Elementare Stochastik

Sommersemester 2014

Anton Wakolbinger

Homepage A. Wakolbinger

Homepage A. Wakolbinger

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Web Suche | Personensuche | Hier klicken für den Schnell

Studium | Forschung | Internationales | Fachbereiche | Organisation | Weiterbildung | Über die U

- Studium und Lehre
- Alumni-Initiative
- Algebra und Geometrie
- Analysis
- Diskrete Mathematik
- Numerische Analysis
- Stochastik mit Finanzmathematik
  - Lehrveranstaltungen
  - Links
- Frankfurt MathFinance Institute

Stochastik mit Finanzmathematik › Homepage A. Wakolbinger

Prof. Dr. Anton Wakolbinger

Forschungsschwerpunkte und -themen:

- Preprints & Publikationen
- Personal Homepage

Veranstaltungen:

SS 2014
Elementare Stochastik
Proseminar Stochastik

SS 2013
Stochastische Modelle der Populationsgenetik
Proseminar Stochastik
Seminar Wahrscheinlichkeitstheorie: "Zufällige Bäume"
(gemeinsam mit Prof. Kersting)

Unser Lehrbuch:

Götz Kersting, Anton Wakolbinger

Elementare Stochastik

2. überarbeitete Auflage

Birkhäuser 2010

19,80 Euro

Unser Lehrbuch:

Götz Kersting, Anton Wakolbinger
Elementare Stochastik
2. überarbeitete Auflage
Birkhäuser 2010
19,80 Euro

mehere Exemplare ausleihbar
in der Lehrbuchsammlung der Uni-Bibliothek
und in der Bibliothek des Mathem. Seminars

Unser Lehrbuch:

Götz Kersting, Anton Wakolbinger
Elementare Stochastik
2. überarbeitete Auflage
Birkhäuser 2010
19,80 Euro

mehere Exemplare ausleihbar
in der Lehrbuchsammlung der Uni-Bibliothek
und in der Bibliothek des Mathem. Seminars

auch als e-book in der Uni-Bibliothek verfgbar

Vorlesung 1

Vom gerechten Aufteilen eines Spieleinsatzes

Vom gerechten Aufteilen eines Spieleinsatzes

Die Lösungen von Fermat und Pascal

1654

Vom gerechten Aufteilen eines Spieleinsatzes

Die Lösungen von Fermat und Pascal

1654

([KW] Seite 102/103)

Pierre de Fermat (1601-1665)

Blaise Pascal (1623-1662)

A und B spielen ein faires Spiel.

In jeder Runde gewinnt entweder A oder B

(neue Runde, neues Glück).

Derjenige gewinnt den gesamten Einsatz,

der als erster 4 Runden gewonnen hat.

A und B spielen ein faires Spiel.
In jeder Runde gewinnt entweder A oder B
(neue Runde, neues Glück).
Derjenige gewinnt den gesamten Einsatz,
der als erster 4 Runden gewonnen hat.

Nachdem A zwei und B eine Runde gewonnen hat,
muss das Spiel abgebrochen werden.
Wie ist der Einsatz gerecht aufzuteilen?

Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Beschreibung des Spielverlaufs durch einen “Nordostpfad”:

Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Beschreibung des Spielverlaufs durch einen “Nordostpfad”:

A gewinnt eine Runde: ein Schritt nach Osten

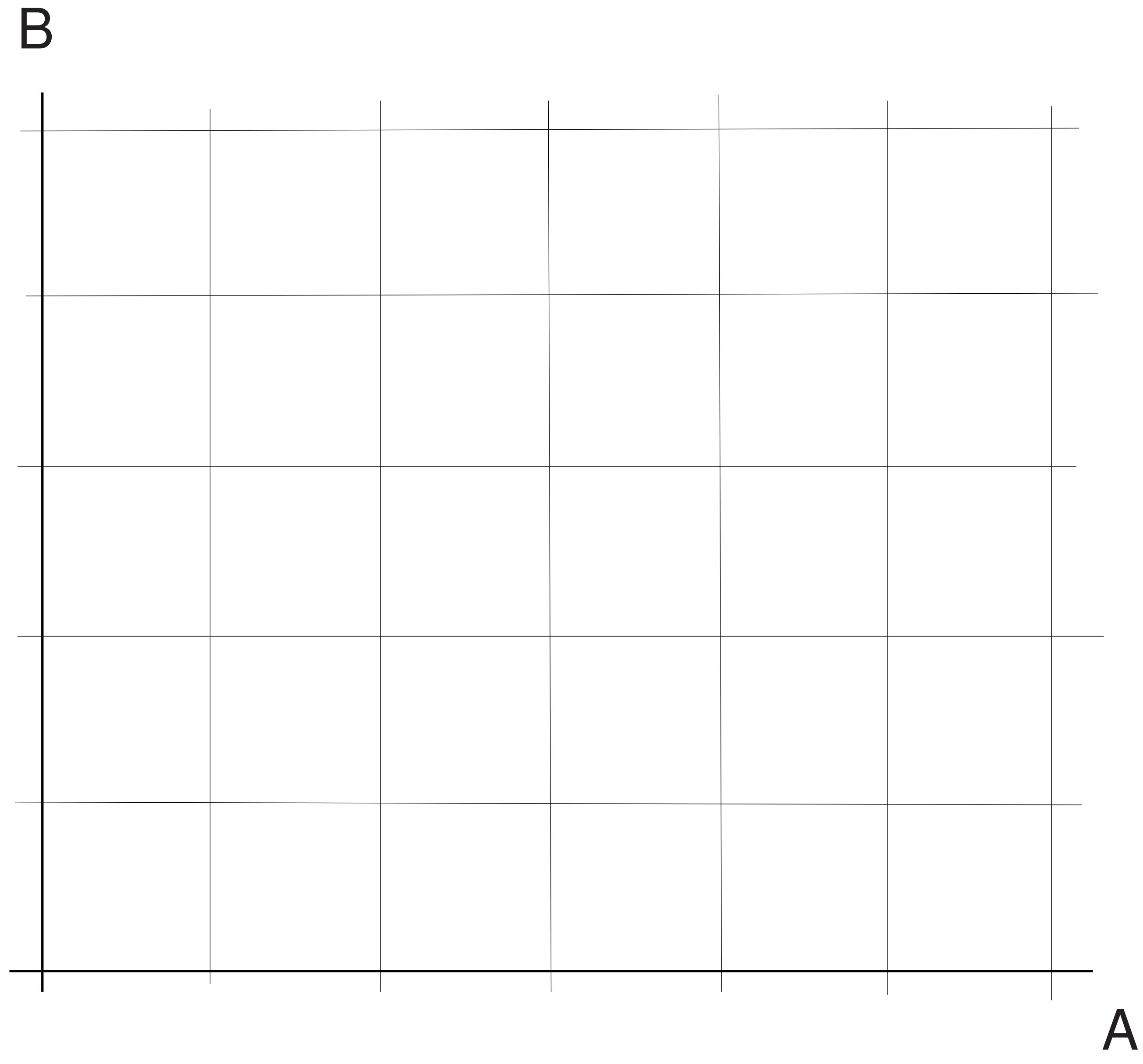
Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Beschreibung des Spielverlaufs durch einen “Nordostpfad”:

A gewinnt eine Runde: ein Schritt nach Osten

B gewinnt eine Runde: ein Schritt nach Norden


B
A

Jede Runde geht mit W’kt 1/2 an A

und mit W’kt 1/2 an B.

Jede Runde geht mit W'kt 1/2 an A

und mit W'kt 1/2 an B.

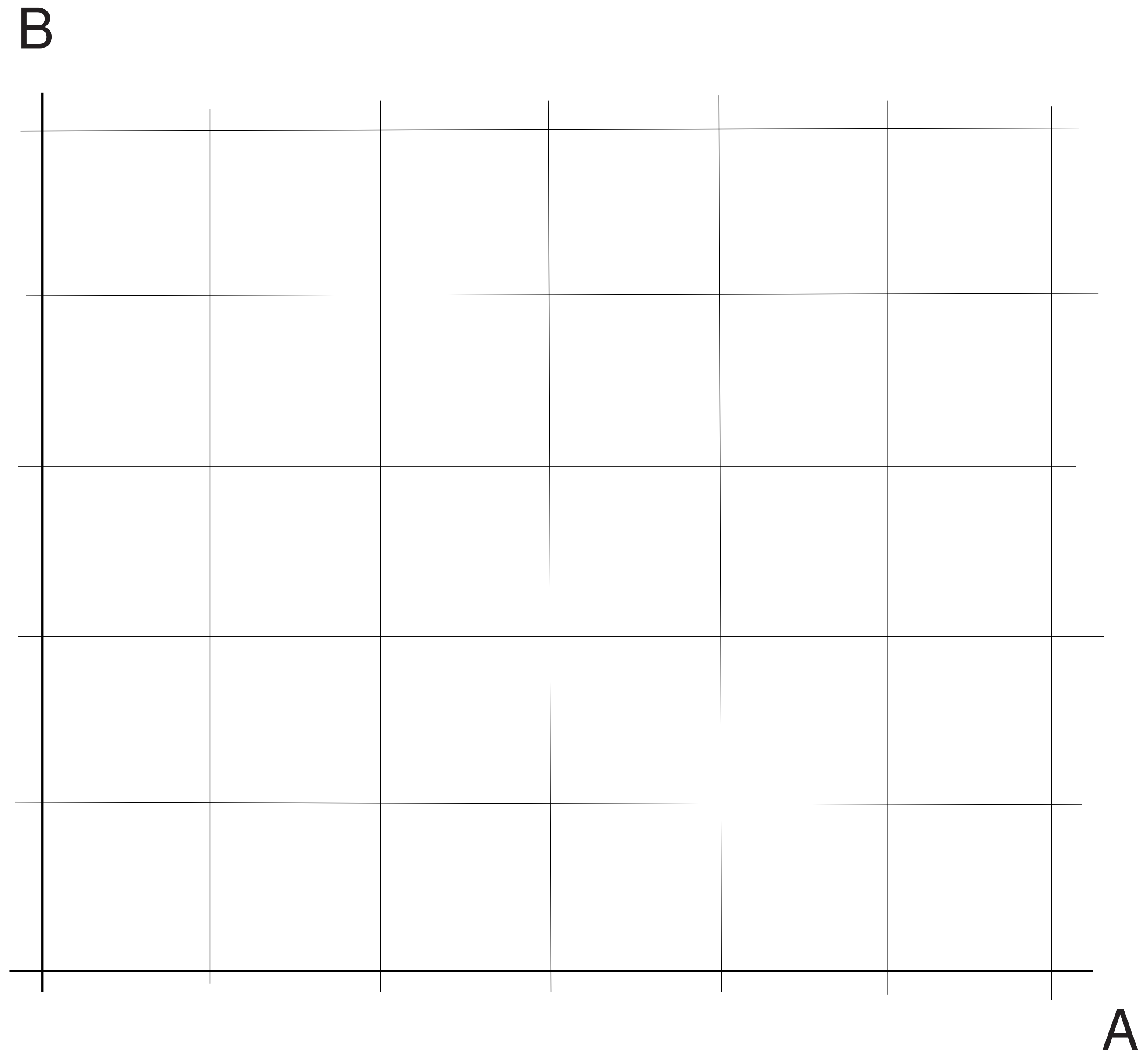
Neue Runde, neues Glück.

