# Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 13. Mai 2011, zu Beginn der Vorlesung

**9.S** Von 100 Kugeln sind 20 blau, 30 grün und 50 gelb gefärbt. 10 Kugeln werden rein zufällig nacheinander ohne Zurücklegen gezogen.

a) Welches der beiden Ereignisse ist wahrscheinlicher:
i) die erste gezogene Kugel ist blau
ii) die zehnte gezogene Kugel ist blau.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der gezogenen blauen Kugeln.

c) Welches der beiden Ereignisse ist wahrscheinlicher:
i) 2 der gezogenen Kugeln sind blau, 3 sind grün und 5 sind gelb,
ii) alle 10 gezogenen Kugeln sind gelb.

d) Begründen Sie ohne Rechnung die Identität

$$\sum_{(i,j,k)\in\mathbb{N}_0^3:\, i+j+k=10} \binom{20}{i}\binom{30}{j}\binom{50}{k} = \binom{100}{10}$$

**10.** $S_1$ und $S_2$ seien zwei endliche Mengen, $X := (X_1, X_2)$ sei eine $S_1 \times S_2$-wertige Zufallsvariable mit der Eigenschaft, dass $X_1$ uniform verteilt ist auf $S_1$ und $X_2$ uniform verteilt ist auf $S_2$.
a) Ist dadurch die Verteilung von $X$ bereits festgelegt?
b) Zeigen Sie: $(X_1, X_2)$ ist uniform verteilt auf $S_1 \times S_2$ genau dann, wenn für alle $B_1 \subset S_1$ und $B_2 \subset S_2$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in B_1 \times B_2) = \mathbf{P}(X_1 \in B_1) \cdot \mathbf{P}(X_2 \in B_2).$$

**11.S** $X := (X_1, \cdots, X_{20})$ sei eine rein zufällige Permutation der Zahlen $1, \ldots, 20$. Für $i \in \{2, \ldots, 19\}$ sagen wir: $X$ hat ein lokales Minimum bei $i$, falls $X_i = \min(X_{i-1}, X_i, X_{i+1})$.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X_2$ das Kleinste von $X_1, X_2$ und $X_3$?

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der lokalen Minima von $X$.

**12.** *(Aus: J. Pitman, Probability, 7th ed., Springer 1999.)* Suppose that counts $(N_1, \ldots, N_r)$ are the numbers of results in $r$ categories in $n$ repeated trials. So $(N_1, \ldots, N_r)$ has a multinomial distribution with parameters $n$ and $p_1, \ldots, p_r$. Let $1 \le i < j \le r$. Answer the following questions with an explanation, but no calculation.
a) What is the distribution of $N_i$? b) What is the distribution of $N_i + N_j$?
c) What is the joint distribution of $N_i$, $N_j$, and $n - N_i - N_j$?