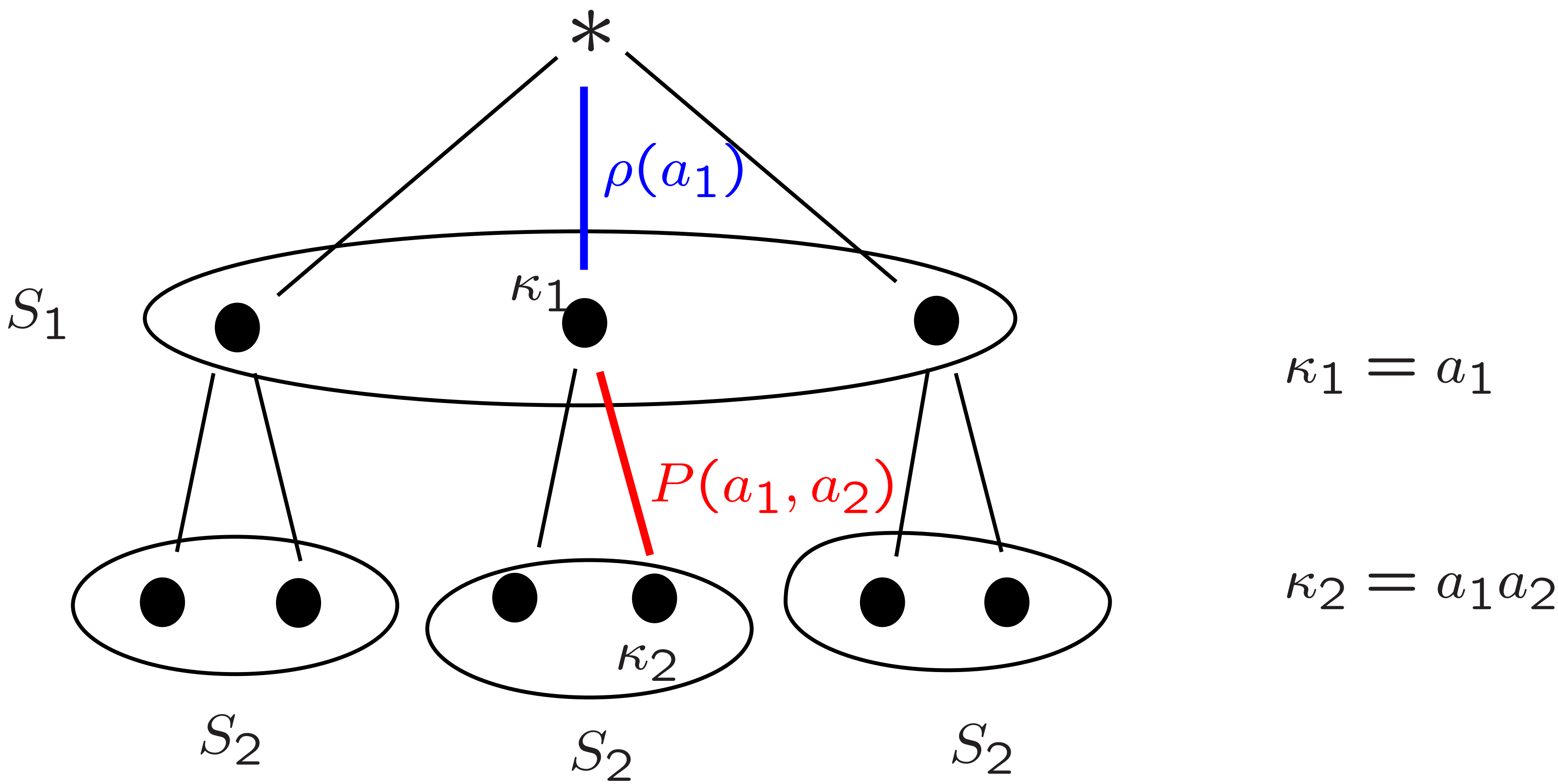
Fazit:

Die Pólya-Urne mit Anfangsbesetzung $(1, \ldots, 1)$

liefert

uniform verteilte Besetzungen!

Veranschaulichung von mehrstufigen Experimenten durch *Bäume*:



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1) P(a_1, a_2)\,.$$

(Produkt der Kantengewichte von $*$ zum Knoten κ_2)

Veranschaulichung von mehrstufigen Experimenten durch *Bäume*:

$\kappa_i = a_1 \ldots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe* i

Veranschaulichung von mehrstufigen Experimenten durch ***Bäume***:

$\kappa_i = a_1 \dots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe* i

Die *Nachfolger* von κ_i sind von der Form $\kappa_i \, a_{i+1}$

Veranschaulichung von mehrstufigen Experimenten durch *Bäume*:

$\kappa_i = a_1 \ldots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe* i

Die *Nachfolger* von κ_i sind von der Form $\kappa_i \, a_{i+1}$

Die *Kanten* des Baums erhalten die Gewichte

$$g(*, \kappa_1) := \rho(a_1) \; , \quad g(\kappa_i, \kappa_{i+1}) := P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1})$$

Veranschaulichung von mehrstufigen Experimenten durch *Bäume*:

$\kappa_i = a_1 \ldots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe* i

Die *Nachfolger* von κ_i sind von der Form $\kappa_i \, a_{i+1}$

Die *Kanten* des Baums erhalten die Gewichte

$$g(*, \kappa_1) := \rho(a_1)\ , \quad g(\kappa_i, \kappa_{i+1}) := P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1})$$

mit $\kappa_1 = a_1, \ \ \kappa_i = a_1 \ldots a_i, \ \ \kappa_{i+1} = a_1 \ldots a_{i+1}$.

Veranschaulichung von mehrstufigen Experimenten durch *Bäume*:

$\kappa_i = a_1 \dots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe* i

Die *Nachfolger* von κ_i sind von der Form $\kappa_i \, a_{i+1}$

Die *Kanten* des Baums erhalten die Gewichte

$$g(*, \kappa_1) := \rho(a_1) \ , \quad g(\kappa_i, \kappa_{i+1}) := P(a_1 \dots a_i, a_{i+1})$$

mit $\kappa_1 = a_1, \ \ \kappa_i = a_1 \dots a_i, \ \ \kappa_{i+1} = a_1 \dots a_{i+1}$.

Die Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Blatt zu enden, ergibt sich als Produkt der Kantengewichte entlang des Weges von der Wurzel zum Blatt.