Unabhängige Ereignisse

Marvin Sauerland

29. Mai 2011

Zu zeigen: Aus der Gültigkeit der Produktformel für die Wahrscheinlichkeiten dreier Ereignisse kann man nicht paarweise Unabhängigkeit und so Unabhängigkeit schlechthin folgern.

Sei Z eine auf $S := [1, 30] \cap \mathbb{N}$ uniform verteilte Zufallsvariable und seien die folgenden Teilmengen von S mit entsprechenden Mächtigkeiten gegeben:

$$A := \{n \in S : |T_n| = 2\} \text{ 'Die Menge der Primzahlen in } S\text{'}$$
$$B := \{n \in S : 2|(n-1)\} \text{ 'Die Menge der ungeraden Zahlen in } S\text{'}$$
$$C := \{n \in S : 5|n\} \text{ 'Die Menge der Vielfachen von 5 in } S\text{'.}$$

$$|A| = 10$$
$$|B| = 15$$
$$|C| = 6$$

Die folgenden Ereignisse haben dann trivialerweise die Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}(Z \in A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(Z \in B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(Z \in C) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $Z \in (A \cap B \cap C)$ gilt:

$$\mathbb{P}(Z \in (A \cap B \cap C)) = \frac{1}{30} = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5} = \mathbb{P}(Z \in A) \cdot \mathbb{P}(Z \in B) \cdot \mathbb{P}(Z \in C)$$

Offensichtlich gilt die Produktformel für den Schnitt aller drei Ereignisse. Dass dies auf die paarweisen Schnitte nicht zutrifft, wird schnell ersichtlich:

$$\mathbb{P}(Z \in (A \cap B)) = \frac{10-1}{30} = \frac{3}{10} \neq \frac{1}{6} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \mathbb{P}(Z \in A) \cdot \mathbb{P}(Z \in B)$$
$$\mathbb{P}(Z \in (A \cap C)) = \frac{1}{30} \neq \frac{1}{15} = \frac{1}{3 \cdot 5} = \mathbb{P}(Z \in A) \cdot \mathbb{P}(Z \in C)$$

Dass

$$\mathbb{P}(Z \in (B \cap C)) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \mathbb{P}(Z \in B) \cdot \mathbb{P}(Z \in C)$$

gilt, ist natürlich bedauerlich. Trotzdem wurde bereits gezeigt, dass die Implikation $\mathbb{P}(Z \in (A \cap B \cap C)) = \mathbb{P}(Z \in A) \cdot \mathbb{P}(Z \in B) \cdot \mathbb{P}(Z \in C) \Rightarrow \mathbb{P}(Z \in (A \cap B)) = \mathbb{P}(Z \in A) \cdot \mathbb{P}(Z \in B) \wedge \mathbb{P}(Z \in (A \cap C)) = \mathbb{P}(Z \in A) \cdot \mathbb{P}(Z \in C) \wedge \mathbb{P}(Z \in (B \cap C)) = \mathbb{P}(Z \in B) \cdot \mathbb{P}(Z \in C)$ tatsächlich nicht wahr ist. $\square$