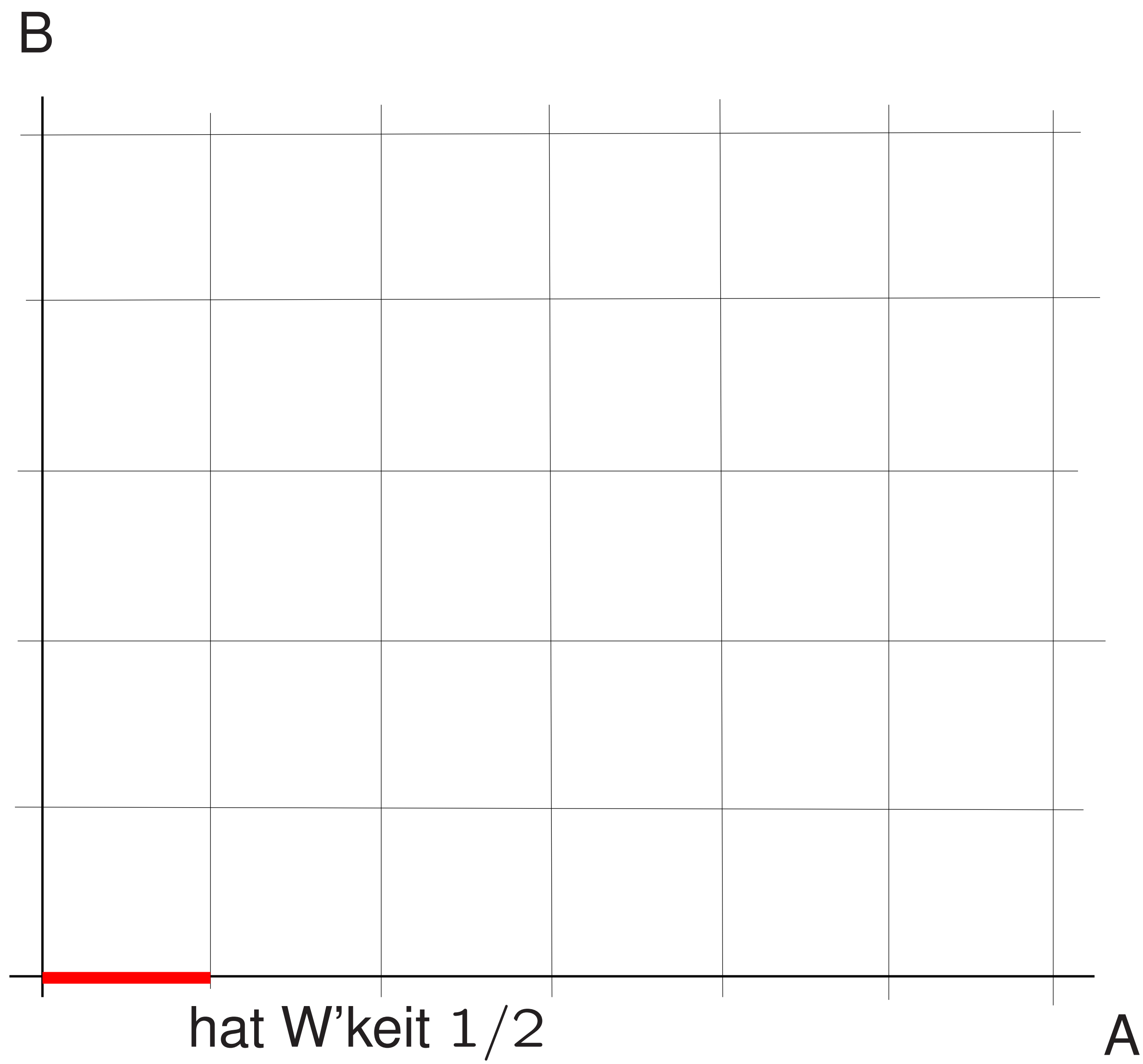
Jede Runde geht mit W’kt 1/2 an A

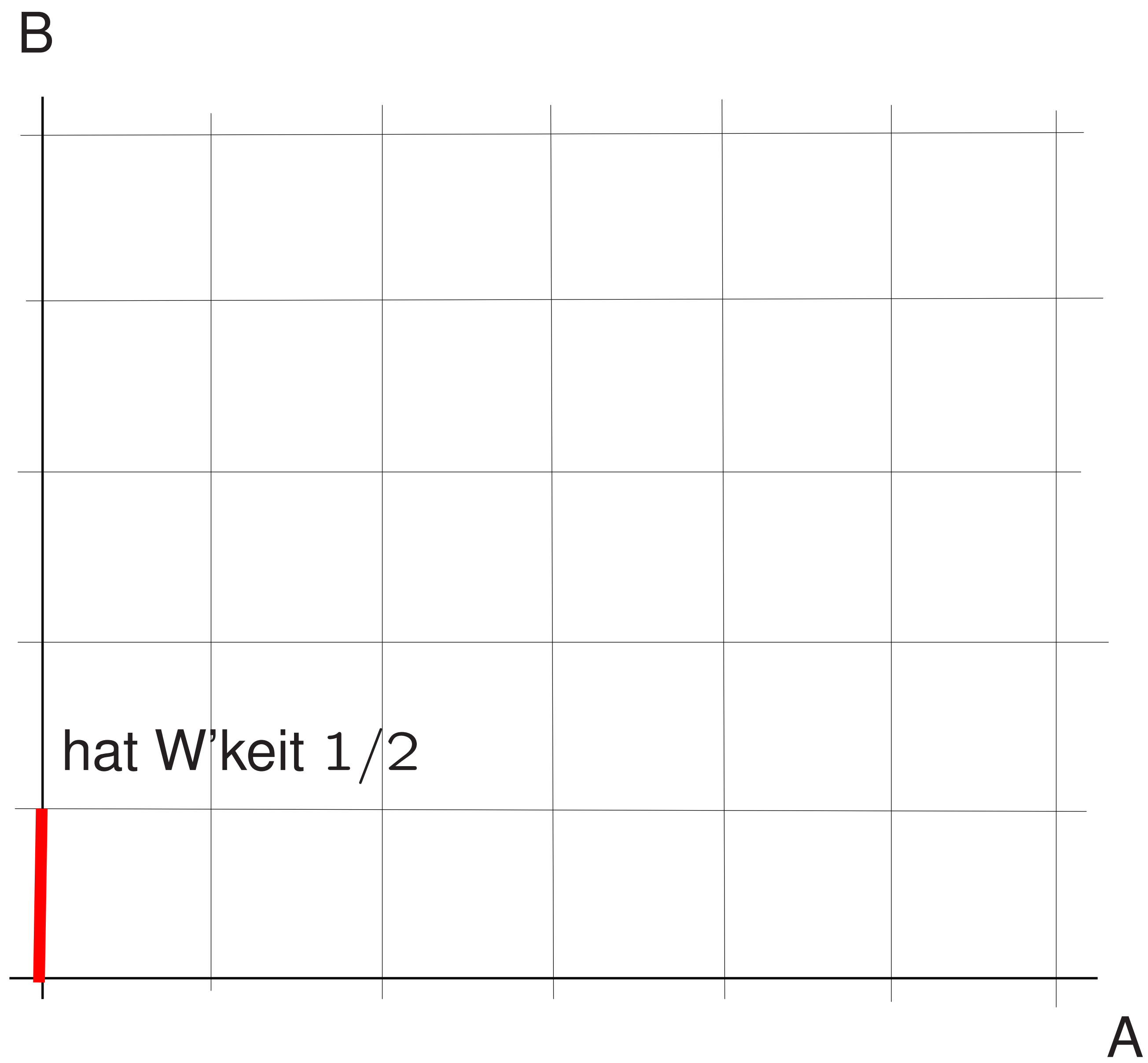
und mit W’kt 1/2 an B.

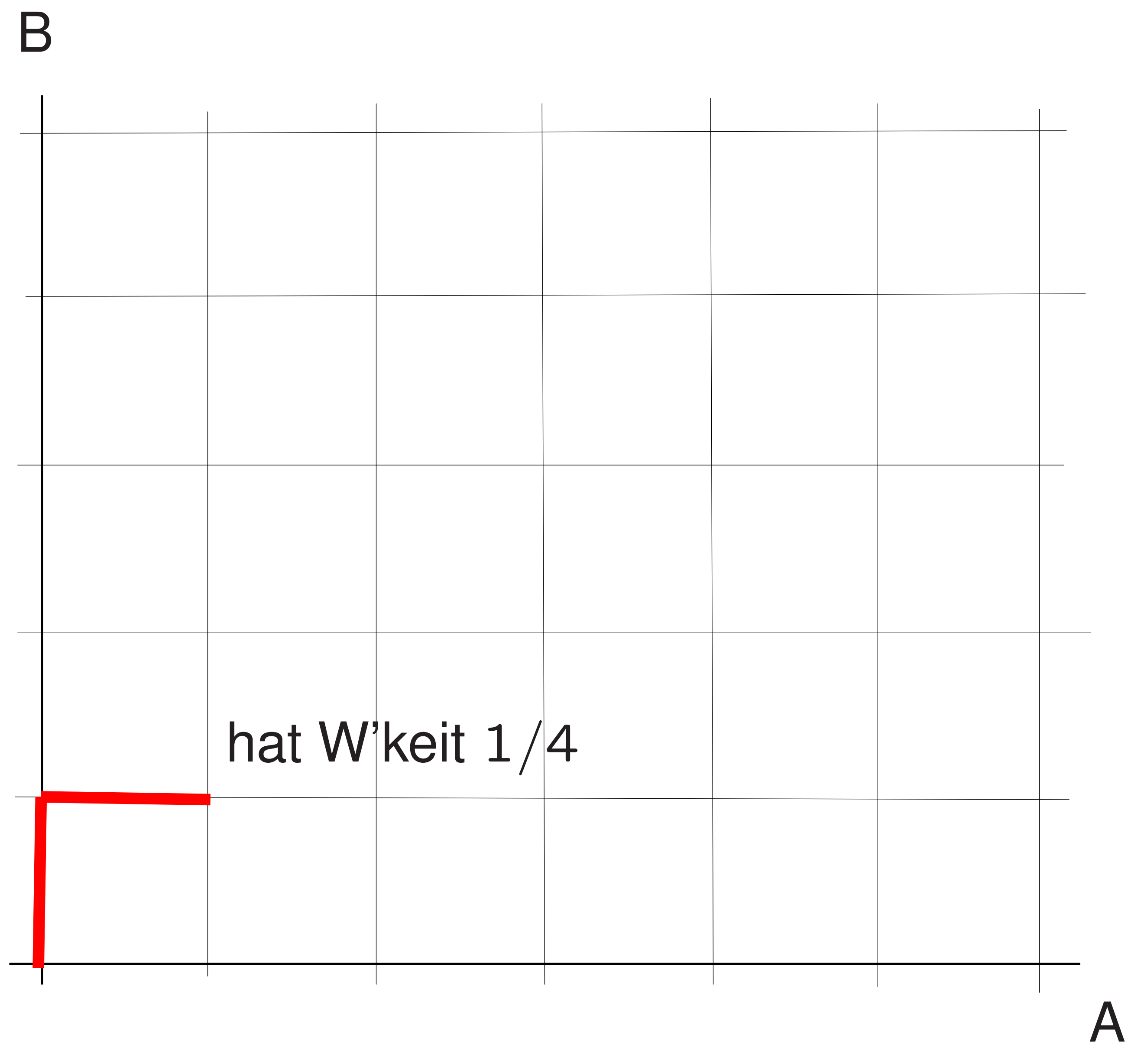
Neue Runde, neues Glück.

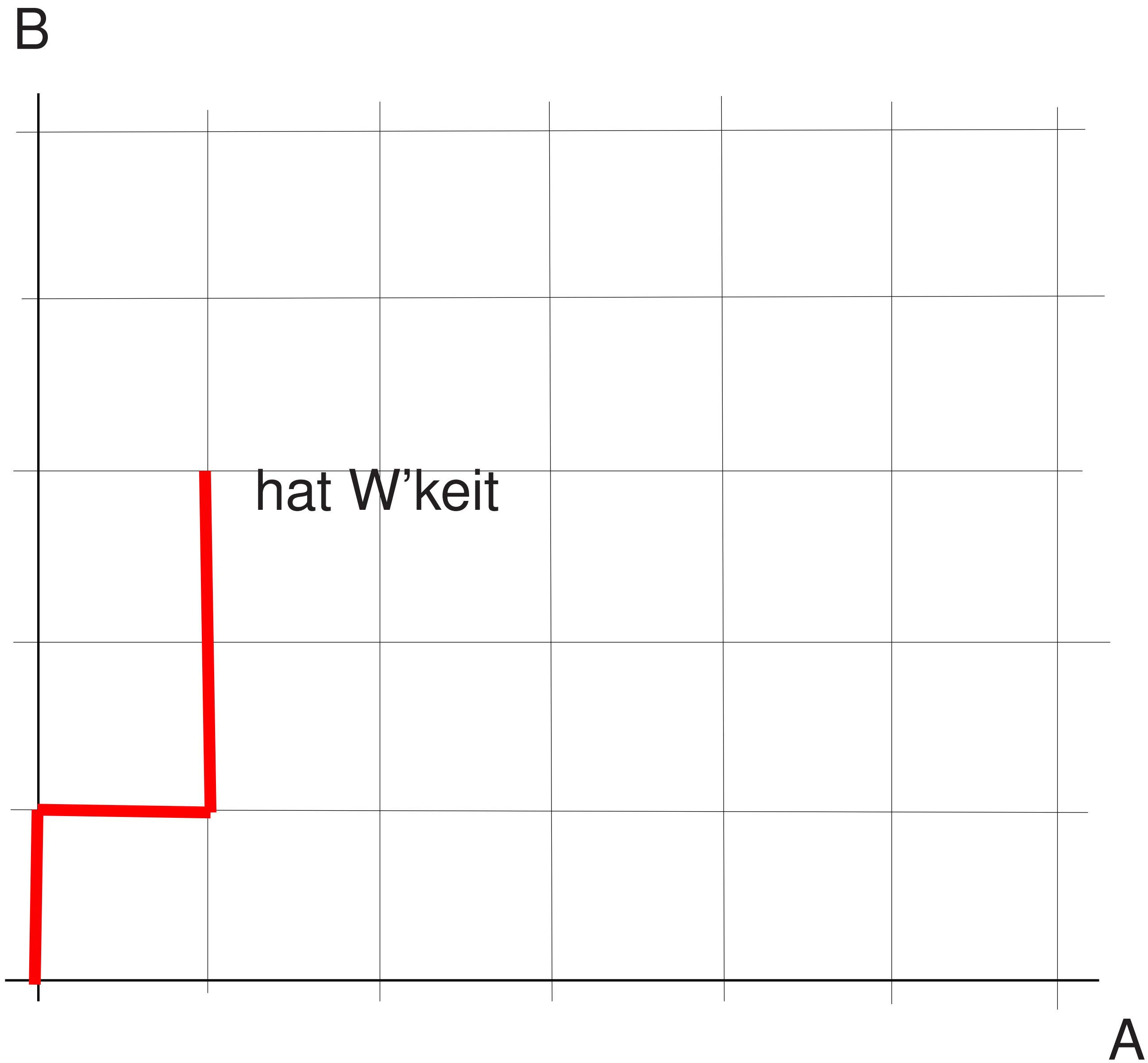
Modell des “fairen Münzwurfs”

