Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 3. Juni 2011, zu Beginn der Vorlesung

21. S Ein Hotel hat 218 Betten. Wieviele Reservierungen durch eine Kongressleitung darf der Hotelmanager entgegennehmen, wenn erfahrungsgemäß eine Reservierung mit Wahrscheinlichkeit 0.2 anulliert wird? Die Hotelleitung nimmt dabei in Kauf, mit 2.5%-iger Wahrscheinlichkeit in Verlegenheit zu geraten.
Hinweise: (i) Für Bin(n, p)-verteiltes X mit nicht zu kleinem npq empfiehlt sich für ganzzahliges k die Normalapproximation
$\mathbf{P}(X \geq k) \approx \mathbf{P}\left(Z > (k - \frac{1}{2} - np)/\sqrt{npq}\right)$*, vgl. Buch S. 44.*
(ii) Es gilt bekanntermaßen: $\mathbf{P}(|Z| > 1.96) = 0.05$ *für N(0,1)-verteiltes Z.*

22. Z_1 und Z_2 seien unabhängig und $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt. Berechnen Sie $\mathbf{P}(Z_1^2 + Z_2^2 \geq a)$ und finden Sie die Dichte der Zufalsvariablen $Z_1^2 + Z_2^2$.

Sie dürfen dabei die folgende Identität verwenden:

$$\int\limits_{\{(x,y):\sqrt{x^2+y^2}\geq c\}} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = 2\pi \int_c^\infty e^{-r^2/2} r\,dr.$$

23 $X = (X_1, X_2)$ sei uniform verteilt auf $\{(-1,0),(1,0),\ (0,-1),\ (0,1)\}$. Zeigen Sie:
(i) X_1, X_2 sind unkorreliert, aber nicht unabhängig. (ii) $X_1 - X_2, X_1 + X_2$ sind unabhängig.

24. S X sei standard-exponentialverteilt, V sei uniform verteilt auf $\{+1,-1\}$ und unabhängig von X. Wir setzen $Y := X \cdot V$.

(i) Berechnen Sie $\mathbf{E}[Y]$ und $\mathbf{Var}[Y]$. (Sie dürfen dabei - ohne Beweis - die folgende Tatsache verwenden: Für zwei unabhängige reellwertige Zufallsvariable R_1, R_2, deren Erwartungswerte existieren, gilt $\mathbf{E}[R_1 R_2] = \mathbf{E}[R_1]\mathbf{E}[R_2]$.)

(ii) Berechnen Sie $\mathbf{P}(|Y| > b)$, $\mathbf{P}(Y > b)$ für $b \geq 0$, und begründen Sie, dass $\mathbf{P}(Y > b) = \mathbf{P}(Y < -b)$.

(iii) Finden und skizzieren Sie die Dichte von Y.