Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 24. Juni 2011, zu Beginn der Vorlesung

33. Ist N geometrisch verteilt zum Parameter u und sind $Z_1, Z_2, \dots$ unabhängige geometrisch verteilte Zufallsvariable zum Parameter p, die unabhängig von N sind, dann ist $Y := \sum_{i=1}^{N} Z_i$ geometrisch verteilt zum Parameter pu.

a) Geben Sie eine Begründung der genannten Tatsache ganz ohne Rechnung, indem Sie das folgende Zufallsexperiment mit zwei Münzen betrachten:

(i) Wirf die erste Münze mehrfach. Immer wenn Kopf fällt, wirf auch die andere Münze.

(ii) Brich das Experiment ab, sobald die zweite Münze Kopf zeigt.

Betrachten Sie die Gesamtzahl Y der Würfe mit der ersten Münze.

b) Welche Identität ergibt sich, wenn Sie die Formel für die Zerlegung der Varianz auf diese Situation anwenden? (Hinweis: Die Varianz einer Geom(p)-verteilten Zufallsvariablen ist $\frac{1}{p}(\frac{1}{p} - 1)$.)

34. S Sei $\rho \in (-1, 1)$. Wir betrachten ein zweistufiges Zufallsexperiment: X_1 ist standard-normalverteilt, und gegeben $\{X_1 = a_1\}$ ist X_2 $\mathsf{N}(\rho \mathsf{a}_1, 1 - \rho^2)$-verteilt. (Damit ist (X_1, X_2) dann so verteilt wie $(Z_1, \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2)$, mit unabhängigen standard-normalverteilten Z_1, Z_2.)

a) Geben Sie die gemeinsame Dichte von X_1 und X_2 an.

b) Finden Sie - ohne Rechnung - die Verteilung von $X_1 + X_2$.

35. $U, U_1, U_2, \dots$ seien unabhängige, auf $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsvariable. Wir betrachten das Ereignis $E := \{U_1 \geq U, U_2 \geq U, U_3 < U, U_4 \geq U, U_5 < U, U_6 \geq U, U_7 \geq U\}$.
Berechnen Sie
(i) $\mathbf{P}(E)$, (ii) $\mathbf{P}(\{U_8 \geq U\}|E)$.

Hinweis: Für wieviele Permutationen π von $\{0, \dots, 8\}$ gilt, dass genau $\pi(3)$ und $\pi(5)$ kleiner als $\pi(0)$ sind?

36. S Wir betrachten das in der Vorlesung besprochenen zweistufige Experiment: In Stufe 1 werden n verschiedene Namen in r Listen einsortiert, ein Name kommt mit Wahrscheinlichkeit p_j in die Liste mit der Nummer j. In Stufe 2 wird, gegeben die Besetzung $Z = (Z_1, \dots, Z_r)$, rein zufällig einer der n Namen herausgegriffen und die Nummer J seiner Liste notiert. Finden Sie

(i) die Wahrscheinlichkeit von $\{J = 1\}$,
(ii) die bedingte Wahrscheinlichkeit von $\{Z_1 = k_1, \dots, Z_r = k_r\}$), gegeben $\{J = 1\}$,
(iii) den bedingten Erwartungswert von Z_1, gegeben $\{J = 1\}$.