

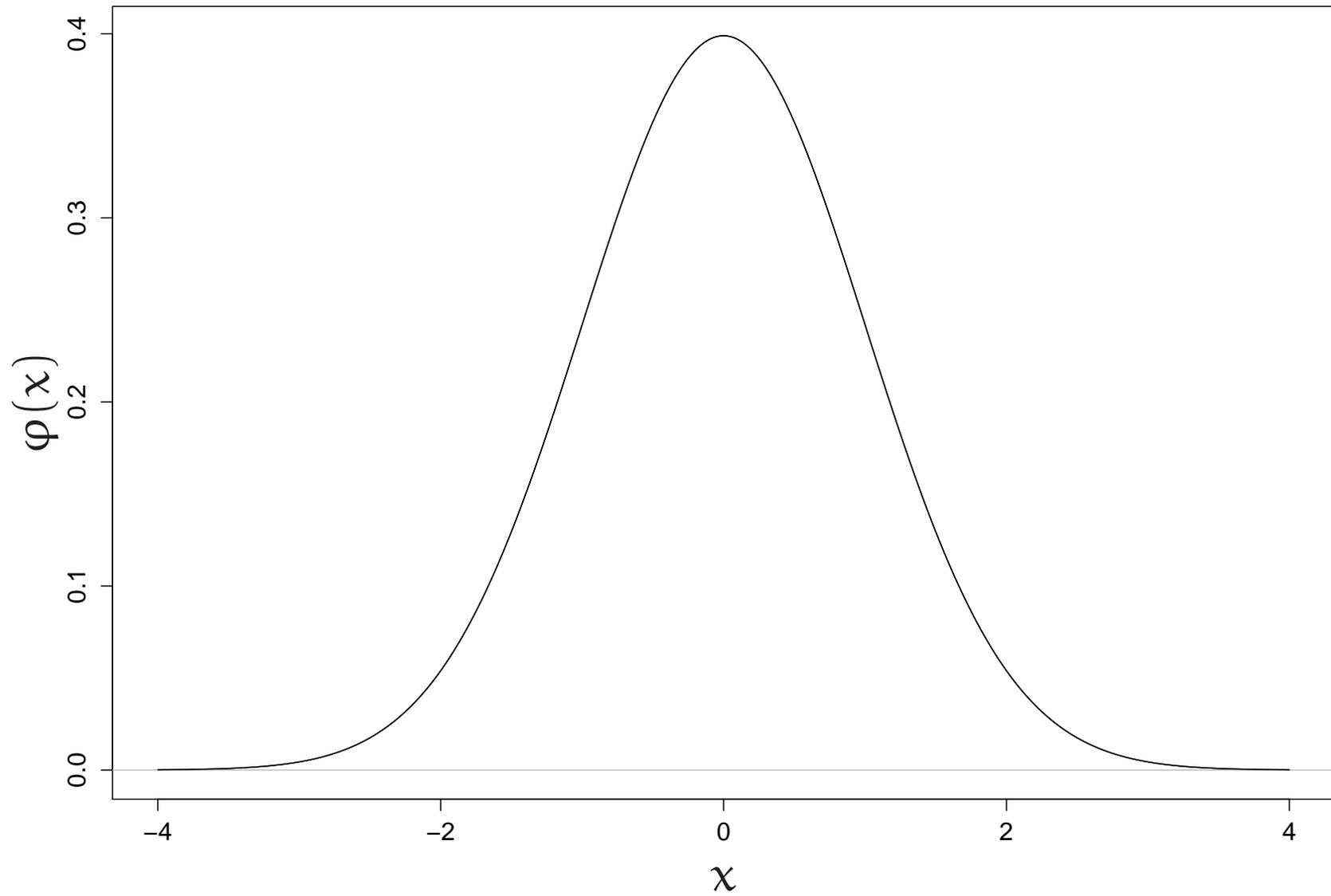
Vorlesung 7b (Ergänzung)

Der Zentrale Grenzwertsatz

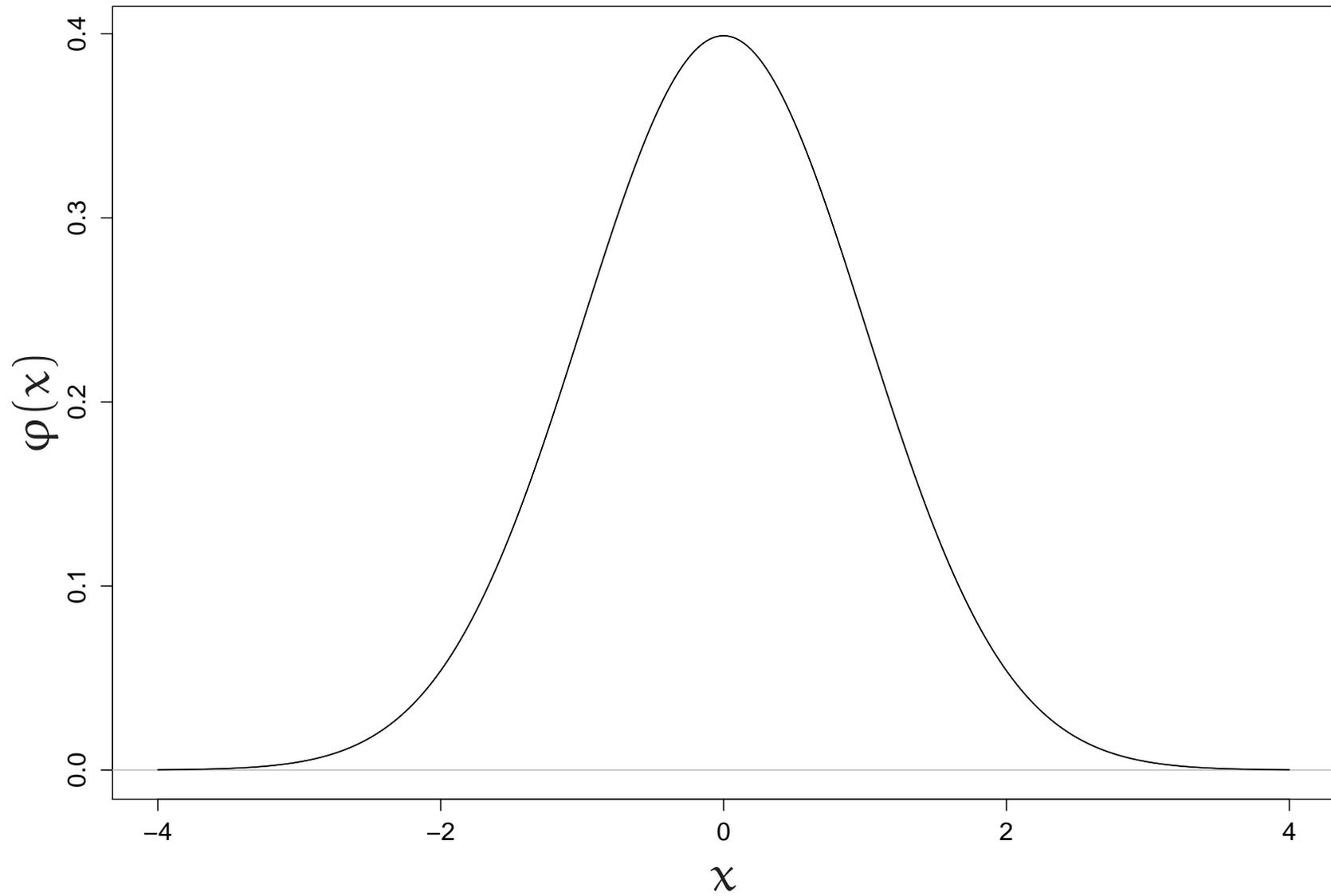
als Erlebnis

Die Normalverteilung

Dichte φ der Standardnormalverteilung



Die Gaußsche Glocke



Die Standardnormalverteilung

Die Standardnormalverteilung

Dichte:

