

# Vorlesung 7b

Der Zentrale Grenzwertsatz:

Ein Beweis

## Zentraler Grenzwertsatz

Die standardisierte Summe von unabhängigen,  
identisch verteilten  $\mathbb{R}$ -wertigen Zufallsvariablen  
mit endlicher Varianz  
konvergiert in Verteilung  
gegen eine standard-normalverteilte Zufallsvariable.

Formal:

Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert  $\mu$  und endlicher Varianz  $\sigma^2 > 0$ . Dann gilt für alle  $c < d \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in [c, d]\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z \in [c, d]).$$

Dabei ist  $Z$  standard-normalverteilt.

$X_1, X_2, \dots$  seien identisch verteilte reellwertige Zufallsvariable mit endlicher Varianz.

Ohne Einschränkung können wir annehmen:

$$\mathbf{E}[X_i] = 0, \quad \mathbf{Var}X_i = 1.$$

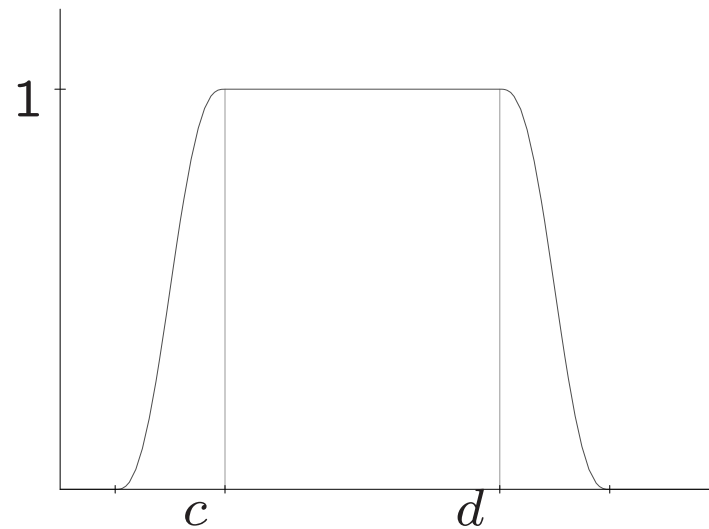
(Denn sonst gehen wir einfach zu den standardisierten Zufallsvariablen  $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$  über.)

Die Behauptung ist dann:

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{[c,d]}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\mathbf{1}_{[c,d]}(Z)]$$

mit standard-normalverteiltem  $Z$ .

Weil man Indikatorfunktionen  $\mathbf{1}_{[c,d]}$  durch “glatte” Funktionen  $h$  approximieren kann, reicht es (wie man zeigen kann, Details siehe Buch S. 79), diese Konvergenz nur für solche  $h$  zu beweisen.



Lemma.

Sei  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dreimal stetig differenzierbar  
und seien  $h'$ ,  $h''$  und  $h'''$  beschränkt. Dann gilt

$$\mathbf{E}\left[h\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{E}[h(Z)]$$

## Beweisskizze: \*

Die Hauptidee besteht darin, eine Folge von unabhängigen standard-normalverteilten Zufallsvariablen  $(Z_1, Z_2, \dots)$  ins Spiel zu bringen, die zusammen mit  $(X_1, X_2, \dots)$  ein zufälliges Paar von Folgen bilden.

Dabei seien alle  $Z_1, Z_2, \dots, X_1, X_2, \dots$  unabhängig.

Wir wissen schon, dass gilt:

$$\mathbf{E}[h(Z)] = \mathbf{E}\left[h\left(\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

\*Wir folgen einem im Klassiker "Probability" von Leo Breiman (SIAM 1992) angegebenen Beweis.



Außerdem ergibt sich  
mit der Linearität des Erwartungswertes:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left[h\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}\right)\right] - \mathbf{E}\left[h\left(\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ &= \mathbf{E}\left[h\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}\right) - h\left(\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Es reicht also zu zeigen, dass **letzteres**  
für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert.

