Vorlesung 7a

Unabhängigkeit

Wir erinnern an die Definition der

Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen

(Buch S. 61):

Zufallsvariable X_1, X_2 heißen *(stochastisch) unabhängig*, falls für alle Ereignisse $\{X_1 \in A_1\}$, $\{X_2 \in A_2\}$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

("Produktformel")

Erwartungswert unabhängiger Produkte

Satz:

X_1, X_2 unabhängige ZV'e mit Zielbereichen S_1, S_2,

h_1, h_2 Abbildungen von S_1 bzw. S_2 in die reellen Zahlen.

Haben $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$ endlichen Erwartungswert,

so folgt

$$\mathbf{E}\Big[h_1(X_1)h_2(X_2)\Big] = \mathbf{E}\Big[h_1(X_1)\Big]\mathbf{E}\Big[h_2(X_2)\Big] \,.$$

Insbesondere sind (im Fall endlicher Varianzen)

$h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$ unkorreliert.

Beweis für diskrete ZV'e:

$$\sum_{a_1,a_2} h_1(a_1)h_2(a_2)\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1,a_2} h_1(a_1)\mathbf{P}(X_1 = a_1)h_2(a_2)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1} h_1(a_1)\mathbf{P}(X_1 = a_1) \sum_{a_2} h_2(a_2)\mathbf{P}(X_2 = a_2)\,. \quad \square$$

Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit Zielbereichen $S_1, \ldots, S_n$

heißen

(stochastisch) *unabhängig*,

falls für alle Ereignisse $\{X_i \in A_i\}$ folgende Produktformel gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in A_n) \ .$$

Für diskrete Zufallsvariable ist die Unabhängigkeit

geichbedeutend mit der

Produktform der Verteilungsgewichte:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n) \; = \; \rho_1(a_1) \cdots \rho_n(a_n)$$

Die $\rho_i(a_i)$ sind dann die Verteilungsgewichte von X_i.

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariaben.

Definition:

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ sind unabhängig

$:\Longleftrightarrow$ für jedes n sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig.

Beispiele:

Fortgesetzter Münzwurf, fortgesetztes Würfeln

Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$ heißen unabhängig

$:\Longleftrightarrow I_{E_1}, \ldots, I_{E_n}$ sind unabhängig.

Satz:

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \mathbf{P}(E_{i_1}) \cdots \mathbf{P}(E_{i_k})$$

für beliebige $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Einen eleganten Beweis führt man mit einem Faktorisierungsargument für Indikatorvariable (ähnlich wie bei der Einschluss-Ausschlussformel in Vorlesung 6)

vgl. Buch Seite 67.

$$
\begin{aligned}
I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_{i+1}^c\cap\cdots\cap E_n^c} &= I_{E_1\cap\cdots\cap E_i}(1 - I_{E_{i+1}})\cdots(1 - I_{E_n}) \\
&= I_{E_1\cap\cdots\cap E_i} - \sum_{j>i} I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_j} + \sum_{k>j>i} I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_j\cap E_k} \mp \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_{i+1}^c\cap\cdots\cap E_n^c}] &= \mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i}(1-I_{E_{i+1}})\cdots(1-I_{E_n})] \\
&= \mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i}] - \sum_{j>i}\mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_j}] + \sum_{k>j>i}\mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_j\cap E_k}] \mp \cdots
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_{i+1}^c\cap\cdots\cap E_n^c}] = \mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i}(1-I_{E_{i+1}})\cdots(1-I_{E_n})]$$
$$= \mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i}] - \sum_{j>i}\mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_j}] + \sum_{k>j>i}\mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_j\cap E_k}] \mp \cdots$$

Mit den vorausgesetzen Produktformeln folgt

$$\mathbf{P}(E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_{i+1}^c\cap\cdots\cap E_n^c)$$
$$= \mathbf{P}(E_1)\cdots\mathbf{P}(E_i)\Big(1-\sum_{j>i}\mathbf{P}(E_j) + \sum_{k>j>i}\mathbf{P}(E_j)\mathbf{P}(E_k)\mp\cdots\Big)$$

$$\mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_{i+1}^c\cap\cdots\cap E_n^c}] = \mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i}(1-I_{E_{i+1}})\cdots(1-I_{E_n})]$$

$$= \mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i}] - \sum_{j>i}\mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_j}] + \sum_{k>j>i}\mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_j\cap E_k}] \mp \cdots$$

Mit den vorausgesetzen Produktformeln folgt

$$\mathbf{P}(E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_{i+1}^c\cap\cdots\cap E_n^c)$$

$$= \mathbf{P}(E_1)\cdots\mathbf{P}(E_i)\Big(1-\sum_{j>i}\mathbf{P}(E_j) + \sum_{k>j>i}\mathbf{P}(E_j)\mathbf{P}(E_k)\mp\cdots\Big)$$

$$= \mathbf{P}(E_1)\cdots\mathbf{P}(E_i)(1-\mathbf{P}(E_{i+1}))\cdots(1-\mathbf{P}(E_n))$$

$$\mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_{i+1}^c\cap\cdots\cap E_n^c}] = \mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i}(1 - I_{E_{i+1}})\cdots(1 - I_{E_n})]$$

$$= \mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i}] - \sum_{j>i}\mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_j}] + \sum_{k>j>i}\mathbf{E}[I_{E_1\cap\cdots\cap E_i\cap E_j\cap E_k}] \mp \cdots$$