Die Standardnormalverteilung

Dichte:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Die Standardnormalverteilung

Dichte:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

Die Standardnormalverteilung

Dichte:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx$$

Die Standardnormalverteilung

Dichte:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx$$

Z standardnormalverteilt:

Die Standardnormalverteilung

Dichte:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} dx$$

Z standardnormalverteilt:

$$\mathbf{P}(Z \leq a) = \Phi(a)$$

Die Standardnormalverteilung

$$\mathbf{EZ = 0} \quad \sigma_Z = 1$$

Die Standardnormalverteilung

$$\mathbf{EZ = 0} \quad \sigma_Z = 1$$

Die allgemeine Normalverteilung

$$N = \mu + \tau Z$$

Die Standardnormalverteilung

$$\mathbf{EZ} = 0 \quad \sigma_Z = 1$$

Die allgemeine Normalverteilung

$$\mathbf{N} = \mu + \tau Z$$

$$\mathbf{EN} = \mu \quad \sigma_N = \tau$$

Die Standardnormalverteilung

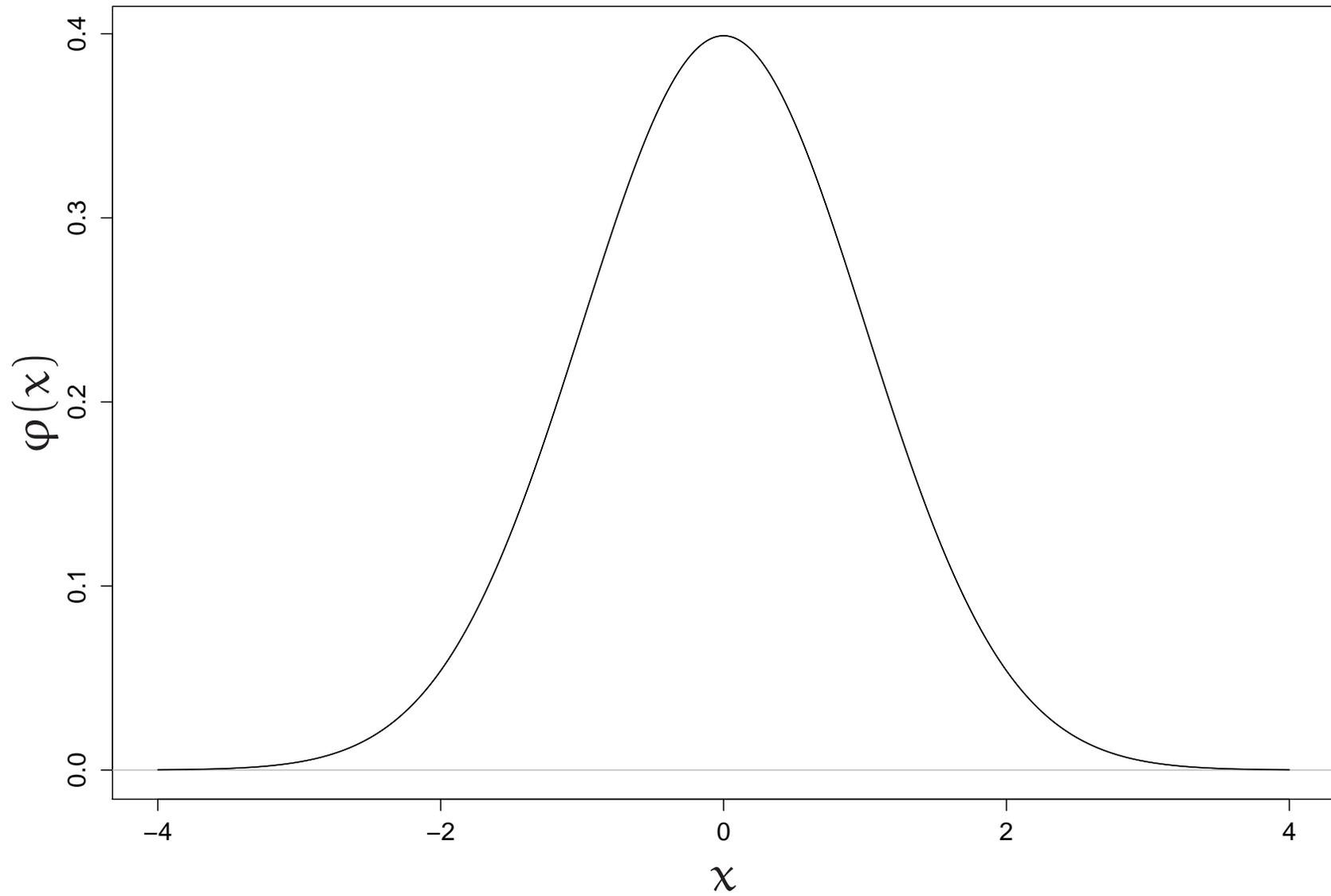
$$\mathbf{EZ} = 0 \quad \sigma_Z = 1$$

Die allgemeine Normalverteilung

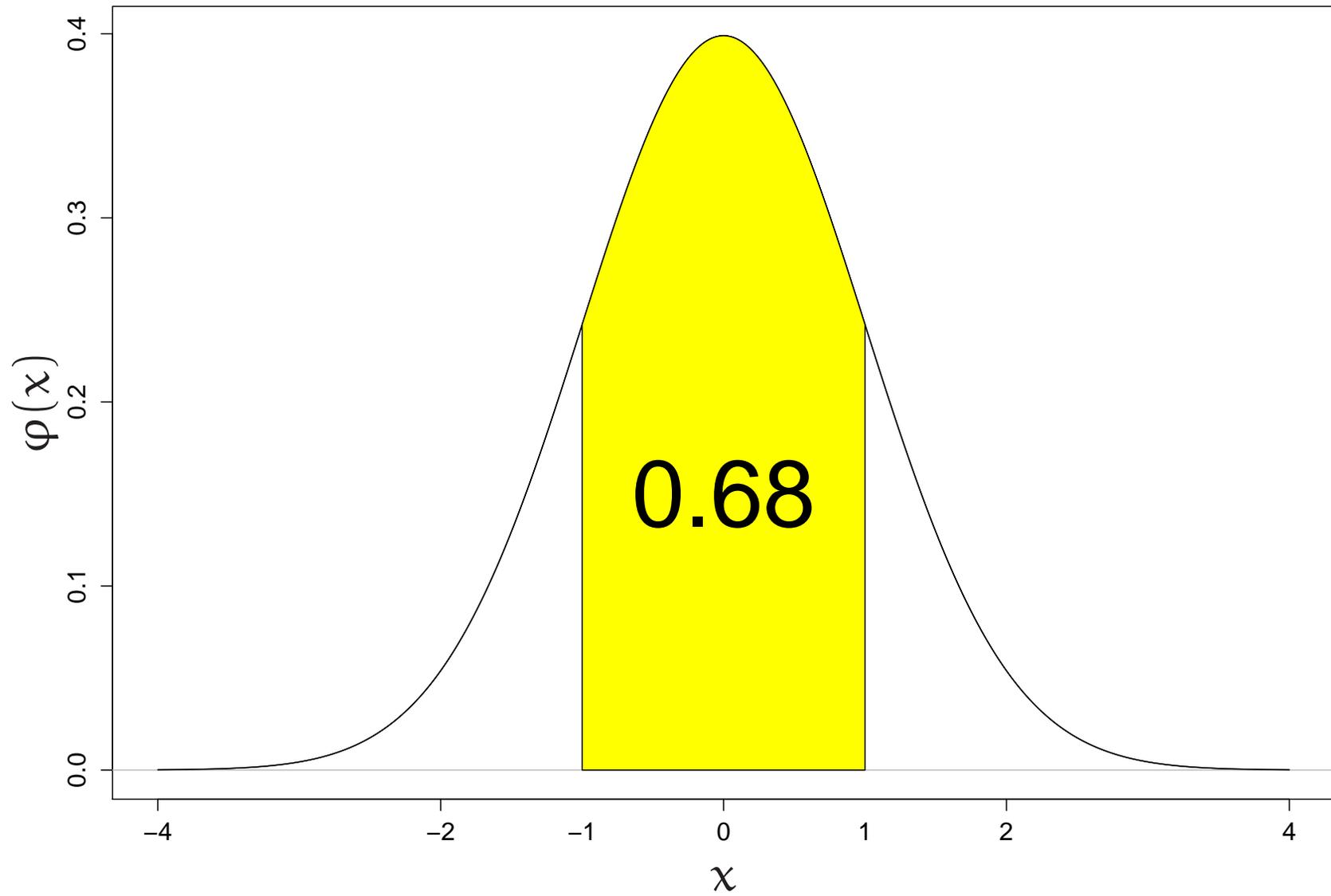
$$\mathbf{N} = \mu + \tau Z$$

$$\mathbf{EN} = \mu \quad \sigma_N = \tau$$

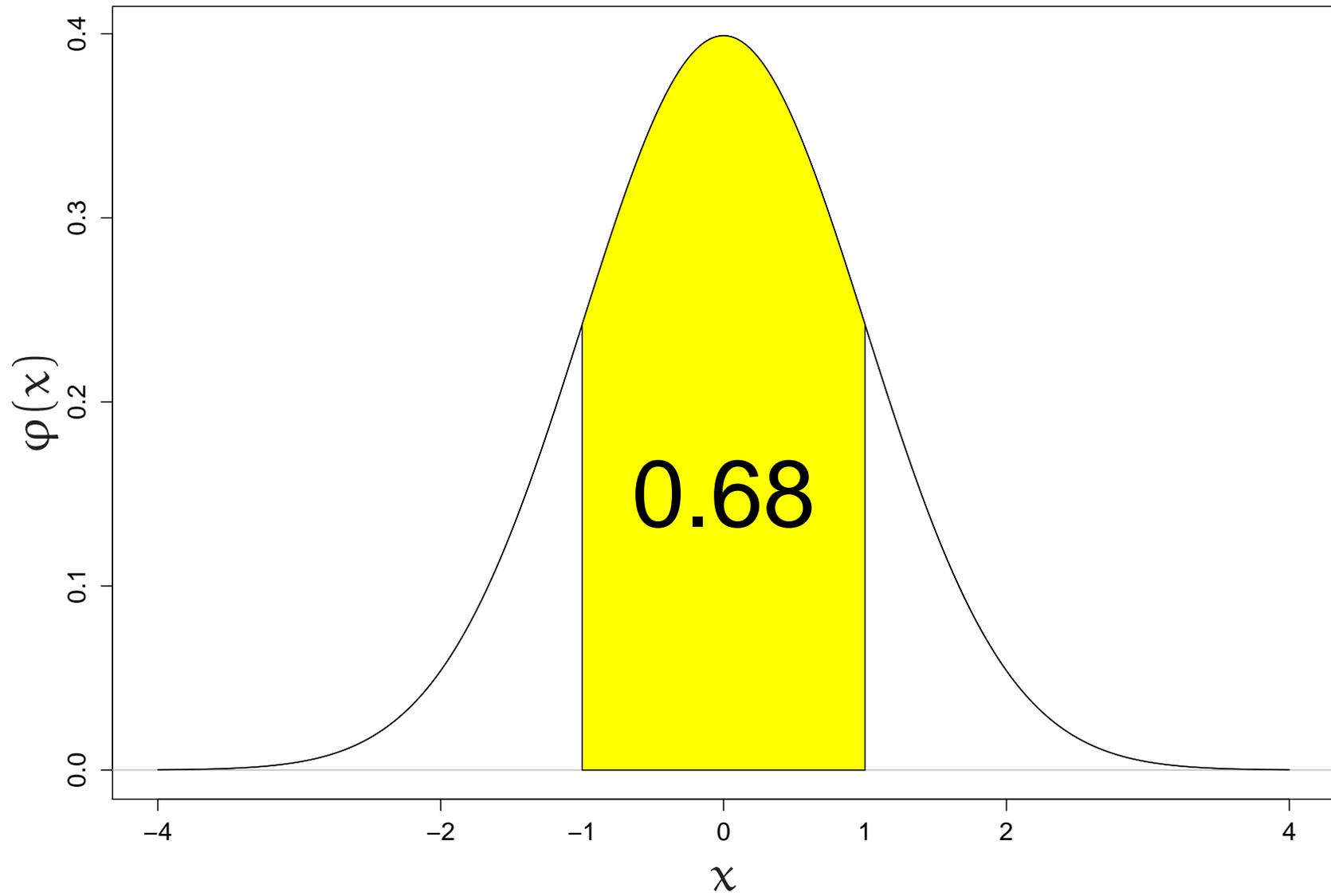
Dichte φ der Standardnormalverteilung



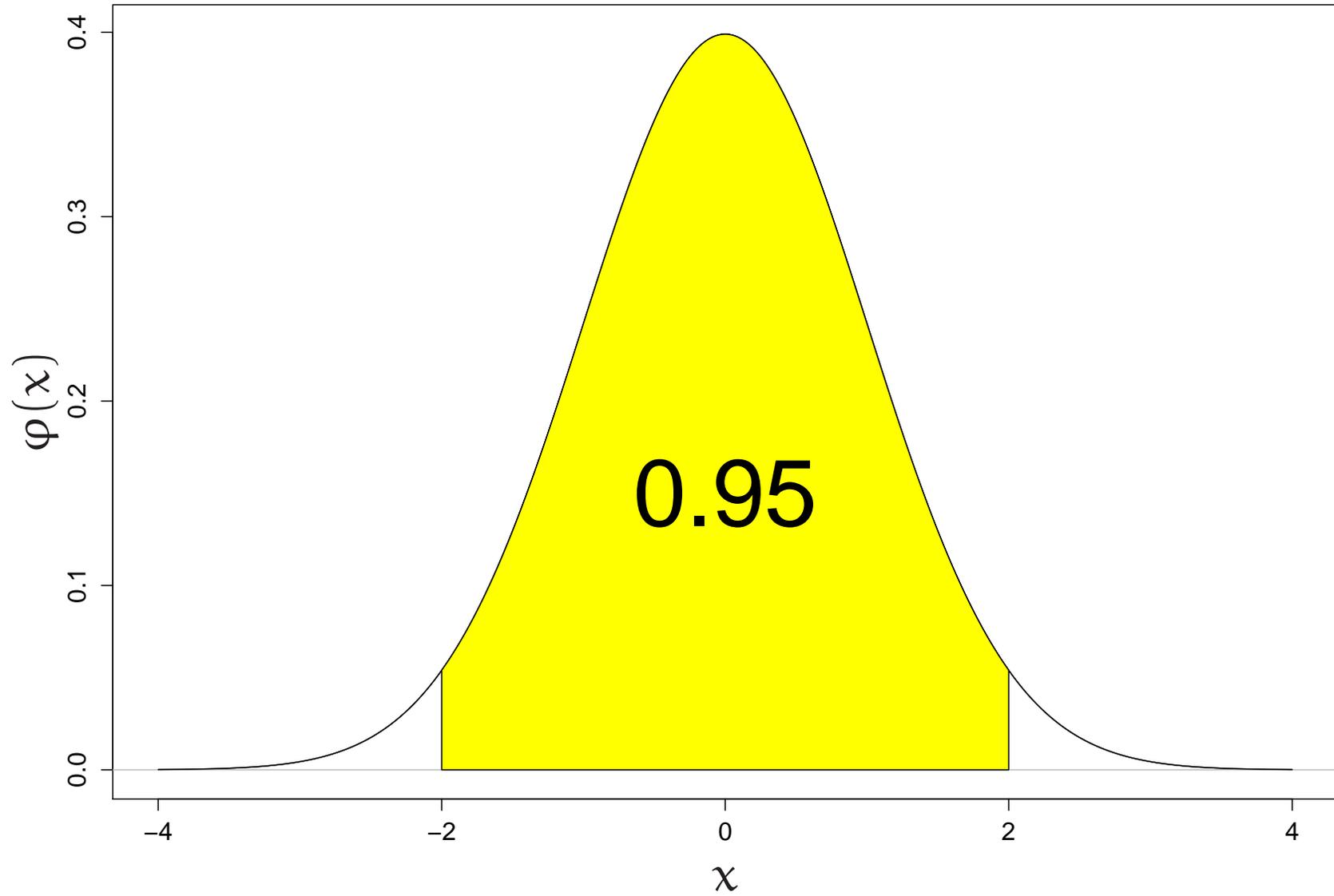
$$\mathbf{P}(|Z| < 1) \approx 0.68$$



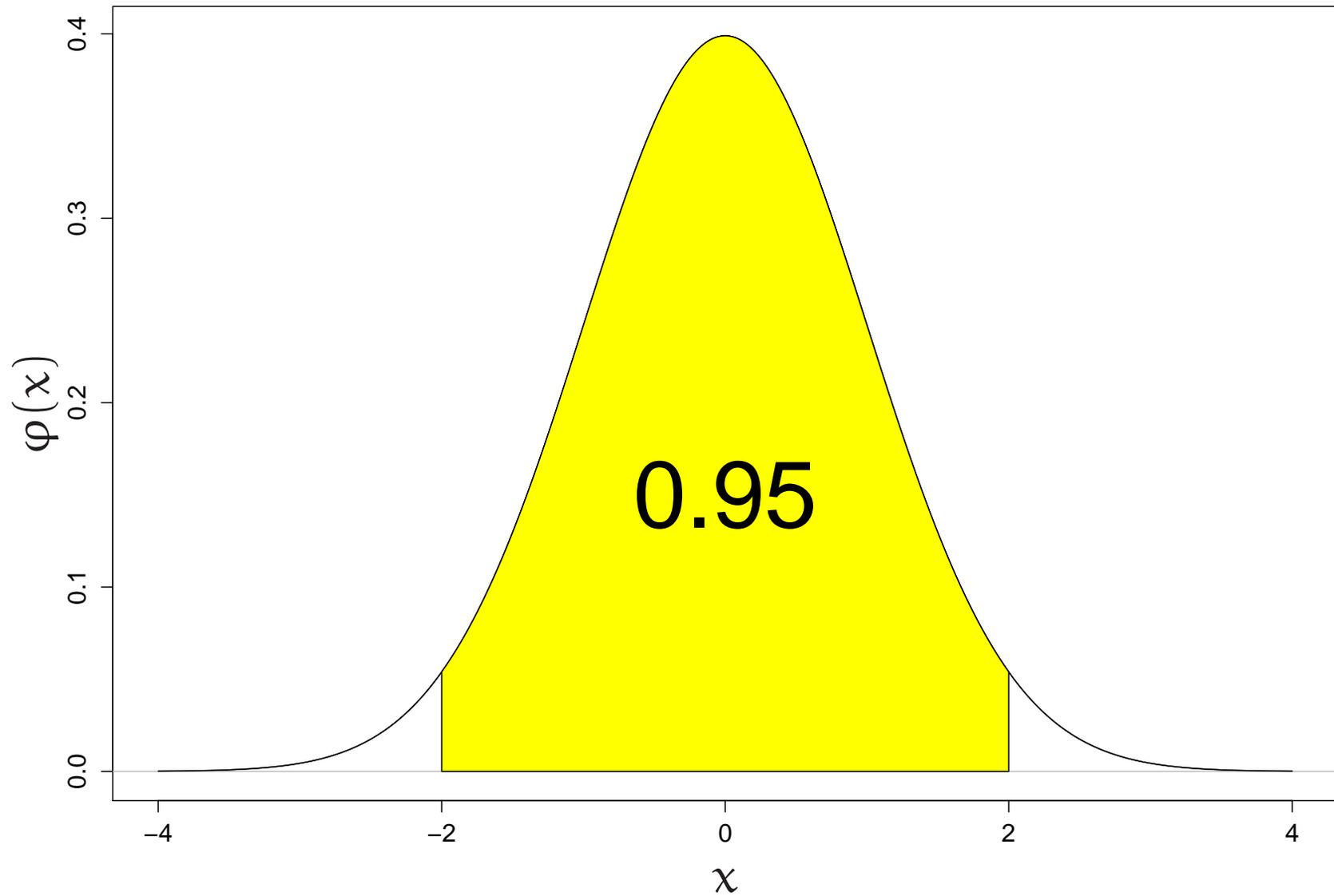
$$\Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.68$$