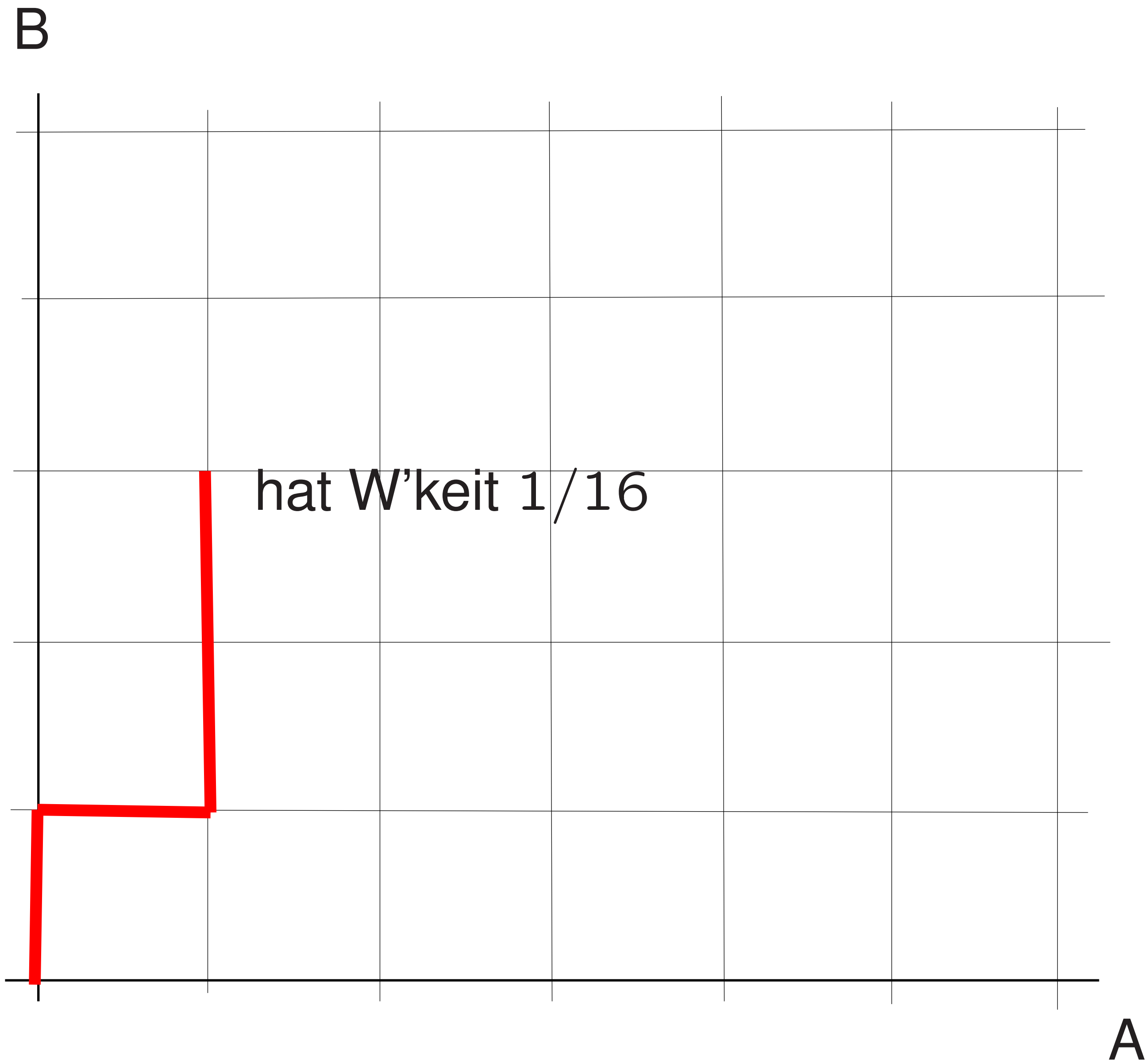

B
A

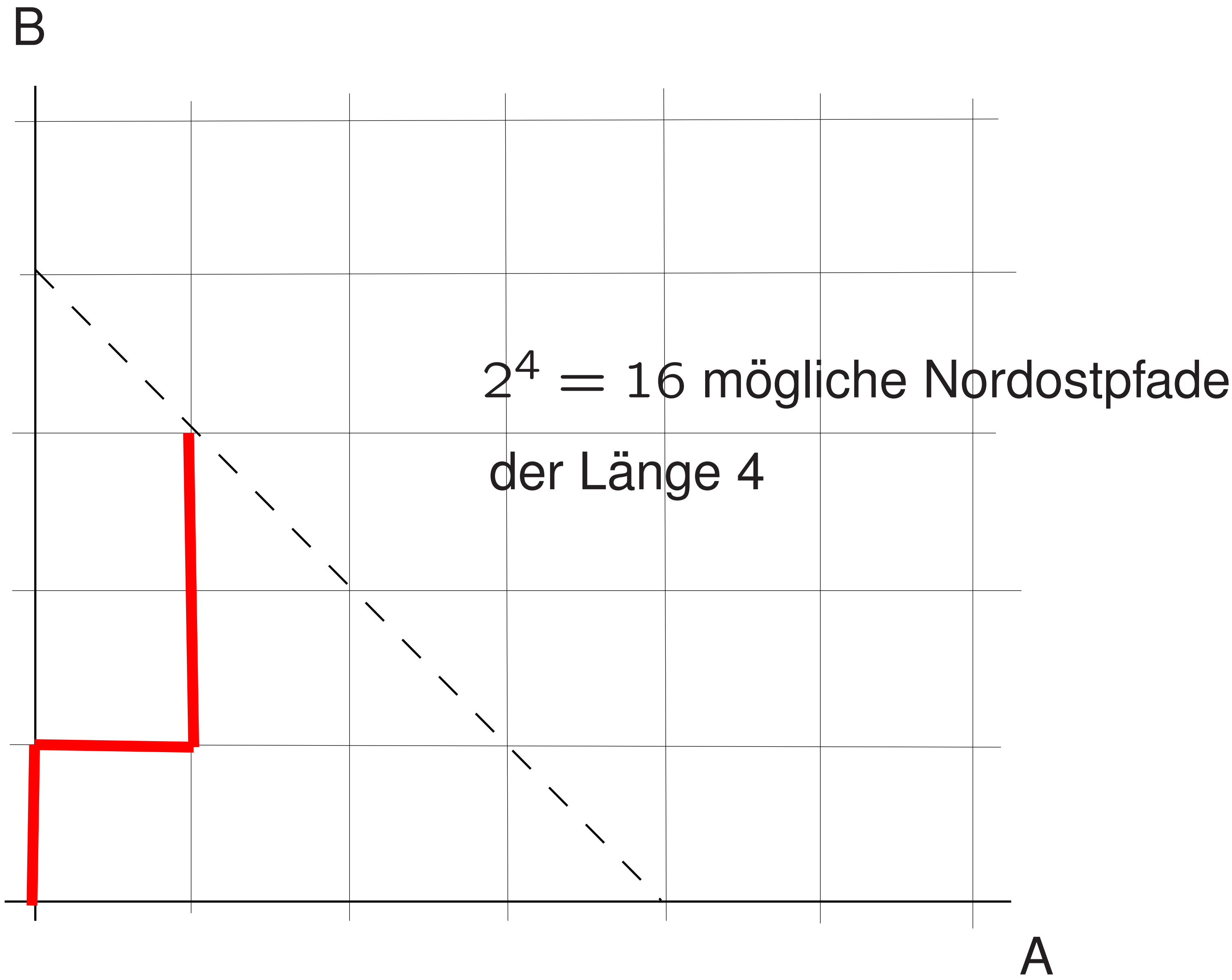

B
hat W'keit 1/2
A


B
hat W'keit 1/2
A


B
hat W'keit 1/4
A


B
hat W'keit
A

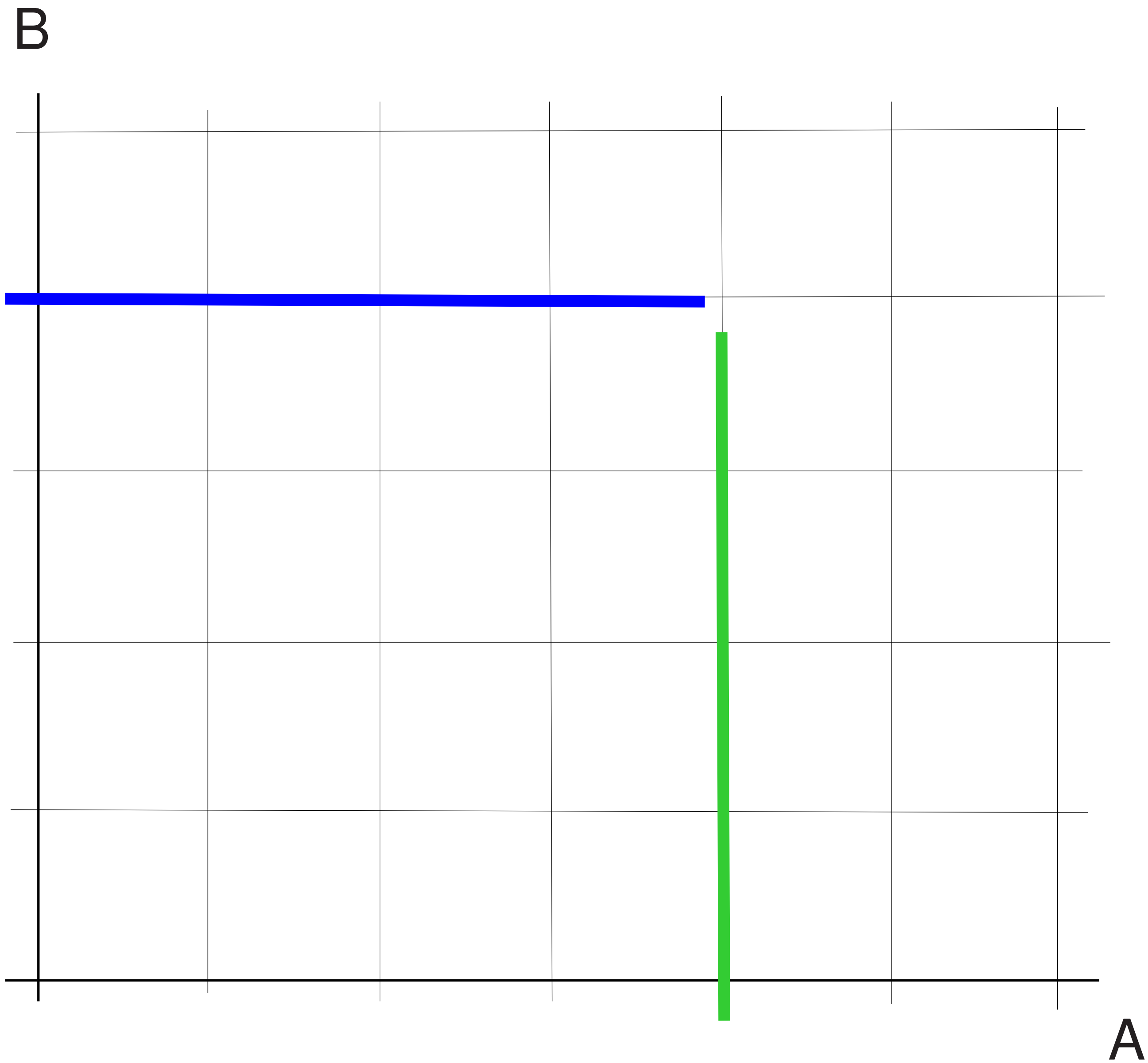

B
hat W'keit 1/16
A


B
$2^4 = 16$ mögliche Nordostpfade
der Länge 4
A

Die Vereinbarung war:

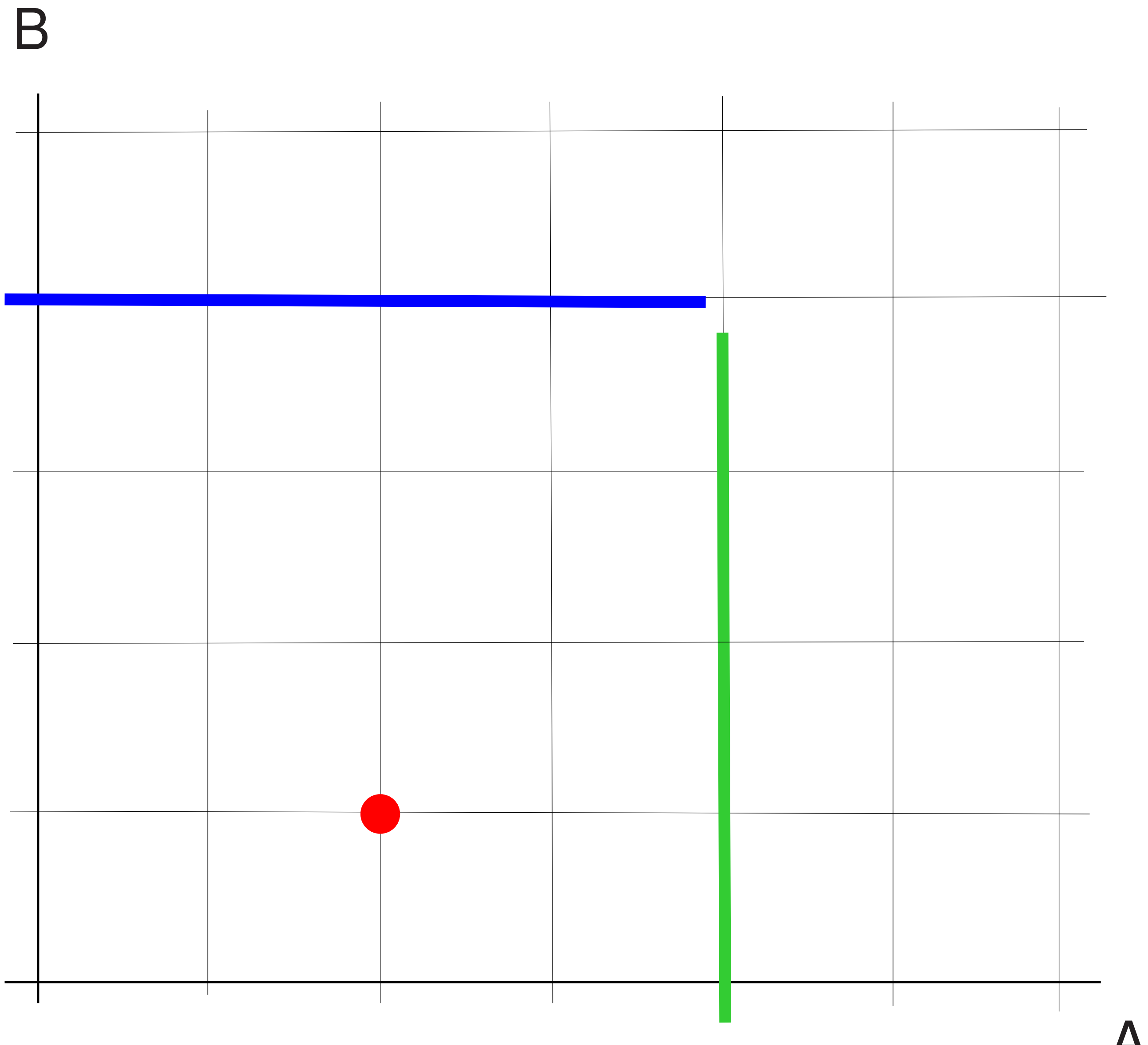
Derjenige Spieler bekommt den ganzen Einsatz,

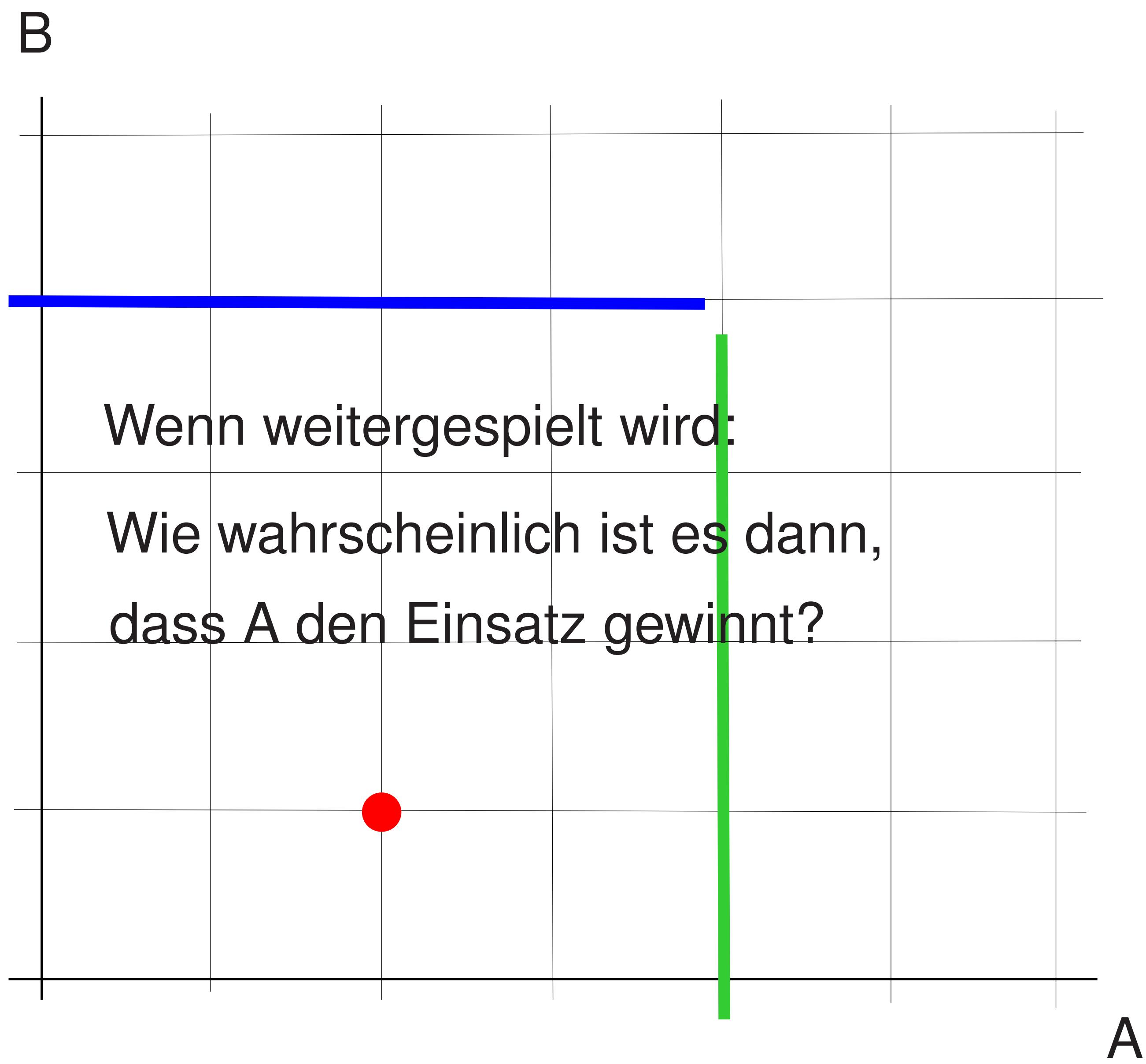
der als erster 4 Runden gewonnen hat.