Mit den vorausgesetzen Produktformeln folgt

$$\mathbf{P}(E_1 \cap \cdots \cap E_i \cap E_{i+1}^c \cap \cdots \cap E_n^c)$$

$$= \mathbf{P}(E_1)\cdots\mathbf{P}(E_i)\Big(1 - \sum_{j>i}\mathbf{P}(E_j) + \sum_{k>j>i}\mathbf{P}(E_j)\mathbf{P}(E_k) \mp \cdots\Big)$$

$$= \mathbf{P}(E_1)\cdots\mathbf{P}(E_i)(1 - \mathbf{P}(E_{i+1}))\cdots(1 - \mathbf{P}(E_n))$$

$$= \mathbf{P}(E_1)\cdots\mathbf{P}(E_i)\mathbf{P}(E_{i+1}^c)\cdots\mathbf{P}(E_n^c)\,. \qquad \square$$

Fazit:

Die Unahängigkeit zweier Ereignisse E_1, E_2

ist äquivalent zur Produktformel

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)$$

Und die Unabhängigkeit dreier Ereignisse E_1, E_2, E_3 ist äquivalent dazu,

dass *beide* der folgenden Bedingungen a) und b) erfüllt sind:

a) $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)$,

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_3),$$

$$\mathbf{P}(E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3).$$

b) $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$

a) oder b) allein reichen i.a. nicht für die Unabhängigkeit:

Beispiel:

Z_1, Z_2, Z_3 sei ein $\frac{1}{2}$-Münzwurf,

$E_1 := \{Z_1 = 1\}$, $E_2 := \{Z_2 = 1\}$, $E_3 := \{Z_1 = Z_2\}$

E_1, E_2, E_3 sind paarweise unabhängig,

aber nicht unabhängig.

Aufgabe:

Finden Sie ein möglichst einfaches Beispiel

mit 3 Ereignissen E_1, E_2, E_3,

die trotz der Gleichheit

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

nicht unabhängig sind.

Gewisse Teilaspekte von abhängigen Zufallsvariablen

können unabhängig sein:

Beispiel (vgl. Buch S. 65):

(X, Y) seien rein zufällige “Zwei aus $\{1, 2, \ldots, 32\}$”.

Offenbar sind X und Y nicht unabhängig,

wohl aber die Ereignisse

$E_1 := \{X$ ist durch 8 teilbar $\}$ und $E_2 := \{17 \leq Y \leq 24\}$.

Denn

$$\mathbf{P}(E_1) = \tfrac{1}{8}\,, \mathbf{P}(E_2) = \tfrac{1}{4}\,, \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \tfrac{7\cdot 1+8\cdot 3}{32\cdot 31} = \tfrac{1}{32}.$$

Ein Beispiel für indirekte Abhängigkeiten:

(vgl. Buch S. 68)

(X, Y) sei ein p-Münzwurf, U sei uniform verteilt auf $\{0, 1\}$,

X, Y, U seien unabhängig.

$$\mathbf{P}(X = U) = p\frac{1}{2} + q\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{analog:} \quad \mathbf{P}(Y = U) = \frac{1}{2}$$

Ein Beispiel für indirekte Abhängigkeiten:

(vgl. Buch S. 68)

(X, Y) sei ein p-Münzwurf, U sei uniform verteilt auf $\{0, 1\}$,

X, Y, U seien unabhängig.

$$\mathbf{P}(X = U) = p\frac{1}{2} + q\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{analog: } \mathbf{P}(Y = U) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(X = U, Y = U) = (p^2 + q^2)\frac{1}{2}$$

$$p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = 1 - 2pq \geq \tfrac{1}{2},$$

mit "=" genau dann wenn $p = \frac{1}{2}$.

Ein Beispiel für indirekte Abhängigkeiten:

(vgl. Buch S. 68)

(X, Y) sei ein p-Münzwurf, U sei uniform verteilt auf $\{0, 1\}$,

X, Y, U seien unabhängig.

$$\mathbf{P}(X = U) = p\frac{1}{2} + q\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{analog:} \ \ \mathbf{P}(Y = U) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(X = U, Y = U) = (p^2 + q^2)\frac{1}{2}$$

$$p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = 1 - 2pq \geq \tfrac{1}{2},$$

mit “=” genau dann wenn $p = \frac{1}{2}$.

Für $p \neq \frac{1}{2}$ sind $I_{\{X=U\}}$ und $I_{\{Y=U\}}$ nicht unabhängig!

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten

Satz

$X_1, \ldots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig,

und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i$, $\;i = 1, \ldots, n$.

(ii) $(X_1, \ldots, X_n)$ hat die Dichte

$$f(a_1, \ldots, a_n)\, da_1 \ldots da_n := f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \ldots da_n$$

Beispiel: Multivariate Standard-Normalverteilung.

Sei $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$. Dann gilt:

$Z_1, \dots, Z_n$ sind unabhängig und N(0, 1)-verteilt

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|a|^2}{2}\Big)\, da\,, \quad a \in \mathbb{R}^n\,,$$

mit $|a|^2 := a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

Z heißt dann *standard-normalverteilt auf* $\mathbb{R}^n$.

Analog zum Fall $n = 2$ (vgl. Folien der Vorlesung 5b) gilt:

Ist $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^n$
und sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ reelle Zahlen mit $\tau_1^2 + \cdots + \tau_n^2 = 1$,
dann ist $Y := \tau_1 Z_1 + \cdots + \tau_n Z_n$ $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt.

(Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + \cdots + Z_n \vec{e}_n$
zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \cdots + \tau_n \vec{e}_n$.)

Insbesondere ergibt sich:

$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}} \quad \text{ist } \mathrm{N}(0,1)\text{-verteilt.}$$