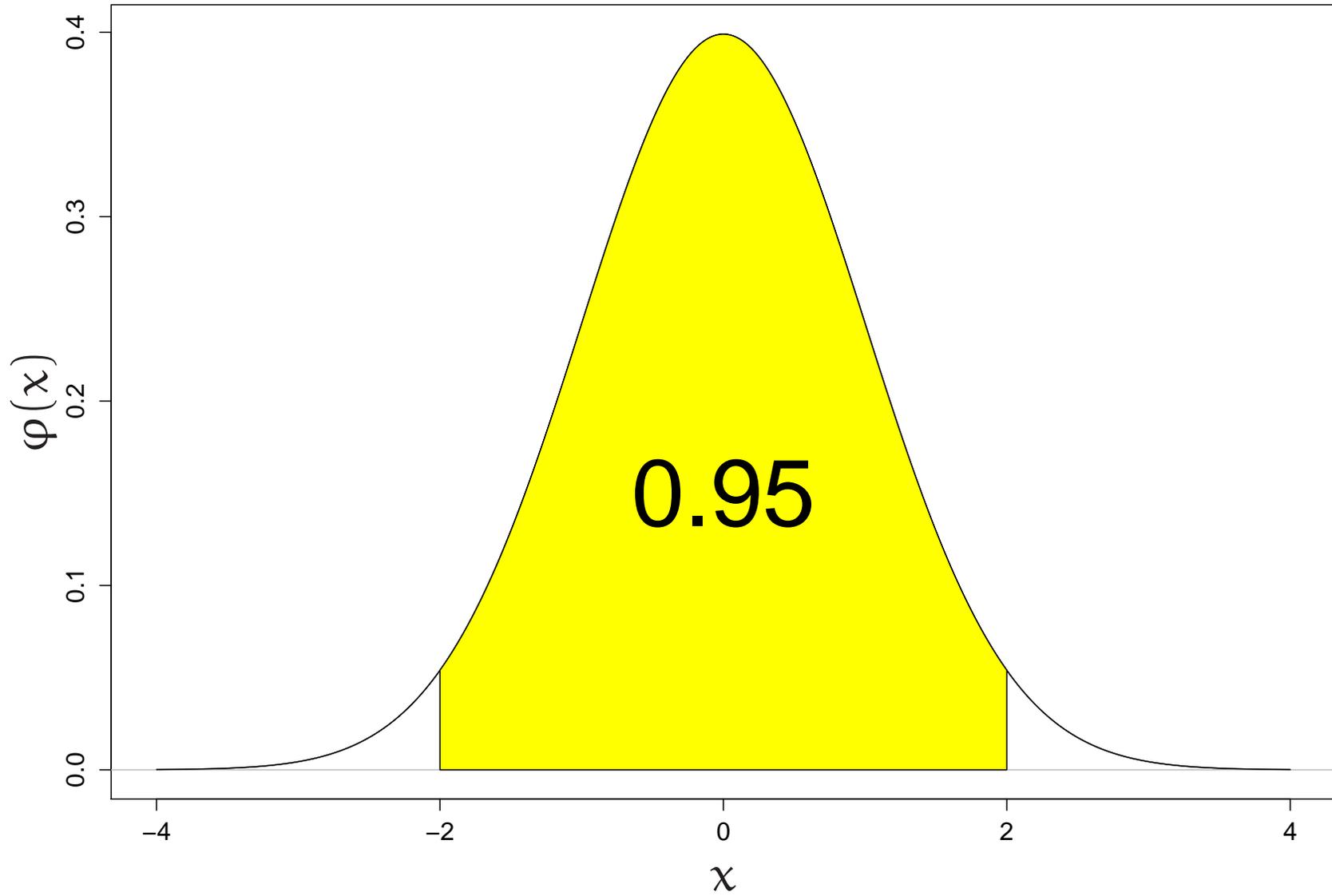
$$\mathbf{P}(|Z| < 2) \approx 0.95$$



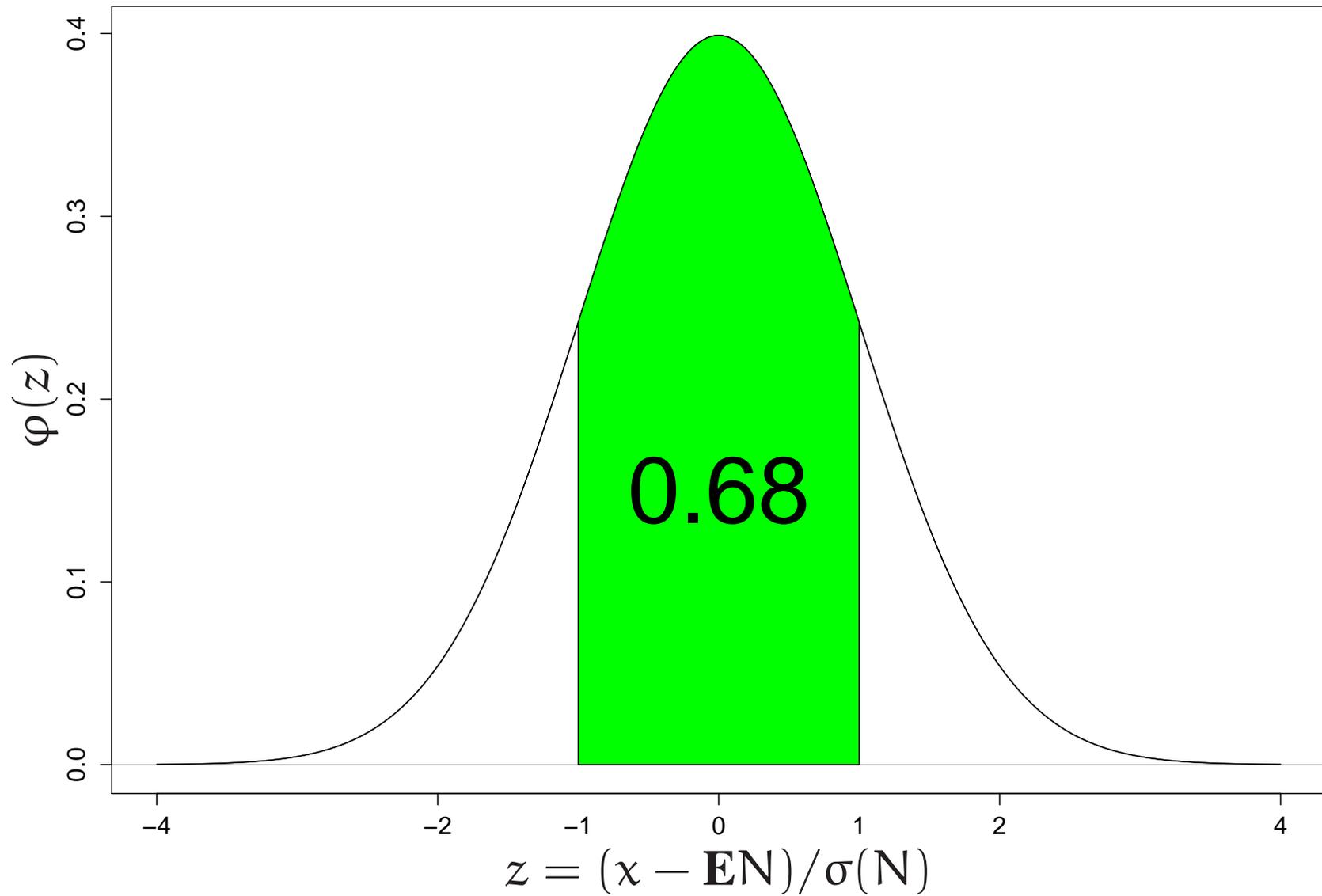
Und für allgemeine normalverteilte Zufallsgrößen N ?