B
A

Der aktuelle Spielstand ist

2:1 für A.

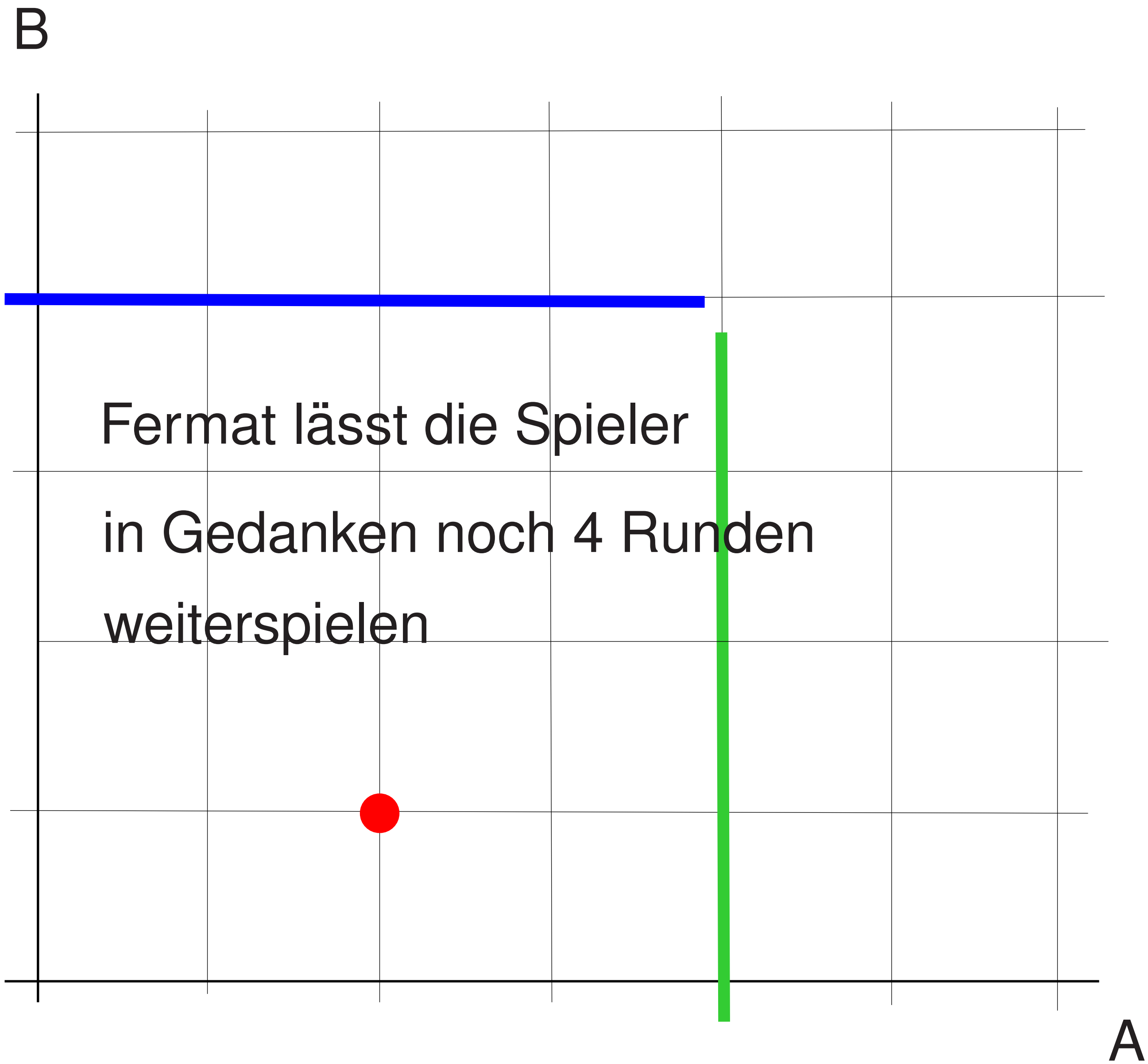

B
A

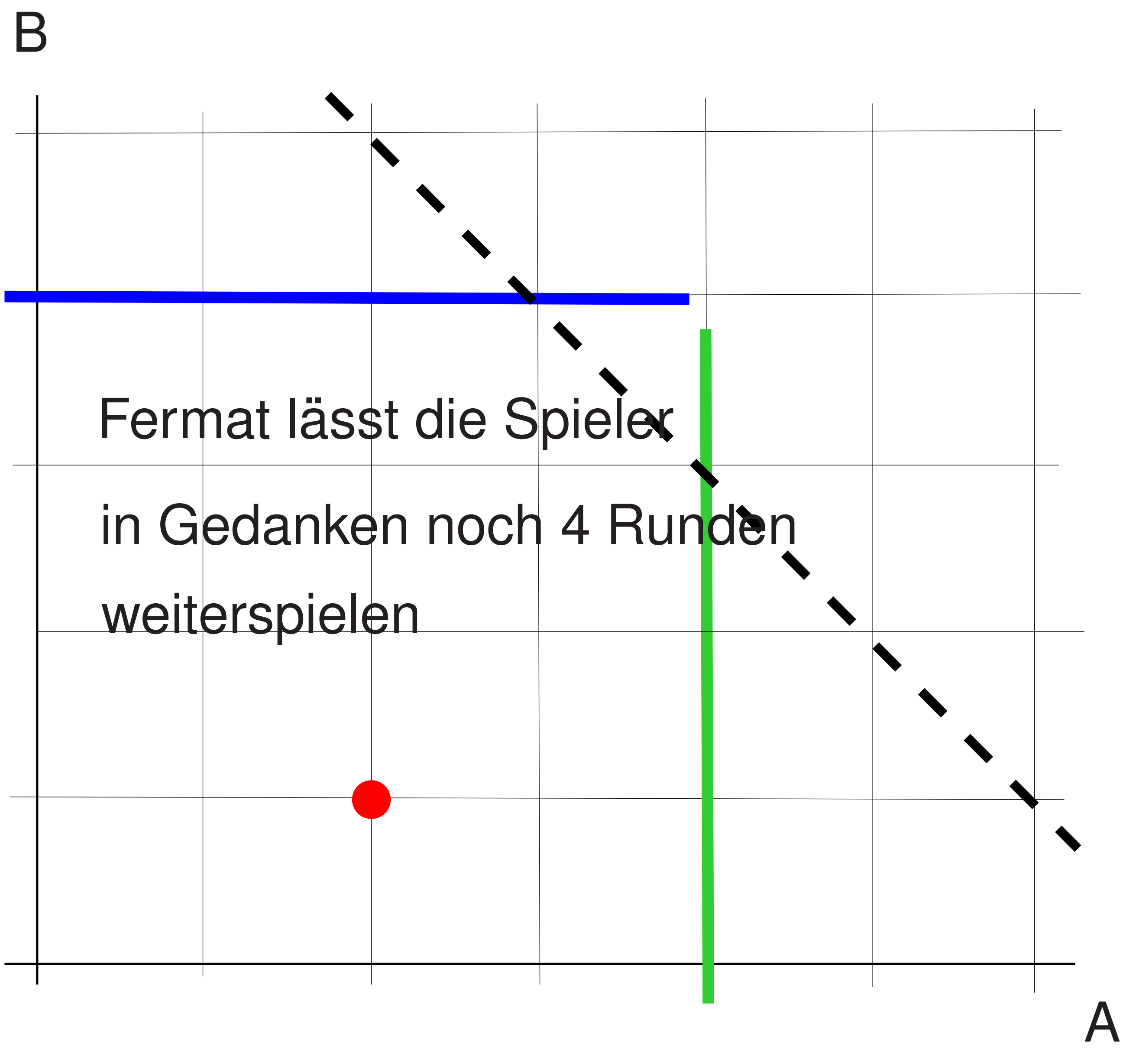

B
Wenn weitergespielt wird:
Wie wahrscheinlich ist es dann,
dass A den Einsatz gewinnt?
A

Fermats Lösungsweg:

Fermats Lösungsweg:

Intelligentes Zählen von Pfaden

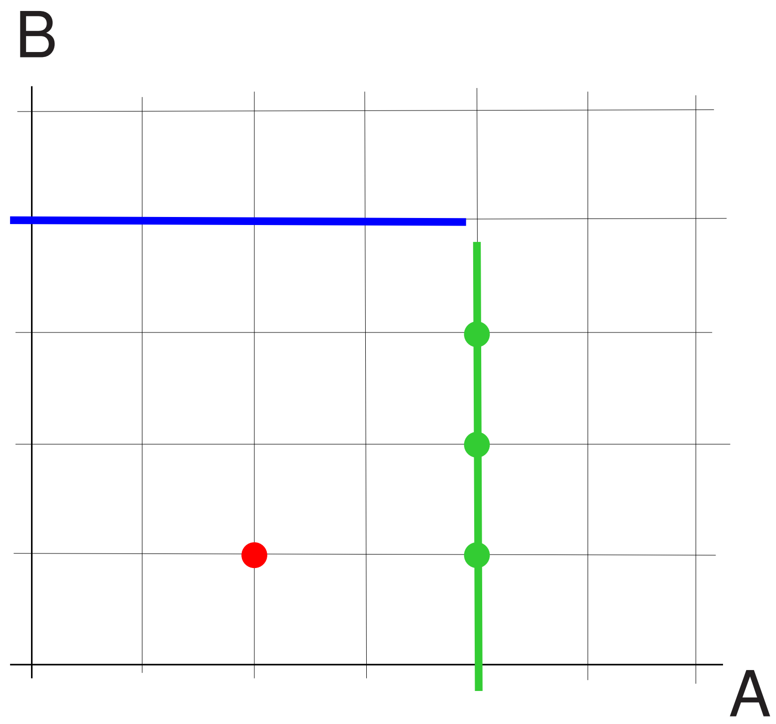

B
Fermat lässt die Spieler
in Gedanken noch 4 Runden
weiterspielen
A

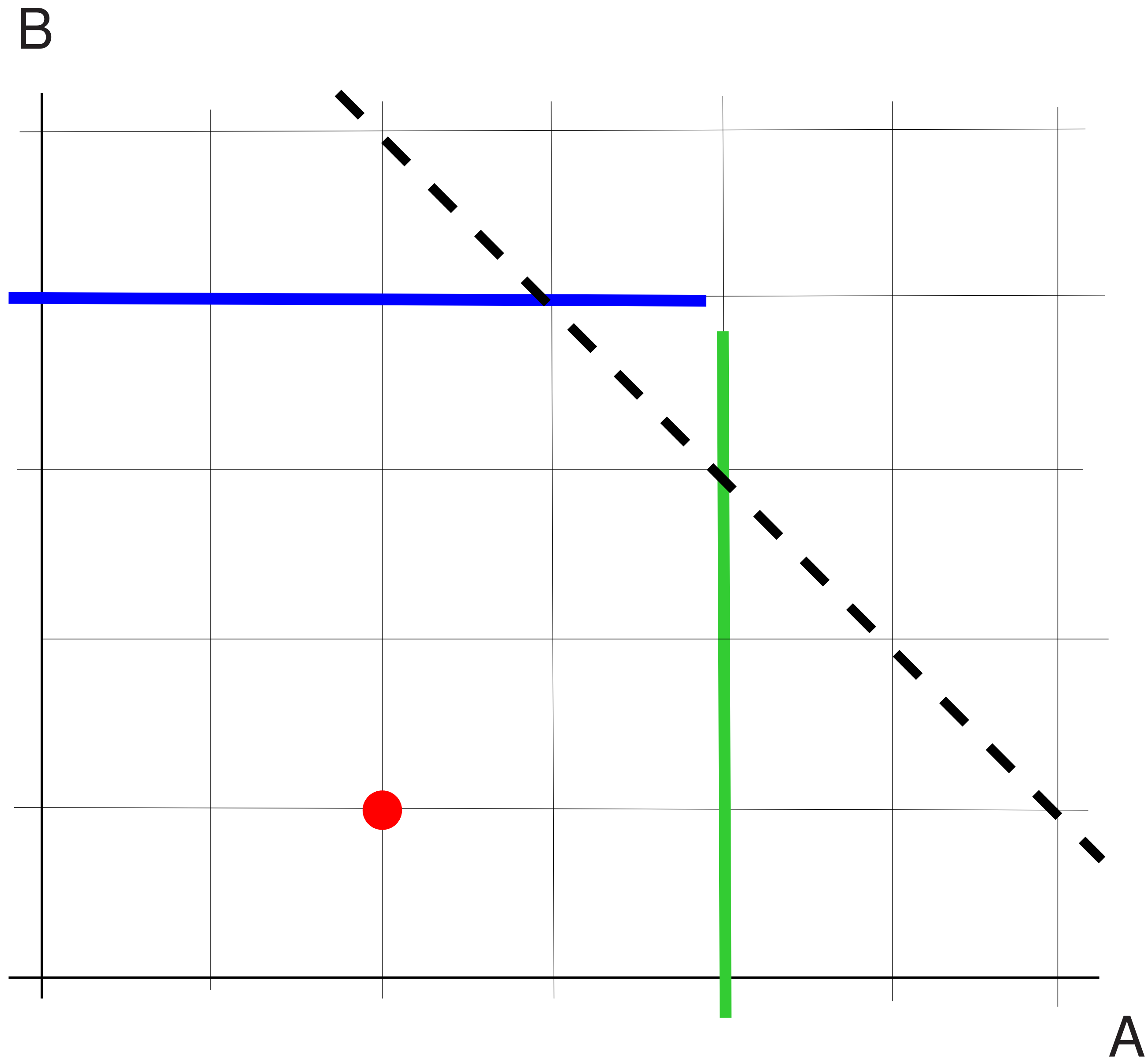

B
Fermat lässt die Spieler
in Gedanken noch 4 Runden
weiterspielen
A

In (2,1) starten 16 mögliche Pfade der Länge 4.