Eine clevere Idee ist es jetzt, die Differenz als  
Teleskopsumme darzustellen:

$$\begin{aligned} & h\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\right) - h\left(\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( h\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{i-1} + \color{red}{X_i} + Z_{i+1} + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}\right) \right. \\ & \quad \left. - h\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{i-1} + \color{red}{Z_i} + Z_{i+1} + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}\right) \right) \end{aligned}$$

Taylorentwicklung ergibt:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \frac{X_i - Z_i}{\sqrt{n}} h' \left( \frac{X_1 + \dots + X_{i-1} + Z_{i+1} + \dots + Z_n}{\sqrt{n}} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2 - Z_i^2}{2n} h'' \left( \frac{X_1 + \dots + X_{i-1} + Z_{i+1} + \dots + Z_n}{\sqrt{n}} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i^3}{6n^{3/2}} h'''(Y_i) - \frac{Z_i^3}{6n^{3/2}} h'''(\tilde{Y}_i) \right) \end{aligned}$$

mit passenden Zwischenstellen  $Y_i, \tilde{Y}_i$ .

Wir nehmen hier der Einfachheit halber an:

$$\mathbf{E}[|X_1|^3] < \infty.$$

(Der Fall ohne diese Zusatzbedingung  
ist im Buch S. 78 abgehandelt.)

Ist  $C$  eine obere Schranke von  $|h'''|$ , so folgt

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E} \left[ h \left( \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \right) - h \left( \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}} \right) \right] \right| \\ & \leq n \frac{1}{6n^{3/2}} (\mathbf{E}[|X_1|^3] + \mathbf{E}[|Z_1|^3]) C \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

denn die Erw. werte der ersten beiden Summen sind Null

wegen  $\mathbf{E}[X_1] = \mathbf{E}[Z_1] = 0$  und  $\mathbf{E}[X_1^2] = \mathbf{E}[Z_1^2] = 1$ ,

zusammen mit der Unabhängigkeit der  $X_i, Z_i$

und der Produktformel

für die Erwartungswerte unabhängiger Zufallsvariabler.  $\square$

## Bemerkung

Die Aussage aus dem Lemma

$$\mathbf{E}\left[h\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[h(Z)]$$

überträgt sich auf alle Funktionen  $h$ , die sich (ähnlich wie dort die Funktionen  $1_{[c,d]}$ ) durch “glatte” Funktionen approximieren lassen.

Ein Beispiel ist die Funktion  $a \mapsto a^+ := \max(0, a)$  :

Für unabhängige, identisch verteilte  $X_1, X_2, \dots$  mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 und  $N(0, 1)$ -verteiltes  $Z$  gilt:

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n}{\sqrt{n}}\right)^+\right] \rightarrow \mathbf{E}[Z^+]$$

Wählen wir  $X_1, X_2, \dots$  als Poissonverteilt zum Parameter 1,  
 so ist (vgl. Buch Seite 71)

$X_1 + \dots + X_n$  Poissonverteilt zum Parameter  $n$ ,  
 und folglich

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ \left( \frac{X_1 + \dots + X_n - n}{\sqrt{n}} \right)^+ \right] &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k - n) e^{-n} \frac{n^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{n^k}{(k-1)!} - \frac{n^{k+1}}{k!} \right) \\ &= \frac{e^{-n} n^{n+1}}{\sqrt{n} n!}. \end{aligned}$$



Andererseits gilt:

$$\mathbf{E}[Z^+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-z^2/2}]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Insgesamt haben wir gefunden

$$\frac{e^{-n} n^{n+1}}{\sqrt{n} n!} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

und damit eine Herleitung der Stirling-Formel  
aus dem Zentralen Grenzwertsatz gewonnen.  $\square$

Hier ist die (im ZGS präzisierte) Botschaft der Stunde:

Summen (und Mittelwerte) von vielen unabhängigen,  
identisch verteilten ZV mit endlicher Varianz  
sind annähernd normalverteilt.

Diese Aussage bleibt übrigens auch  
unter schwächeren Bedingungen bestehen,  
sowohl was die Unabhängigkeit,  
als auch was die identische Verteiltheit betrifft.

Als Ausklang und Ausblick ist hier der

### **Satz von Lindeberg-Feller:**

Für jedes  $n$  seien  $X_{n,m}$ ,  $1 \leq m \leq n$ , unabhängige ZV'e mit

$$\mathbf{E}X_{n,m} = 0$$

und

$$\sum_{m=1}^n \mathbf{E}X_{n,m}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2 > 0$$

Für alle  $\varepsilon > 0$  gelte  $\sum_{m=1}^n \mathbf{E}[X_{n,m}^2 I_{\{|X_{n,m}| > \varepsilon\}}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Dann konvergiert  $X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$  für  $n \rightarrow \infty$   
in Verteilung gegen eine  $N(0, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable.