PROF. DR. A. WAKOLBINGER   Übung 5   SoSe 2011

Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

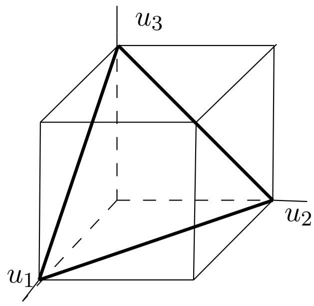
Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 27. Mai 2011, zu Beginn der Vorlesung

17. a) Gesucht ist $c := \mathbf{E}[X(X-1)(X-2)]$ für eine Bin(n,p)-verteilte Zufallsvariable X. Beim Mahl der Olympier argumentiert Kairos, der kahlköpfige Gott des Zufalls, so: “Denken wir an eine Population von n Nymphen, aus denen wir per p-Münzwurf ein Komitee der zufälligen Größe X wählen (du bist drin, du bist drin, du bist nicht drin ...) Dann ist $X(X-1)(X-2)$ doch die Anzahl der Möglichkeiten, aus dem Komitee eine Vorsitzende, eine erste und eine zweite stellvertretendene Vorsitzende zu wählen, und c ist der Erwartungswert dieser Anzahl. Wir können aber auch anders denken: Wir listen alle geordneten Tripel aus den n Nymphen auf und zählen davon die, die ins Komitee gewählt werden. Der Erwartungswert der Summe dieser Zählvariablen ist ....” Vervollständigen Sie den Gedankengang des Kairos! (Die Muse der Mathematik ist übrigens begeistert, und schenkt dem Kairos ein randvolles Glas Nektar ein.)
b) Raten (und berechnen) Sie $\mathbf{E}[X(X-1)(X-2)]$ für eine Pois(λ)-verteilte Zufallsvariable X.

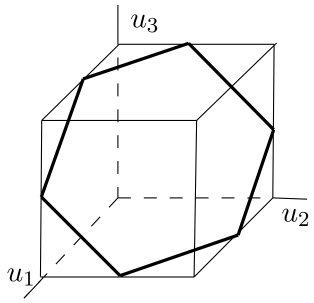
18. S. $P = (X,Y)$ sei ein uniform auf der Einheitskreisscheibe verteilter zufälliger Punkt, und R dessen Abstand vom Koordinatenursprung. Berechnen Sie
(i) die Verteilungsfunktion von R, (ii) die Dichte von R,
(iii) den Erwartungswert von R, (iv) die Varianz von R.

19. S. Es sei g eine natürliche Zahl, und $S := \{1, 2, \dots, g\}$.
a) X sei uniform verteilt auf S. Berechnen Sie $\mathbf{E}[X]$ und $\mathbf{Var}[X]$.
b) Für $n \le g$ seien $X_1, \dots, X_n$ rein zufällig *ohne Zurücklegen* aus S gezogen. Berechnen Sie die Varianz von $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

20. $U = (U_1, U_2, U_3)$ sei ein uniform aus dem Einheitswürfel $W := [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ gewählter Punkt. Es geht um die Dichte f der Zufallsvariablen $X := U_1 + U_2 + U_3$, und um deren Verteilungsfunktion F.
(i) $F(0) =?$
ii) $F(1) =?$ (Hinweis: $\Delta := \{(u_1,u_2,u_3) \in W : u_1 + u_2 + u_3 \le 1\}$ ist eine Pyramide mit Grundfäche 1/2 und Höhe ....)
iii) $F(3/2) =?$ iv) $F(2) =?$ v) $F(3) =?$
vi) $S_a := \{(u_1,u_2,u_3) \in W : u_1 + u_2 + u_3 = a\}$ ist für $a \in (0,1) \cup (2,3)$ eine Dreiecks- und für $a \in (1,2)$ eine Sechsecksfläche. Begründen Sie das anhand der angegebenen Skizze.
vii) Skizzieren Sie f. (Sie dürfen dabei verwenden, dass f eingeschränkt auf $[0,1]$, $[1,2]$ und $[2,3]$ jeweils ein quadratisches Polynom ist, symmetrisch um 3/2 ist und dort sein Maximum hat.)



Das Dreieck ist der Rand von S_1.



Das Sechseck ist der Rand von $S_{3/2}$.