In (2,1) starten 16 mögliche Pfade der Länge 4.

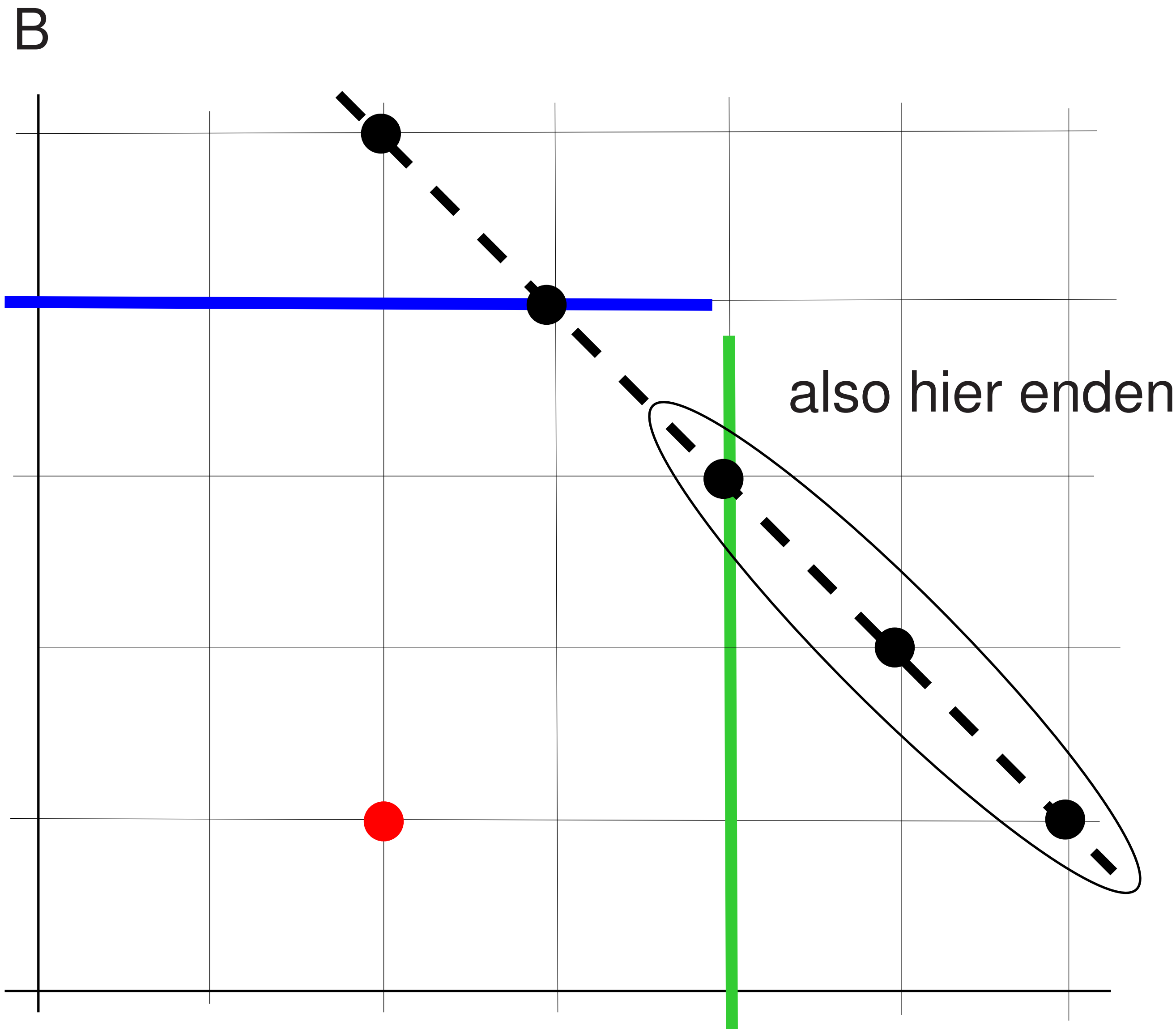
Wieviele davon treffen auf den Ostrand $\{4\} \times \{1, 2, 3\}$ des Quadrates?


B
A

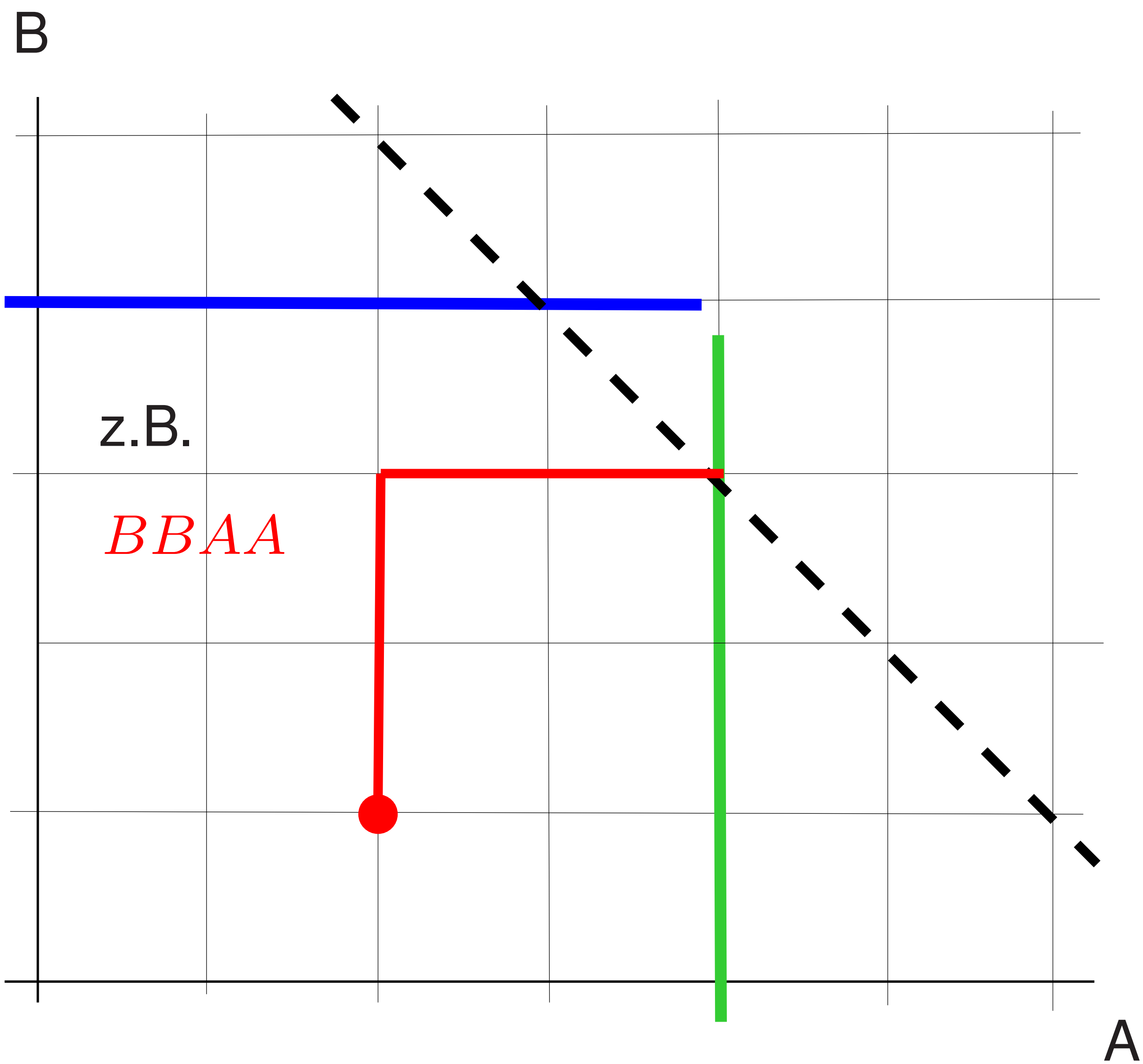

B
A

Das sind genau die Pfade der Länge 4,

die mindestens zwei Schritte nach Osten gehen,



B
also hier enden
A



B
z.B.
$BBAA$
A

die 16 “Nordostpfade” der Länge 4

in lexikographischer Ordnung

die 16 “Nordostpfade” der Länge 4

in lexikographischer Ordnung

$$\begin{array}{cccc}
AAAA & ABAA & BAAA & BBAA \\
AAAB & ABAB & BAAB & BBAB \\
AABA & ABBA & BABA & BBBA \\
AABB & ABBB & BABB & BBBB
\end{array}$$

die mit mindestens zwei A

und die mit weniger als zwei A:

die mit mindestens zwei A

und die mit weniger als zwei A:

$AAAA$	$ABAA$	$BAAA$	$BBAA$
$AAAB$	$ABAB$	$BAAB$	$BBAB$
$AABA$	$ABBA$	$BABA$	$BBBA$
$AABB$	$ABBB$	$BABB$	$BBBB$

die mit mindestens zwei A

und die mit weniger als zwei A:

$$
\begin{array}{cccc}
AAAA & ABAA & BAAA & BBAA \\
AAAB & ABAB & BAAB & BBAB \\
AABA & ABBA & BABA & BBBA \\
AABB & ABBB & BABB & BBBB
\end{array}
$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass A das Spiel gewinnt, ist

die mit mindestens zwei A

und die mit weniger als zwei A:

$$\begin{array}{cccc} AAAA & ABAA & BAAA & BBAA \\ AAAB & ABAB & BAAB & BBAB \\ AABA & ABBA & BABA & BBBA \\ AABB & ABBB & BABB & BBBB \end{array}$$

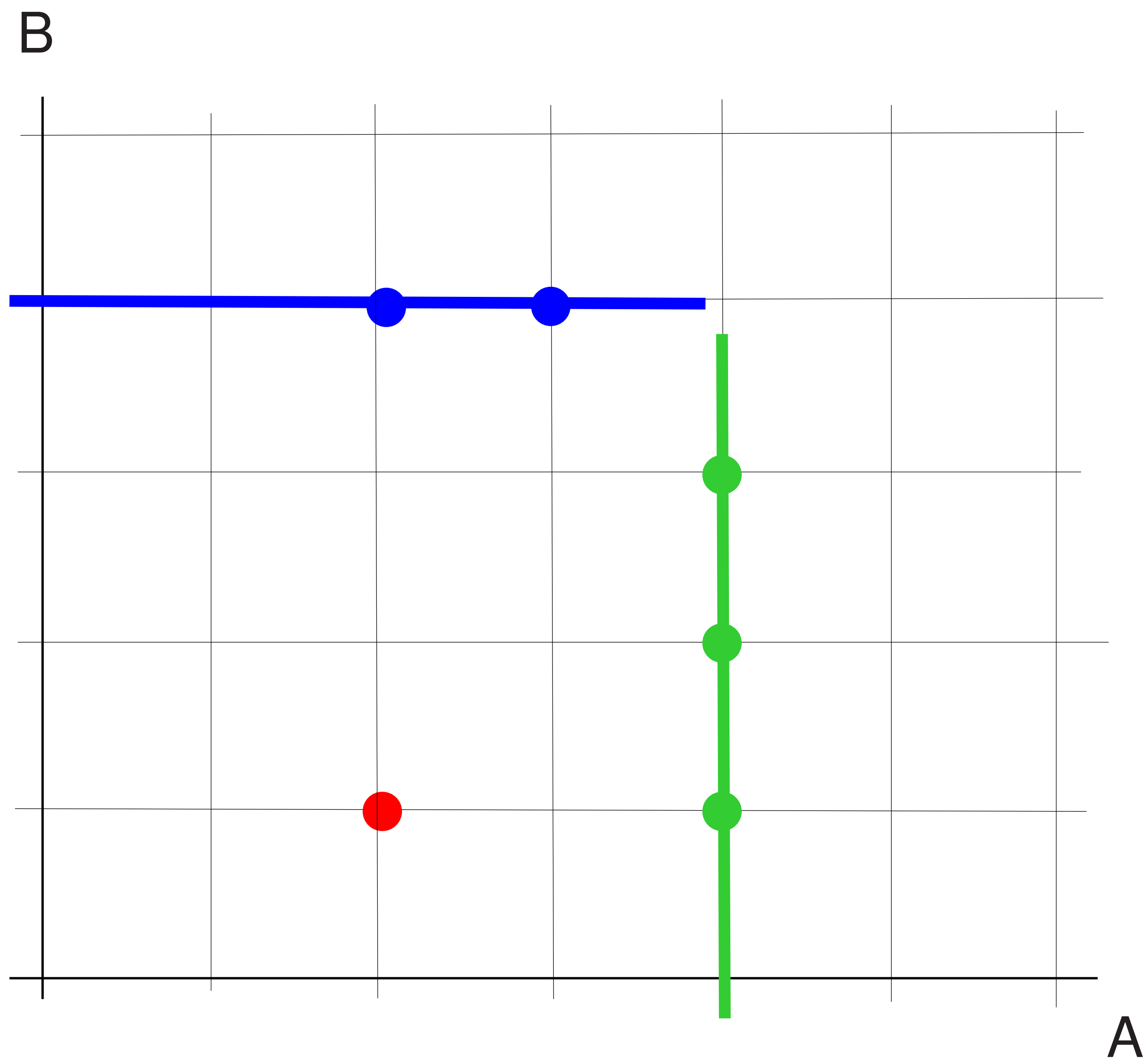
Die Wahrscheinlichkeit, dass A das Spiel gewinnt, ist

