Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 20. Mai 2011, zu Beginn der Vorlesung

13. Aus einer Urne mit r Kugeln werden mit Zurücklegen Kugeln gezogen, und zwar so lange, bis jede Kugel einmal gegriffen wurde. Sei X die Anzahl der nötigen Züge. Wie groß ist der Erwartungswert von X?

Hinweis: Man betrachte Zufallsvariable $1 = T_1 < T_2 < \cdots < T_r = X$, die „Erfolgsmomente“, zu denen man eine vorher noch nicht gegriffene, neue Kugel erwischt. Was ist die Verteilung und der Erwartungswert von $T_{i+1} - T_i$?

14.S a) Eine Menge M mit 18 Elementen ist in 6 Teilmengen (“Familien”) der Mächtigkeit 1, 3 Teilmengen der Mächtigkeit 2 und 2 Teilmengen der Mächtigkeit 3 partitioniert. Es wird rein zufällig ein Paar aus M herausgegriffen (d. h. zweimal ohne Zurücklegen gezogen). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dass die beiden gezogenen Elemente zu ein-und derselben Familie gehören. (Hinweis: Wieviele Paare gibt es in M? Wieviele Paare gibt es, die zu ein-und derselben Familie gehören?)

b) Eine Menge M mit $m = 18k$ Elementen ($k \in \mathbb{N}$) ist in $6k$ Teilmengen (“Familien”) der Mächtigkeit 1, $3k$ Teilmengen der Mächtigkeit 2 und $2k$ Teilmengen der Mächtigkeit 3 partitioniert. Es wird rein zufällig ein Paar aus M herausgegriffen (d. h. zweimal ohne Zurücklegen gezogen). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_m, dass die beiden gezogenen Elemente zu ein-und derselben Familie gehören.

c) (Kür, außer Konkurrenz) Wir wollen von einem “Erfolg” sprechen, wenn das gezogene Paar zur selben Familie gehört. Im Fall eines “Misserfolges” wird das beschriebene Experiment wiederholt (neues Spiel, neues Glück, wieder mit der genau so strukturierten Menge M). Wie wahrscheinlich ist es (für festes t), dass der Erfolg länger als $\lfloor tm \rfloor$ mal auf sich warten lässt? Betrachten Sie den Grenzwert $m \to \infty$ (und damit eine Näherung der gefragten Wahrscheinlichkeit für große m).

15. Eine Population bestehe aus m Individuen; das i-te Individuum hat die Größe y_i. Der *Populationsmittelwert* ist $\bar{y} := \frac{1}{m}(y_1 + \ldots + y_m)$. Es wird rein zufällig (ohne Zurücklegen) eine Stichprobe von n Individuen gezogen; $\bar{X}$ bezeichne das arithmetische Mittel der Größen der gezogenen Individuen (das “Stichprobenmittel”). Berechnen Sie $\mathbf{E}[\bar{X}]$.

16.S In einen Teig werden m Rosinen geknetet und dann n Brötchen geformt.

a) Begründen Sie die Annahme, dass die Anzahl der Rosinen in einem zufällig herausgegriffenen Brötchen poissonverteilt ist.

b) Wieviele Rosinen muss man vorsehen, damit mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit dieses Brötchen mindestens eine Rosine enthält?