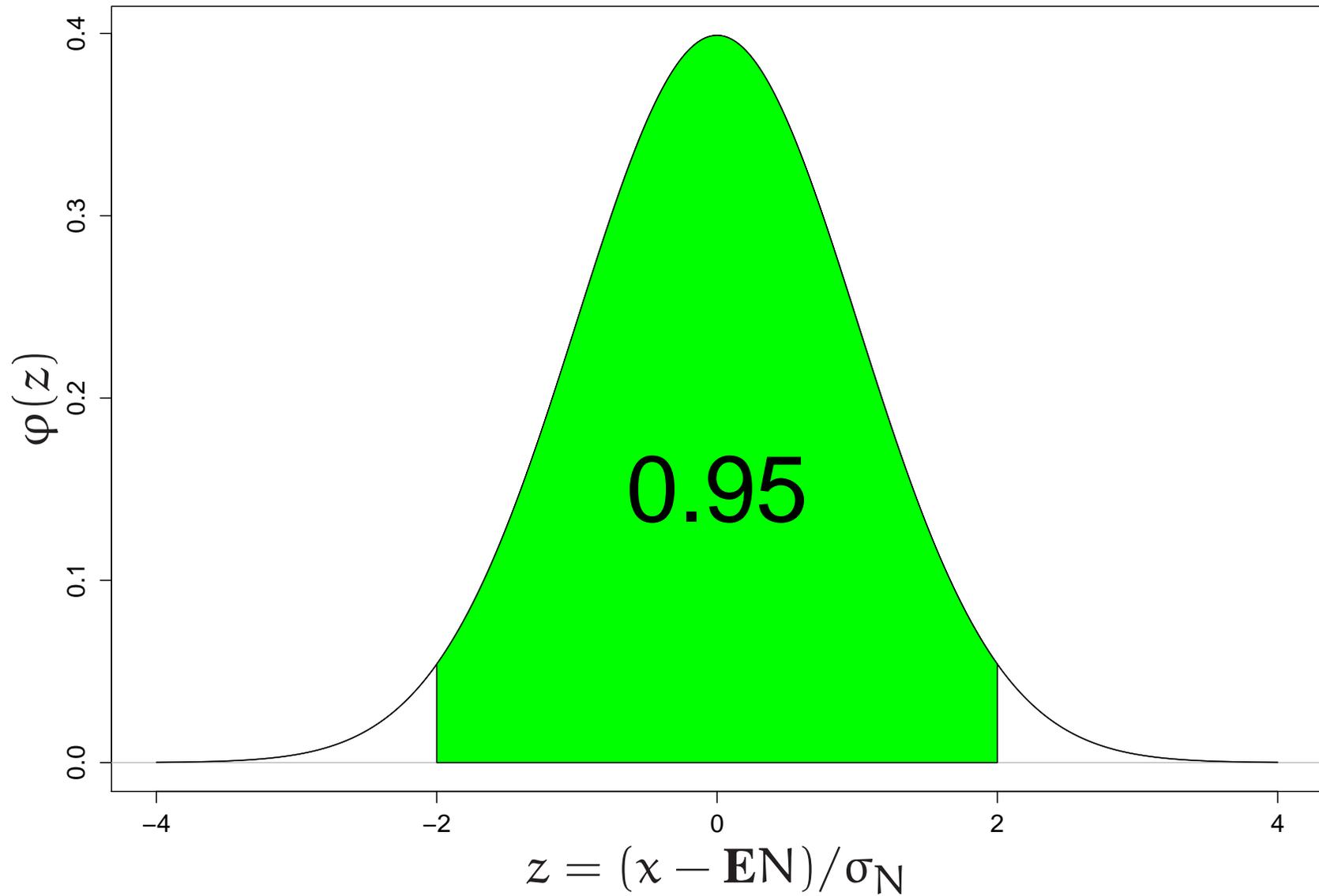
Dasselbe in grün.



$$\mathbf{P}(|N - \mathbf{E}N| < \sigma_N) \approx 0.68$$



$$\mathbf{P}(|\mathbf{N} - \mathbf{EN}| < 2\sigma_{\mathbf{N}}) \approx 0.95$$



Der
Zentrale
Grenzwertsatz

Die Summe
von vielen kleinen,
unabhängigen Summanden

Die Summe
von vielen kleinen,
unabhängigen Summanden
ist annähernd
normalverteilt.

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

Seien X_1, X_2, \dots

unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen.

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

Seien X_1, X_2, \dots

unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen.

Sei

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

Seien X_1, X_2, \dots

unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen.

Sei

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

und

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n}.$$

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

Seien X_1, X_2, \dots

unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen.

Sei

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

und

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n}.$$

$$(\mathbf{E}Z_n = 0 \quad \sigma_{Z_n} = 1.)$$

Dann gilt:

Z_n

ist

asymptotisch

standardnormalverteilt.