$$\frac{11}{16}.$$

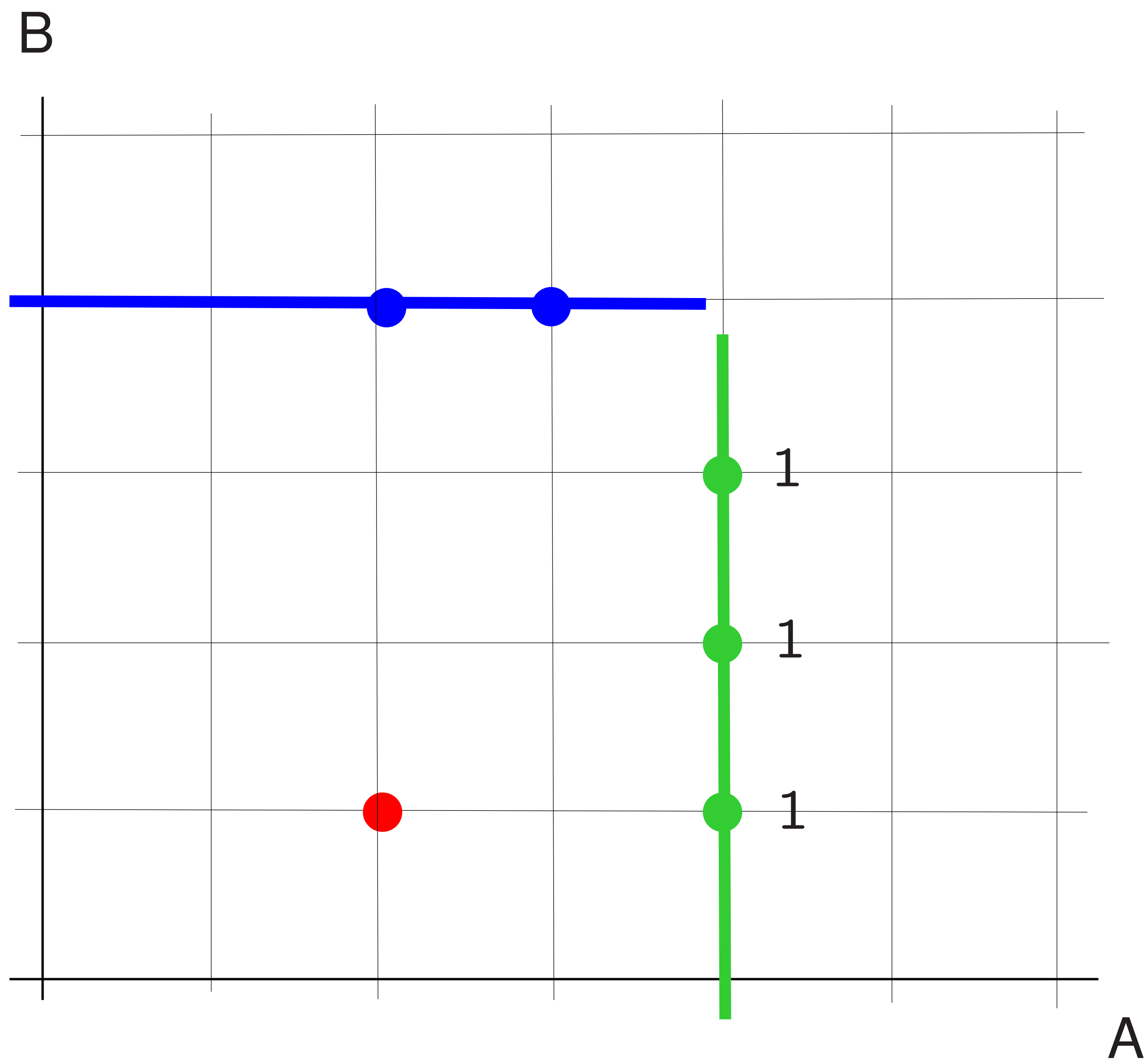
Pascals Lösungsweg:

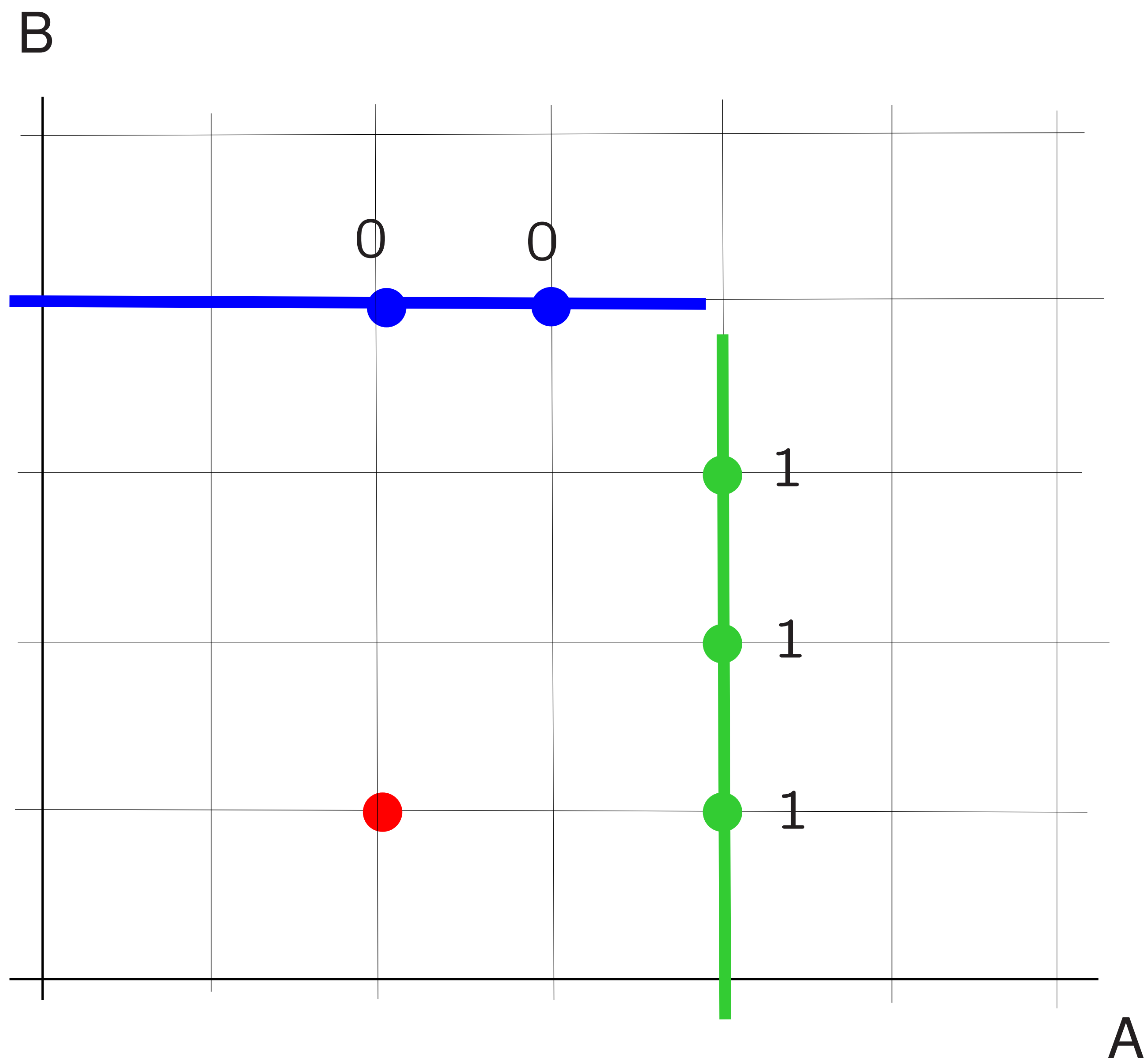
Pascals Lösungsweg:

