Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse

Aufgabe: Finden Sie ein möglichst einfaches Beispiel mit drei Ereignissen $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3$, die trotz der Gleichheit $\mathbb{P}(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_3) = \mathbb{P}(\mathrm{E}_1) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{E}_2) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{E}_3)$ nicht unabhängig sind.

Ziehe einmal uniform aus der Menge $S \coloneqq \{001, 010, 100, 101, 110, 111\}$.

Die drei Ereignisse seien

$$E_1 \coloneqq \text{„an erster Stelle steht eine 1"}$$

$$E_2 \coloneqq \text{„an zweiter Stelle steht eine 1"}$$

$$E_3 \coloneqq \text{„an dritter Stelle steht eine 1"}$$

mit den Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{2}{3} \text{ und } \mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_3) = \frac{1}{2}$$

sowie

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2) \cdot \mathbb{P}(E_3).$$

Trotzdem gilt

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{3}, \ \mathbb{P}(E_1 \cap E_3) = \frac{1}{3} \text{ und } \mathbb{P}(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(E_2) \cdot \mathbb{P}(E_3),$$

womit die Ereignisse E_2 und E_3 nicht unabhängig sind.