Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 6. Mai 2011, zu Beginn der Vorlesung

5. a) Wieviele 0-1 Folgen der Länge $2n$ gibt es mit n Nullen und n Einsen?
b) Ein *gewöhnlicher Irrfahrer* auf $\mathbb{Z}$ setzt Schritte von $+1$ oder -1 nach Manier eines fairen Münzwurfs aneinander. Wie wahrscheinlich ist es, dass er, wenn er im Ursprung startet, nach $2n$ Schritten wieder im Ursprung ist? Approximieren Sie das Resultat mit Stirling.

6.S Ein Fehlstand (oder eine Inversion) in einer Permutation $a = (a(1), \dots, a(n))$ ist ein Paar $i < j$ mit $a(i) > a(j)$. Die Größe

$$h_j(a) := \#\{i < j : a(i) > a(j)\}\ , \quad j = 2, \dots, n$$

zählt alle Fehlstände, an denen j zusammen mit einem kleineren Partner beteiligt ist. Zeigen Sie, dass $h_j(X)$ für eine rein zufällige Permutation X uniform auf $\{0, 1, \dots, j-1\}$ verteilt ist. Dabei können Sie folgenden Weg beschreiten:

(i) Warum kann man aus der Anzahl der Fehlstände $h_n(a)$ den Wert $a(n)$ bestimmen, und aus dem Paar $h_{n-1}(a), h_n(a)$ das Paar $a(n-1), a(n)$? Wieso ist die Abbildung $h = (h_2, \dots, h_n)$ von der Menge S aller Permutationen in die Menge $S' = \{0,1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, n-1\}$ eine Bijektion?

(ii) Warum ist $h(X)$ uniform auf S' verteilt und $h_j(X)$ uniform auf $\{0, 1, \dots, j-1\}$?

7. $Z = (Z_1, Z_2)$ sei uniform verteilt auf dem Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt die “ zufällige Gleichung” $x^2 + Z_1 x + Z_2 = 0$
(i) zwei reelle Lösungen
(ii) genau eine Lösung ?

8.S $Z = (Z_1, \dots, Z_r)$ sei eine uniform verteilte Besetzung von r Plätzen mit n Objekten.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
(i) Platz 1 bleibt leer
(ii) keiner der Plätze bleibt leer
(iii) keiner der Plätze wird doppelt besetzt (d.h. “es kommt zu keinen Kollisionen”).

b) (Dieser Teil der Aufgabe ist Kür und außer Konkurrenz:) Ab welcher Größenordnung von $n = n(r)$ kommt es für große r mit merklicher Wahrscheinlichkeit zu Kollisionen? Finden Sie dazu ein möglichst großes α, sodass für $r \to \infty$ und $n(r) = o(r^\alpha)$ gilt

$$\mathbf{P}_{r,n(r)}(\text{ es kommt zu Kollisionen }) \to 0.$$