Die Methode der Rückwärtsinduktion

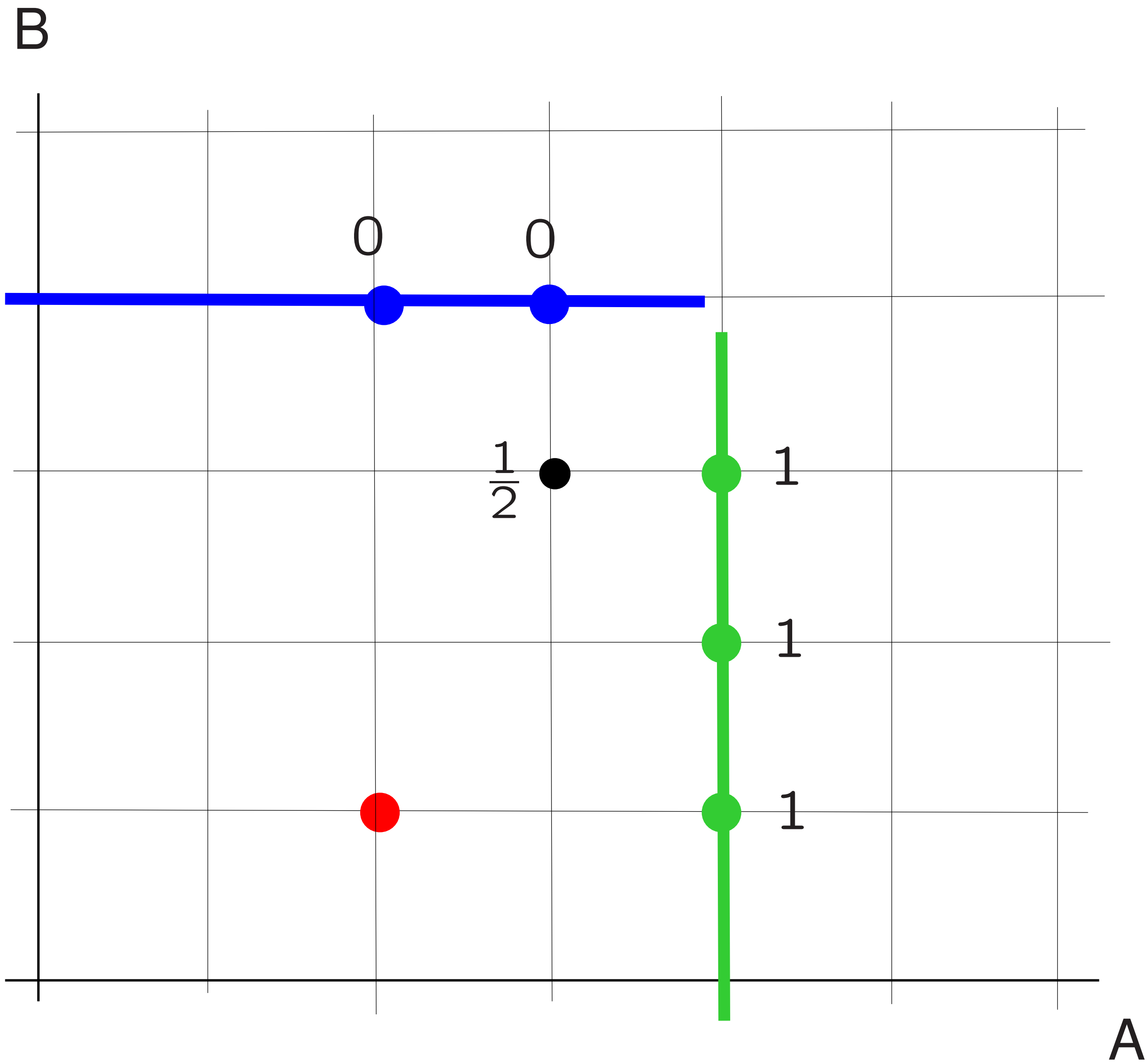


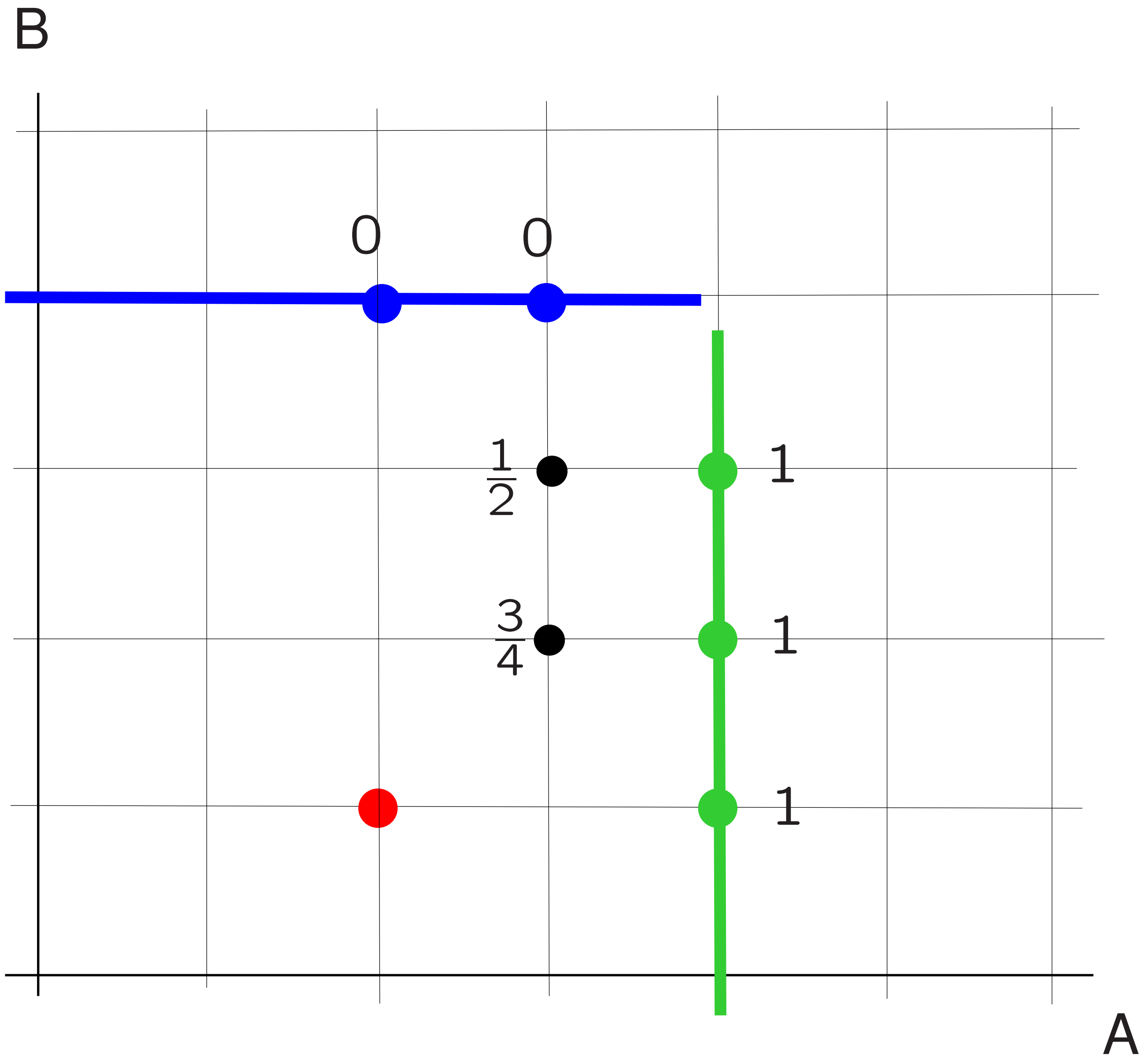
B
A


B
1
1
1
A

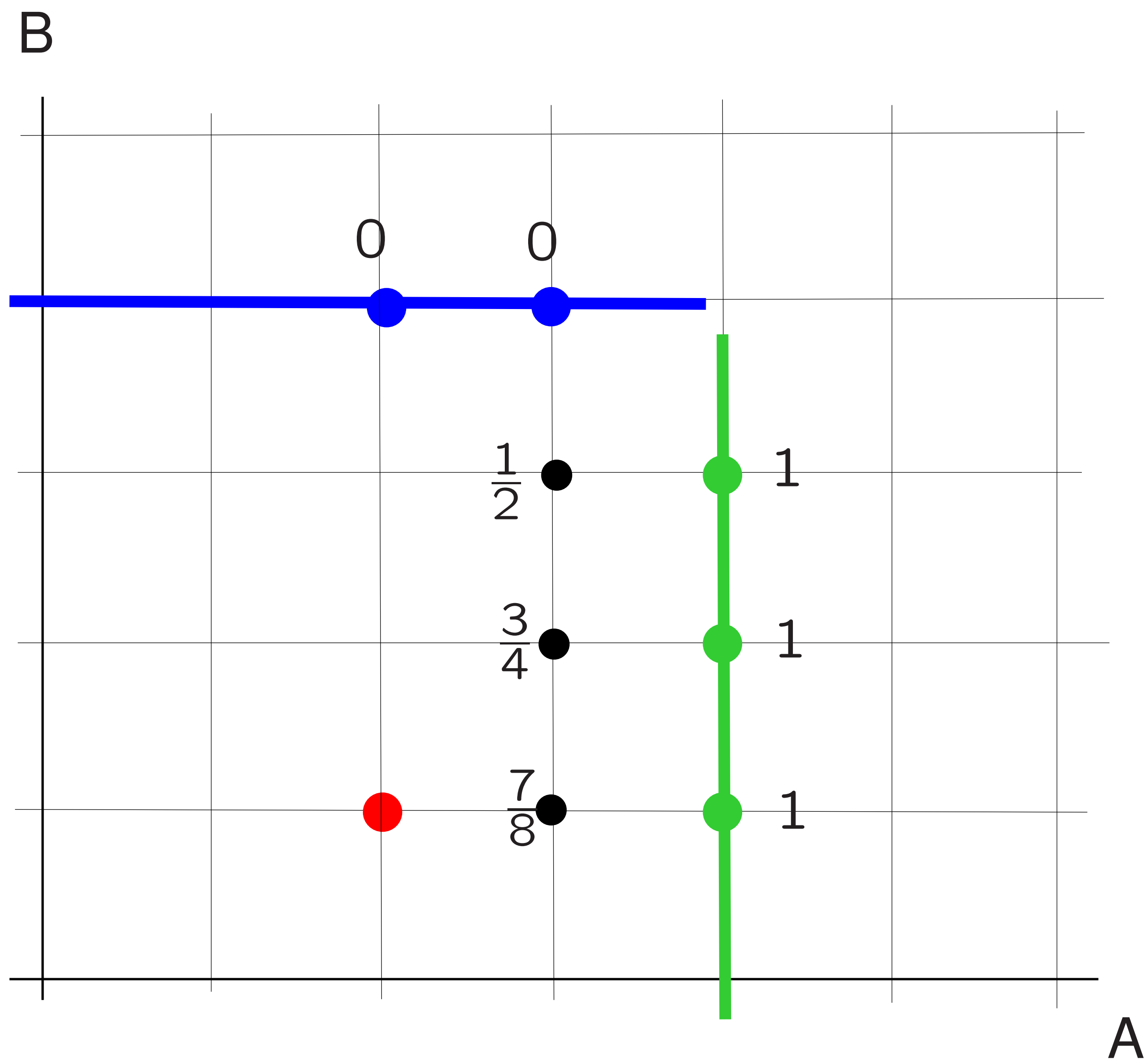


B
0
0
1
1
1
A

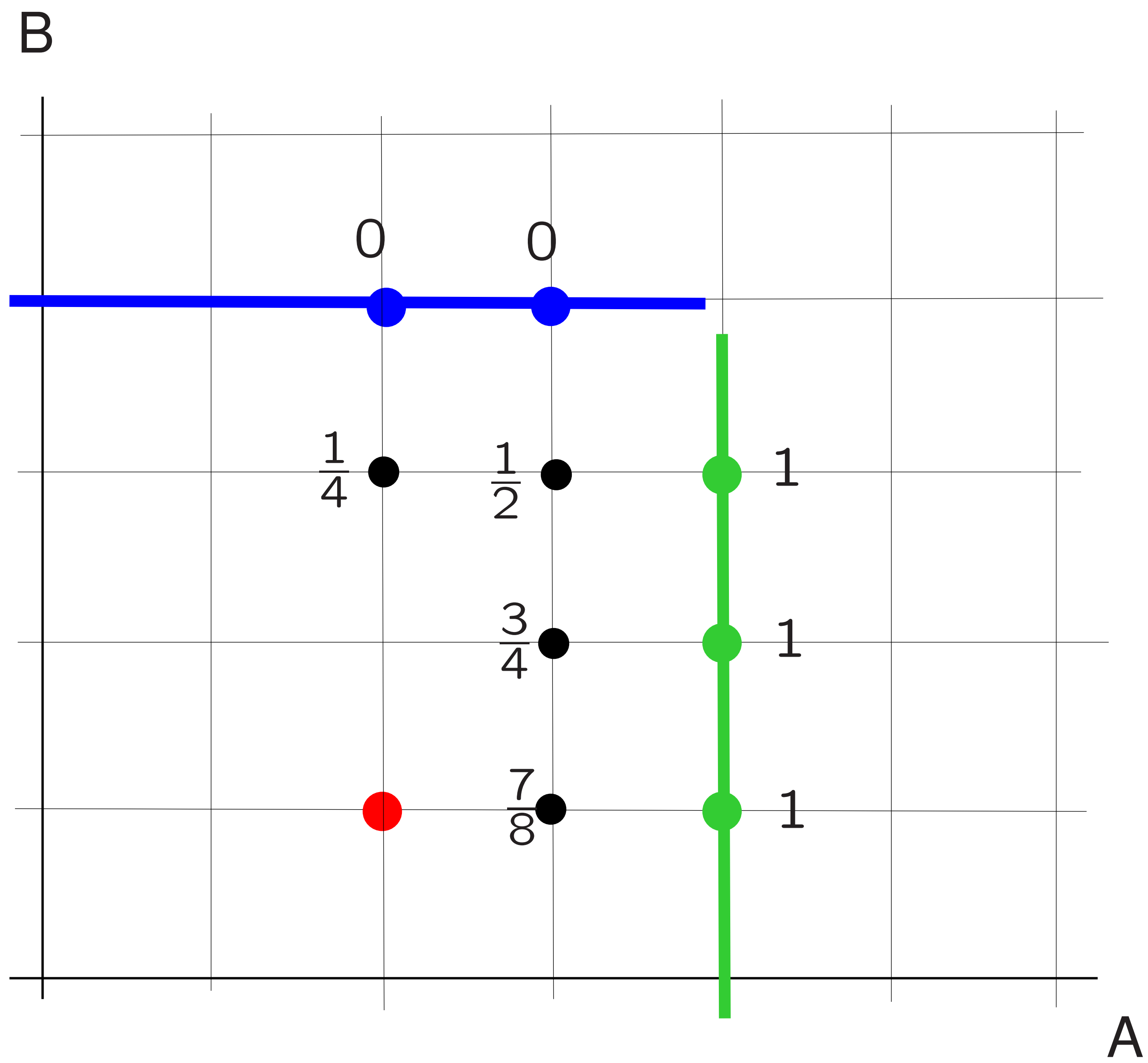

B
0
0
1/2
1
1
1
A



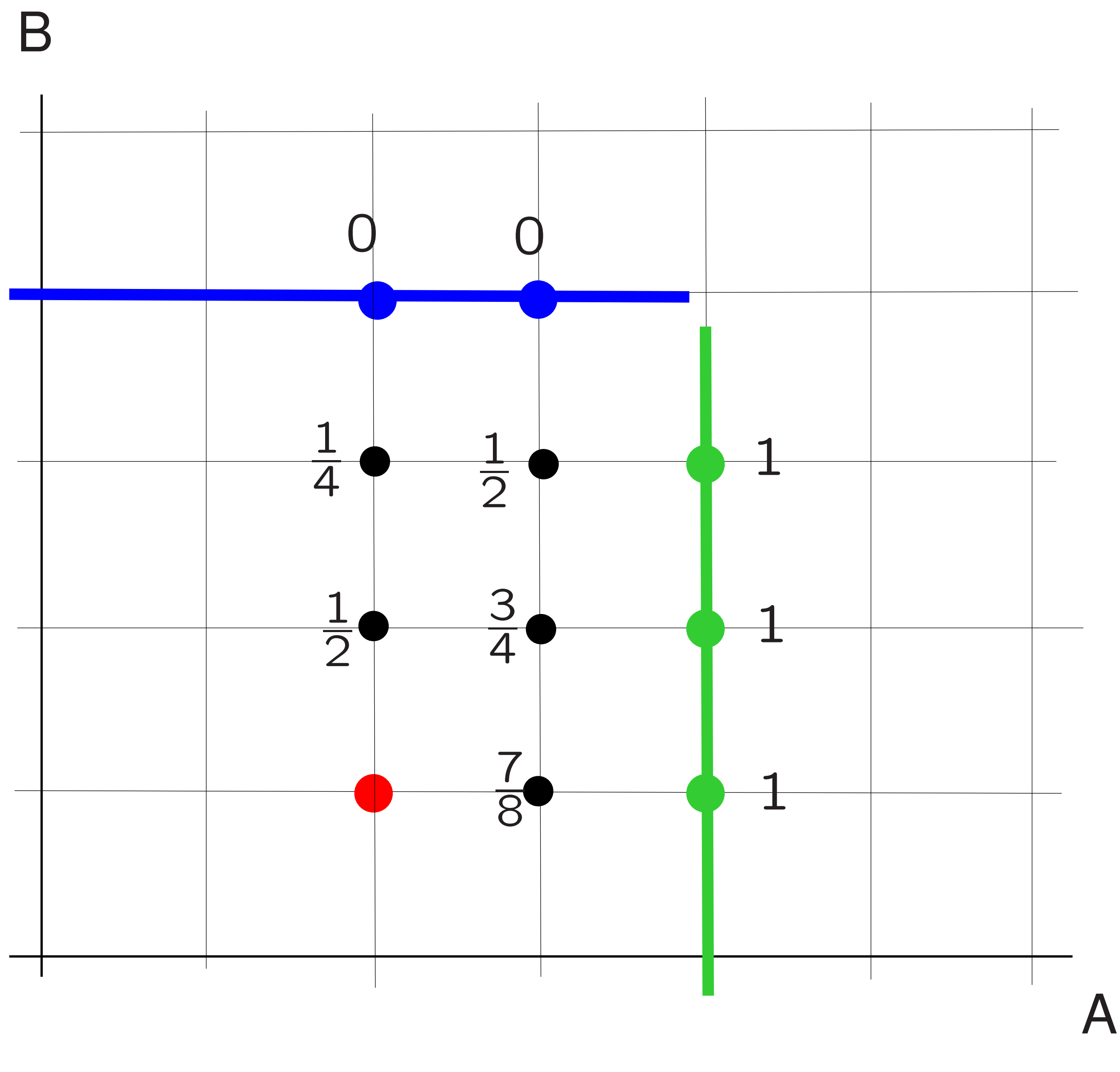
B
0
0
1/2
1
3/4
1
1
A



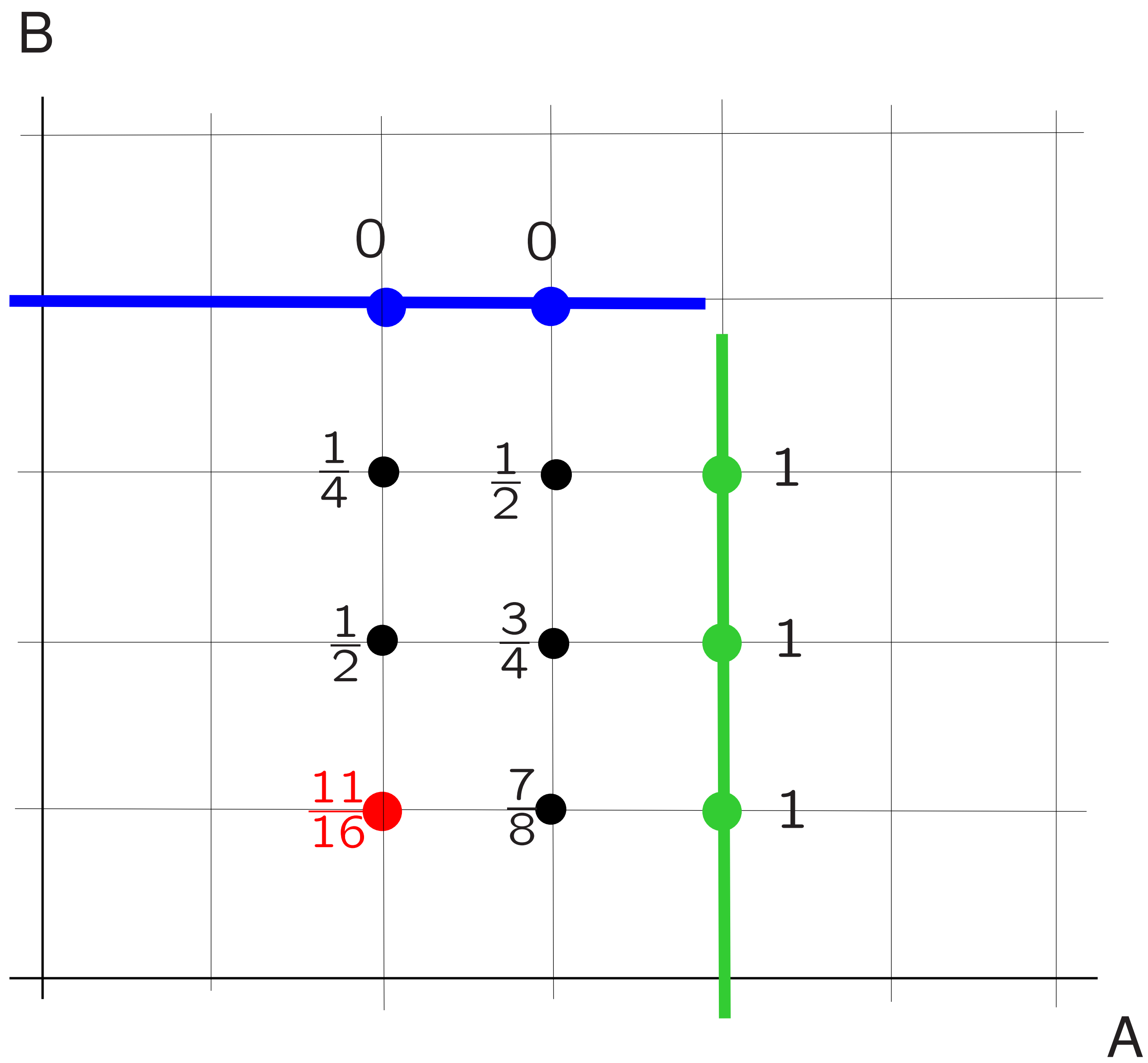
B
0
0
$\frac{1}{2}$
1
$\frac{3}{4}$
1
$\frac{7}{8}$
1
A



B
A
0
0
1/4
1/2
1
3/4
1
7/8
1



B
0
0
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
1
$\frac{7}{8}$
1
A



B
0
0
1/4
1/2
1
1/2
3/4
1
11/16
7/8
1
A

Pascal an Fermat (1654):

Pascal an Fermat (1654):

“Je vois bien que la verité est la même à Toulouse et à Paris...”