Dann gilt:

Z_n

ist

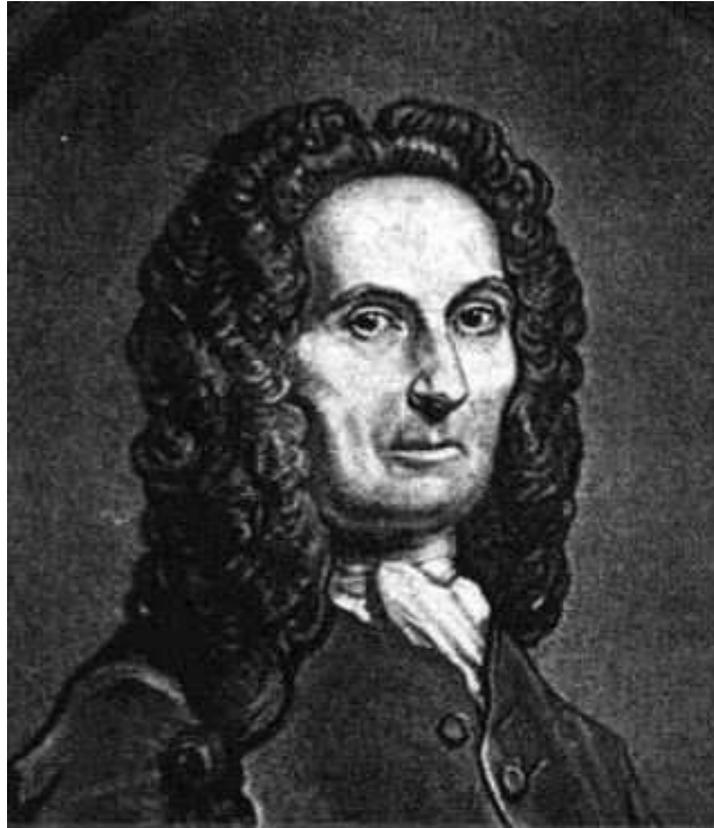
asymptotisch
standardnormalverteilt.

Das heißt:

$$\mathbf{P}(Z_n \leq a) \rightarrow \Phi(a).$$

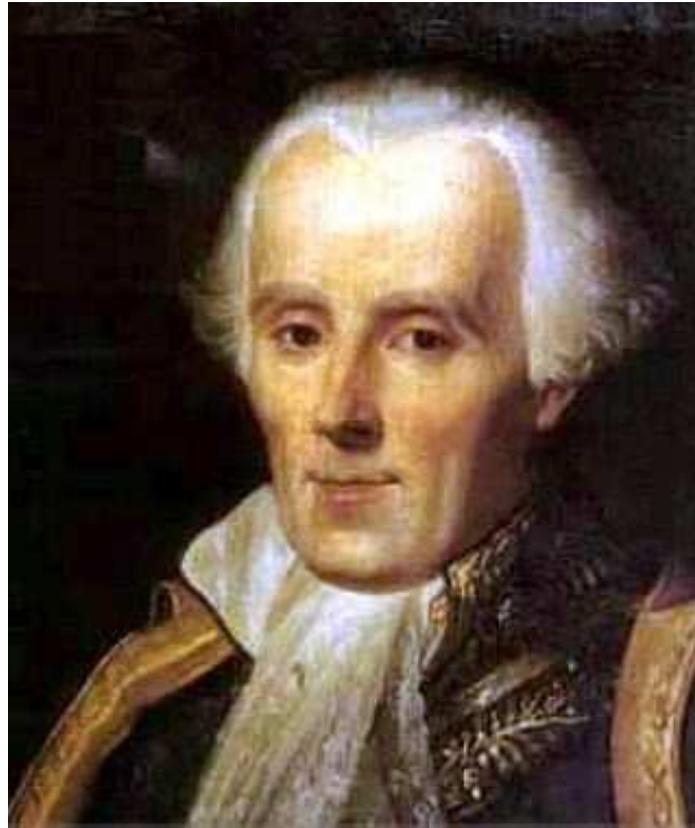
Geschichte
des
Zentralen
Grenzwertsatzes

Abraham de Moivre



Der faire Münzwurf (1733)

Pierre-Simon Laplace



Allgemeine binomiale Zufallsgrößen (1812)

Pafnuty Lvovich Chebyshev



$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad (1846)$$

Andrei Andreyevich Markov



Allgemeiner zentraler Grenzwertsatz

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov



Noch allgemeiner (1906)

Nehmen wir an,
diese Herren hätten sich
auf ihre vielen anderen Interessen
beschränkt.

Nehmen wir an,
diese Herren hätten sich
auf ihre vielen anderen Interessen
beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Nehmen wir an,
diese Herren hätten sich
auf ihre vielen anderen Interessen
beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Nehmen wir an,
diese Herren hätten sich
auf ihre vielen anderen Interessen
beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Könnten wir ihn entdecken?

Nehmen wir an,
diese Herren hätten sich
auf ihre vielen anderen Interessen
beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Könnten wir ihn entdecken?

Wie kämen wir auf φ ?

Nehmen wir an,
diese Herren hätten sich
auf ihre vielen anderen Interessen
beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Könnten wir ihn entdecken?

Wie kämen wir auf φ ?

Warum gerade $e^{-x^2/2}$?

BEISPIEL

BEISPIEL

Rundungsfehler

bei

Addition

In Wirklichkeit

$\pi =$

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105...

In Wirklichkeit

$$\pi =$$

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105...

Im Rechner

In Wirklichkeit

$$\pi =$$

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105...

Im Rechner

$$\pi \leftarrow 3.14159265358979$$

MODELL

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$a = a^{[R]} + \varepsilon X \quad \varepsilon = 10^{-15}$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$a = a^{[R]} + \varepsilon X \quad \varepsilon = 10^{-15}$$

X uniformverteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$a = a^{[R]} + \varepsilon X \quad \varepsilon = 10^{-15}$$

X uniformverteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_{i=1}^n a_i = ?$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$a = a^{[R]} + \varepsilon X \quad \varepsilon = 10^{-15}$$

X uniformverteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_{i=1}^n a_i = ?$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^{[R]} + \varepsilon \sum_{i=1}^n X_i$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$a = a^{[R]} + \varepsilon X \quad \varepsilon = 10^{-15}$$

X uniformverteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_{i=1}^n a_i = ?$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^{[R]} + \varepsilon \sum_{i=1}^n X_i$$

Wie groß ist der Fehler?

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$a = a^{[R]} + \varepsilon X \quad \varepsilon = 10^{-15}$$

X uniformverteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_{i=1}^n a_i = ?$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^{[R]} + \varepsilon \sum_{i=1}^n X_i$$

Wie groß ist der Fehler?

