Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 17. Juni 2011, zu Beginn der Vorlesung

29. $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängige, identisch verteilte Zuvallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Es bezeichne
$\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ das *Stichprobenmittel*, und $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\big((X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\big)$ die *Stichprobenvarianz* von $X_1, \ldots, X_n$.
Begründen Sie (für große n):
(i) Das zufällige Intervall $[\bar{X}_n - \frac{1.96}{\sqrt{n}}\sigma,\ \bar{X}_n + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\sigma]$ überdeckt die Zahl μ mit Wahrscheinlichkeit annähernd 0.95.
(ii) Mit Wahrscheinlichkeit annähernd 1 fällt $\bar{X}_n$ in die Nähe von μ (in dem Sinn, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$; man sagt: $\bar{X}_n$ *konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen* μ.)
(iii) Mit Wahrscheinlichkeit annähernd 1 fällt $\frac{1}{n}\big((X_1 - \mu)^2 + \cdots + (X_n - \mu)^2\big)$ in die Nähe von σ^2.
(iv) Mit Wahrscheinlichkeit annähernd 1 fällt $\hat{\sigma}_n/\sigma$ in die Nähe von 1.
(v) Das zufällige Intervall $I := [\bar{X} - \frac{1.96}{\sqrt{n}}\hat{\sigma}_n,\ \bar{X} + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\hat{\sigma}_n]$ überdeckt die Zahl μ mit Wahrscheinlichkeit annähernd 0.95. [1] (Hinweis: Betrachten Sie das Ereignis $\{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\hat{\sigma}_n \in [-1.96, 1.96]\}$ und argumentieren Sie im Geist von Übungsaufgabe 25 a.)

30. S a) X und Y seien binomialverteilt mit den Parametern (n_1, p) und (n_2, p), und X und Y seien unabhängig. Begründen Sie ohne Rechnung, dass $X + Y$ binomialverteilt ist. Was sind die Parameter?
b) X und Y seien unabhängig und Poissonverteilt mit Parametern α und β. Dann ist $X + Y$ Poisson$(\alpha + \beta)$-verteilt. Begründen Sie das (i) rechnerisch durch Summation über die Gewichte von $(j, k - j)$, $j = 0, \ldots, k$, und (ii) heuristisch, schnell und anschaulich durch Zurückspielen auf a) mit einem passenden Grenzübergang. (Dabei ist der Teil (ii) optional.)

31.S Z_1 und Z_2 seien Zufallsvariable mit Erwartungswert 0, Varianz 1 und Korrelationskoeffizient 1/2. Es sei $X := Z_1 - Z_2 + 1$, $Y := 3Z_1 + 2Z_2 - 2$.
Berechnen Sie
(i) die Varianzen von X und Y, (ii) die Kovarianz und den Korrelationskoeffizient von X und Y, (iii) diejenige affin lineare Funktion h, für die der erwartete quadratische Abstand von Y und $h(X)$ minimal wird.

32. (X_1, X_2) sei ein zufälliges Paar mit Werten in $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$ mit Verteilungsgewichten wie in der Tabelle angegeben.

	1	2	3
a	0	0.4	0.2
b	0.1	0.2	0.1

(i) Finden Sie Übergangswahrscheinlichkeiten $P(c, .)$, $c \in \{a, b\}$, so, dass (X_1, X_2) als zweistufiges Zufallsexperiment entsteht.
(ii) Veranschaulichen Sie dieses zweistufige Zufallsexperiment durch einen Baum der Tiefe 2.
(iii) Berechnen Sie die bedingte Erwartung und die bedingte Varianz von X_2 gegeben $X_1 = b$.

Die folgende **Extraufgabe** *ist freiwillig, und gedacht für Feinschmecker.* Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}[X_1] = 0, \mathbf{E}[X_1^2] = 1, \mathbf{E}[|X_1^3|] < \infty$. Es seien α_{ni}, $n = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, n$ reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^n \alpha_{ni}^2 = 1$ für alle $n = 1, 2, \ldots$. Ferner gelte $\sum_{i=1}^n |\alpha_{ni}|^3 \to 0$ für $n \to \infty$. Überprüfen Sie (mit passender Modifikation der in der Vorlesung vorgestellten Argumentationskette), dass für alle beschränkten $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit beschränkter 1., 2. und 3. Ableitung gilt:

$$\mathbf{E}[h(\alpha_{n1}X_1 + \ldots + \alpha_{nn}X_n)] \to \mathbf{E}[h(Z)]$$

für $n \to \infty$, wobei Z eine N(0,1)-verteilte Zufallsvariable ist.

[1] Man sagt auch: I ist ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für den Parameter μ.