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

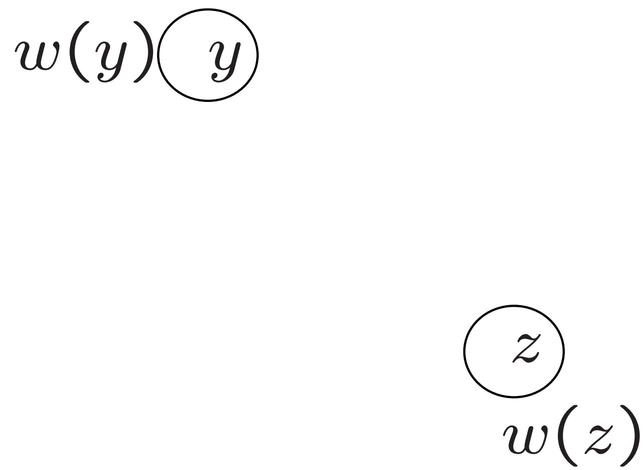
Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.



$w(y)$
y
z
$w(z)$

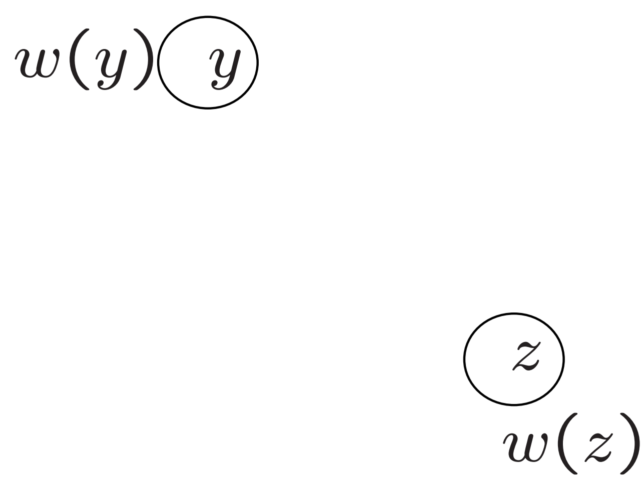
Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.

Vom Zustand x aus kommt man in einem Schritt

mit W'keit 1/2 nach y und mit W'keit 1/2 nach z.



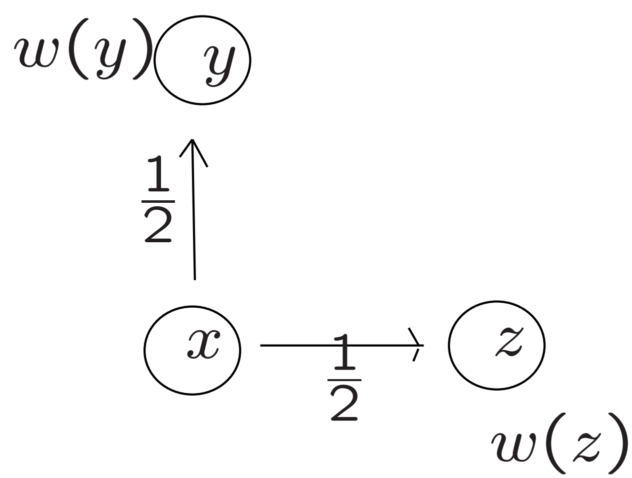
Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.

Vom Zustand x aus kommt man in einem Schritt

mit W'keit 1/2 nach y und mit W'keit 1/2 nach z.



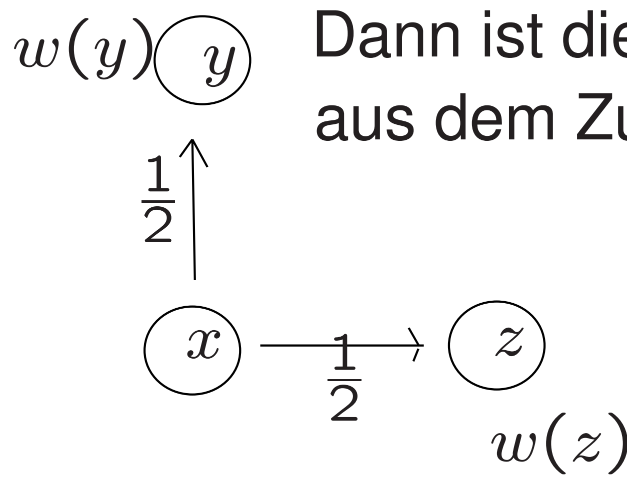
Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.

Vom Zustand x aus kommt man in einem Schritt

mit W'keit 1/2 nach y und mit W'keit 1/2 nach z.



Dann ist die Gewinnw'keit aus dem Zustand x

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.

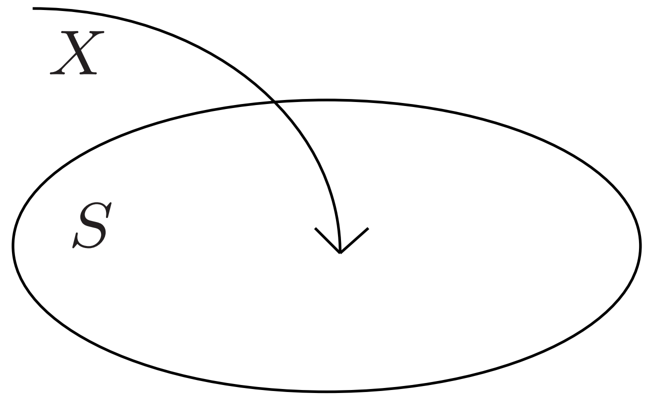
Vom Zustand x aus kommt man in einem Schritt

mit W'keit 1/2 nach y und mit W'keit 1/2 nach z.

$$
\begin{tikzcd}
w(y)\; y & \\
x \arrow[u, "\frac{1}{2}"] \arrow[r, "\frac{1}{2}"'] & z \\
& w(z)
\end{tikzcd}
$$

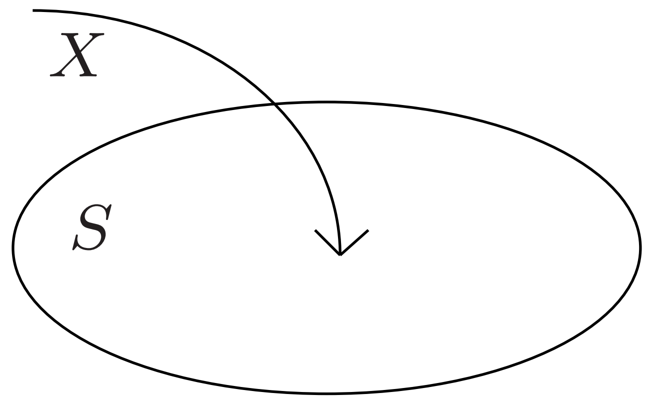
Dann ist die Gewinnw'keit
aus dem Zustand x
gleich $\frac{1}{2}w(y) + \frac{1}{2}w(z)$

Ein Logo der Elementaren Stochastik:



X ...zufällige Wahl eines Elements aus S

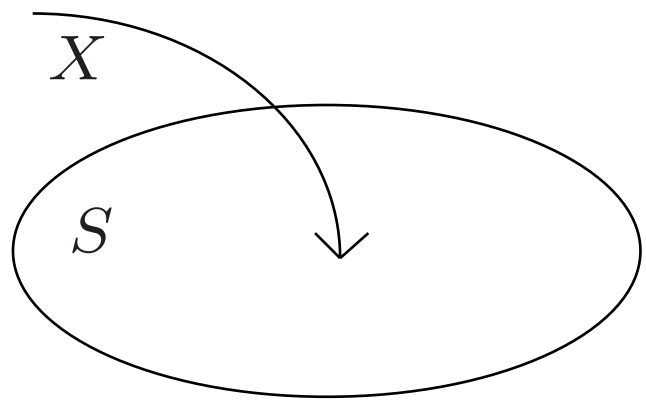
Ein Logo der Elementaren Stochastik:



X ... zufällige Wahl eines Elements aus S

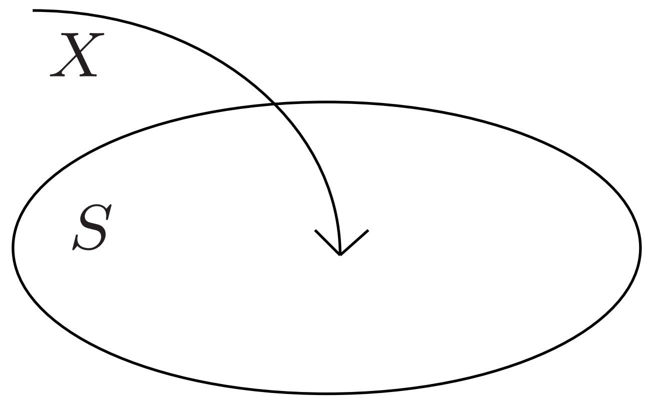
S ... Menge von möglichen Ausgängen

Ein Logo der Elementaren Stochastik:



X … **Zufallsvariable**

Ein Logo der Elementaren Stochastik:



X . . . **Zufallsvariable**

mit **Zielbereich** S

Zum Beispiel:

Zum Beispiel:

$S :=$ die Menge der Nordostpfade der Länge 4,

die im Punkt (2,1) starten

Zum Beispiel:

$S :=$ die Menge der Nordostpfade der Länge 4,

die im Punkt (2,1) starten

$X :=$ ein *rein zufälliges Element aus* S

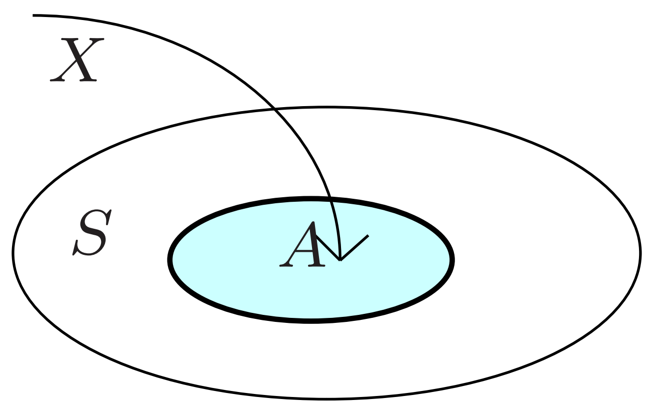
Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* “X fällt in A”

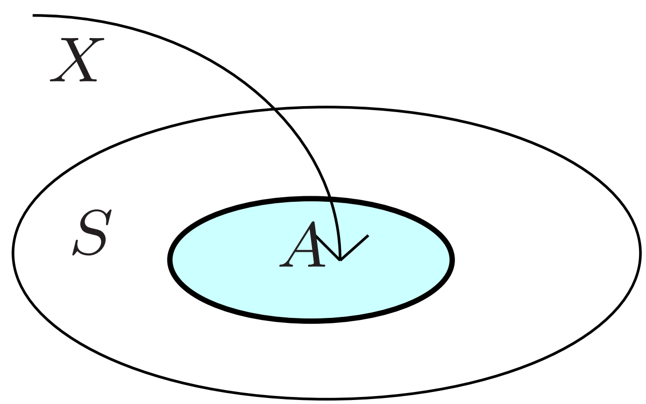
Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* “X fällt in A”

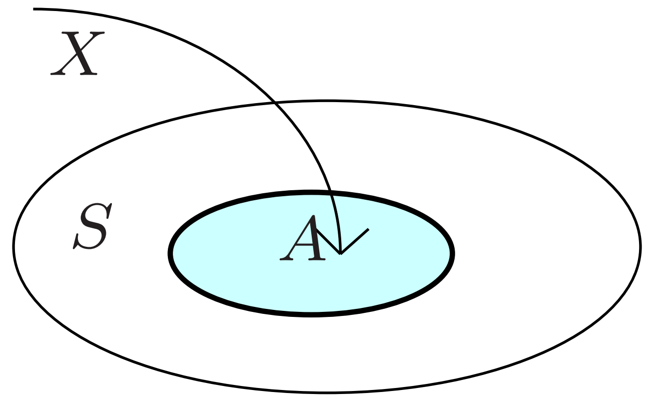


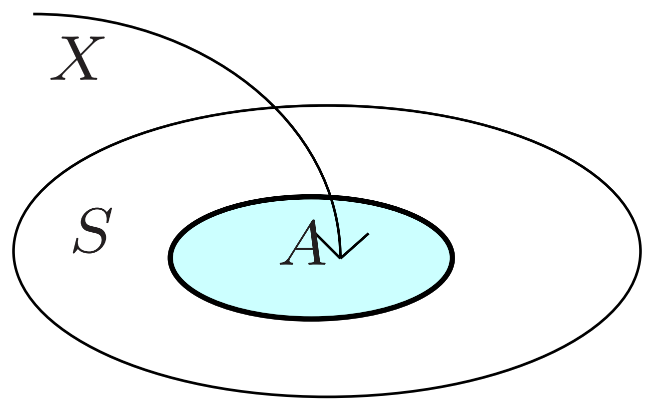
Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* “X fällt in A”



Dabei ist A eine bestimmte Teilmenge von S.

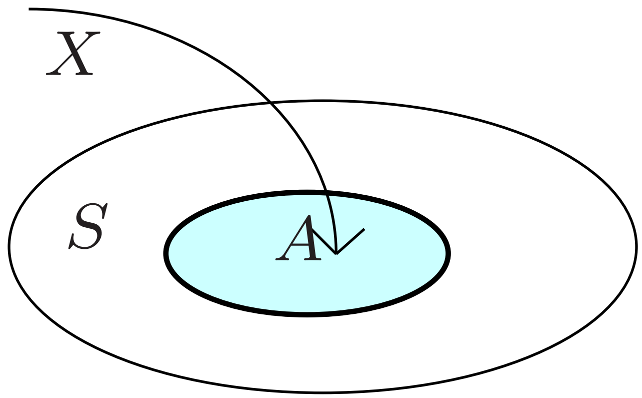

X
S
A



Ereignisse werden (wie Mengen)

in geschweiften Klammern notiert:

$$\{X \in A\}$$



Ereignisse werden (wie Mengen)

in geschweiften Klammern notiert:

$$\{X \in A\}$$

Lies:

"X fällt in A".

X *rein zufällig*

heißt:

alle Elemente von S haben die gleiche W'keit

gewählt zu werden.

X *rein zufällig*

heißt:

alle Elemente von S haben die gleiche W'keit

gewählt zu werden.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "X fällt in A"

$$\mathbf{P}(\{X \in A\}) = \frac{\#A}{\#S}.$$

X rein zufällig

heißt:

alle Elemente von S haben die gleiche W'keit

gewählt zu werden.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "X fällt in A"

$$\mathbf{P}(\{X \in A\}) = \frac{\#A}{\#S}.$$

Statt $\mathbf{P}(\{X \in A\})$ scheiben wir kurz:

$\mathbf{P}(X \in A)$.