

Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 1. Juli 2011, zu Beginn der Vorlesung

37. S Es sei (Z_1, Z_2, \dots) ein Münzwurf mit uniform auf $[0, 1]$ verteiltem Parameter, und es sei $T := \min\{n : Z_n = 1\}$ der Zeitpunkt des ersten Erfolgs.

- a) Finden Sie $\mathbf{P}(Z_n = 1 | Z_1 = \dots Z_{n-1} = 0)$, $n = 2, 3, \dots$
- b) Berechnen Sie die Verteilungsgewichte und den Erwartungswert von T .

38. Unter einer *Nordostwanderung à la Pólya* wollen wir eine Markovkette auf \mathbb{N}^2 mit Übergangswahrscheinlichkeiten $P((k, \ell), (k + 1, \ell)) = \frac{k}{k+\ell}$ und $P((k, \ell), (k, \ell + 1)) = \frac{\ell}{k+\ell}$ verstehen. Demgegenüber sei eine *gewöhnliche Nordost-Irrfahrt* eine Markovkette auf \mathbb{N}^2 mit Übergangswahrscheinlichkeiten $P((k, \ell), (k + 1, \ell)) = P((k, \ell), (k, \ell + 1)) = 1/2$.

Es sei V eine Nordostwanderung à la Pólya und W eine gewöhnliche Nordost-Irrfahrt, jeweils mit Start in $(1, 1)$.

Beschreiben Sie

- (i) die Verteilungen von V_{100} und W_{100}
- (ii) die bedingte Verteilung von (V_1, \dots, V_{99}) gegeben $\{V_{100} = (41, 61)\}$
- (iii) die bedingte Verteilung von (W_1, \dots, W_{99}) gegeben $\{W_{100} = (41, 61)\}$

39. S Wir betrachten eine zufällige Folge aus den Buchstaben A, B und C , bei denen jeder der drei Buchstaben jeweils unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ erscheint.

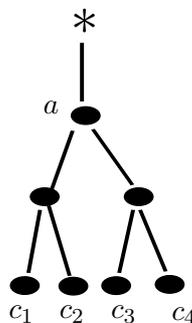
Es geht um die Fragen

- (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint das Muster ABC , ohne dass vorher das Muster BC erscheint?
- (ii) Wieviele Buchstaben braucht es in Erwartung, bis erstmals das Muster BC erscheint? (Zur Verdeutlichung: Kommt gleich das Muster ABC , dann hat es in diesem Fall 3 Buchstaben gebraucht.)

Hier ist die Aufgabe für Sie: Übersetzen Sie diese Fragen in die Welt einer Markovkette mit möglichst wenigen Zuständen. Stellen Sie die Gleichungssysteme für die Treffwahrscheinlichkeiten und erwarteten Treffzeiten auf, die zu den Antworten auf die beiden Fragen führen. Das Lösen der beiden Gleichungssysteme ist dann Kür und nicht Pflicht

40 Wir betrachten eine gewöhnliche Irrfahrt X auf dem skizzierten Graphen. Bei dieser erfolgt der nächste Schritt jeweils zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarknoten.

(i) Es bezeichne $h(k)$ die Tiefe des Knotens k ; z.B. ist $h(*) = 0$, $h(a) = 1$, $h(b_1) = 3$. Ist $h(X)$ eine Markovkette, und wenn ja, mit welcher Übergangsmatrix?



(ii) Wie wahrscheinlich ist es, bei Start im Knoten a , die Menge der *Blätter* (das ist die Menge $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$) eher zu treffen als die Wurzel $*$?