$$\sum_{i=1}^n X_i \approx ?$$

Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

100000 Simulationen

Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

100000 Simulationen

$$n = 1, 2, \dots, 10$$

Empirische Verteilung von

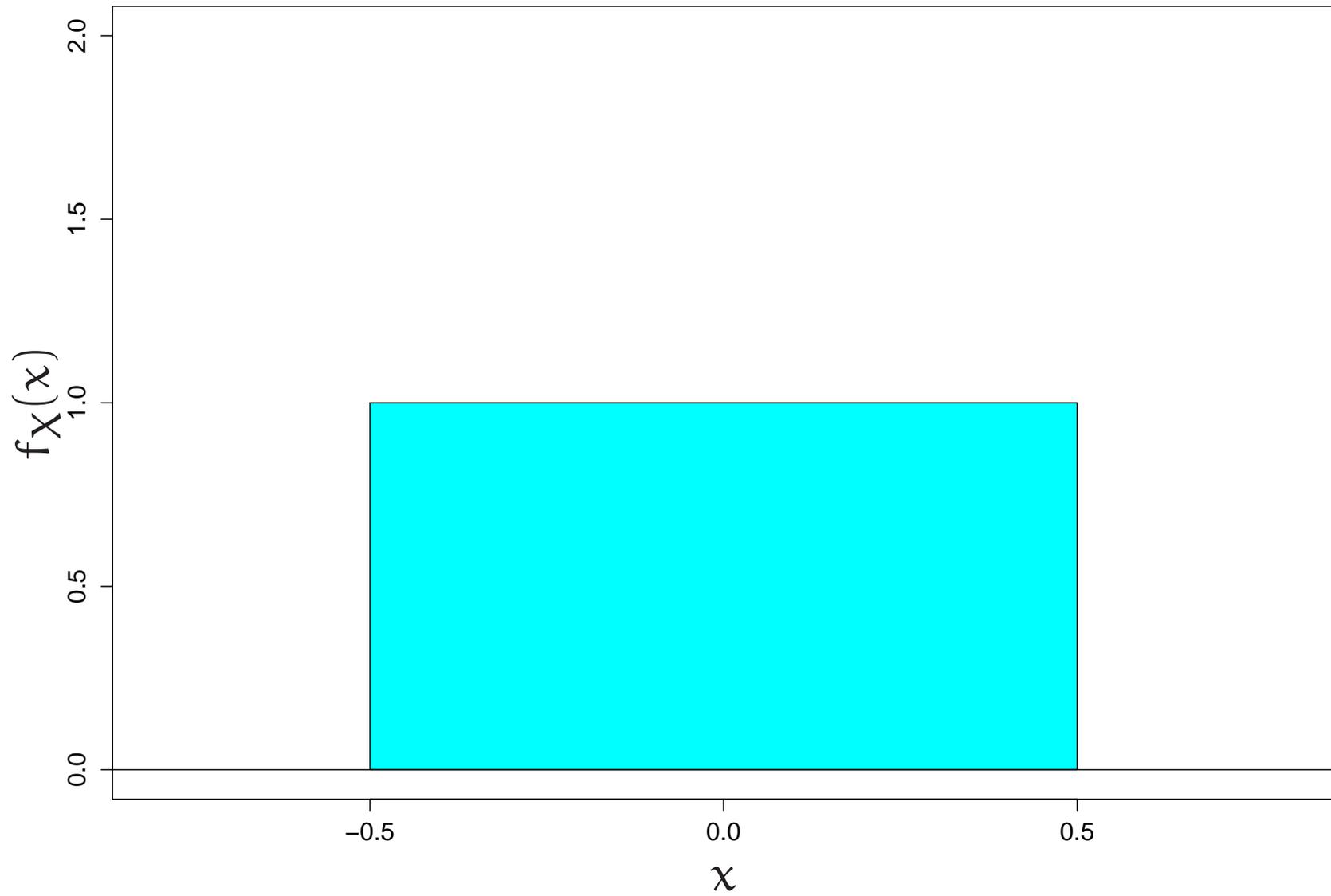
$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

100000 Simulationen

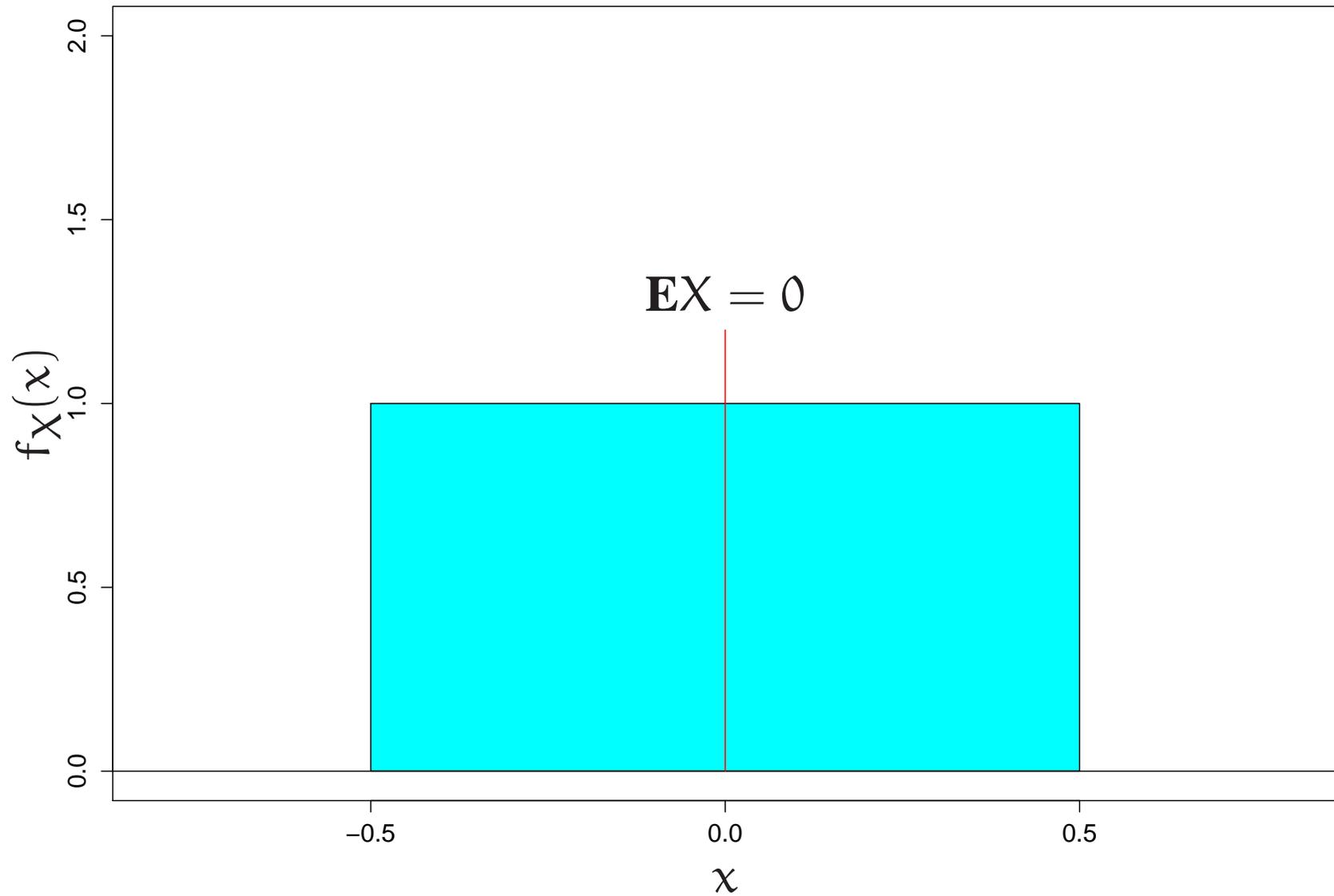
$$n = 1, 2, \dots, 10$$

$$n = 15, 20, \dots, 100$$

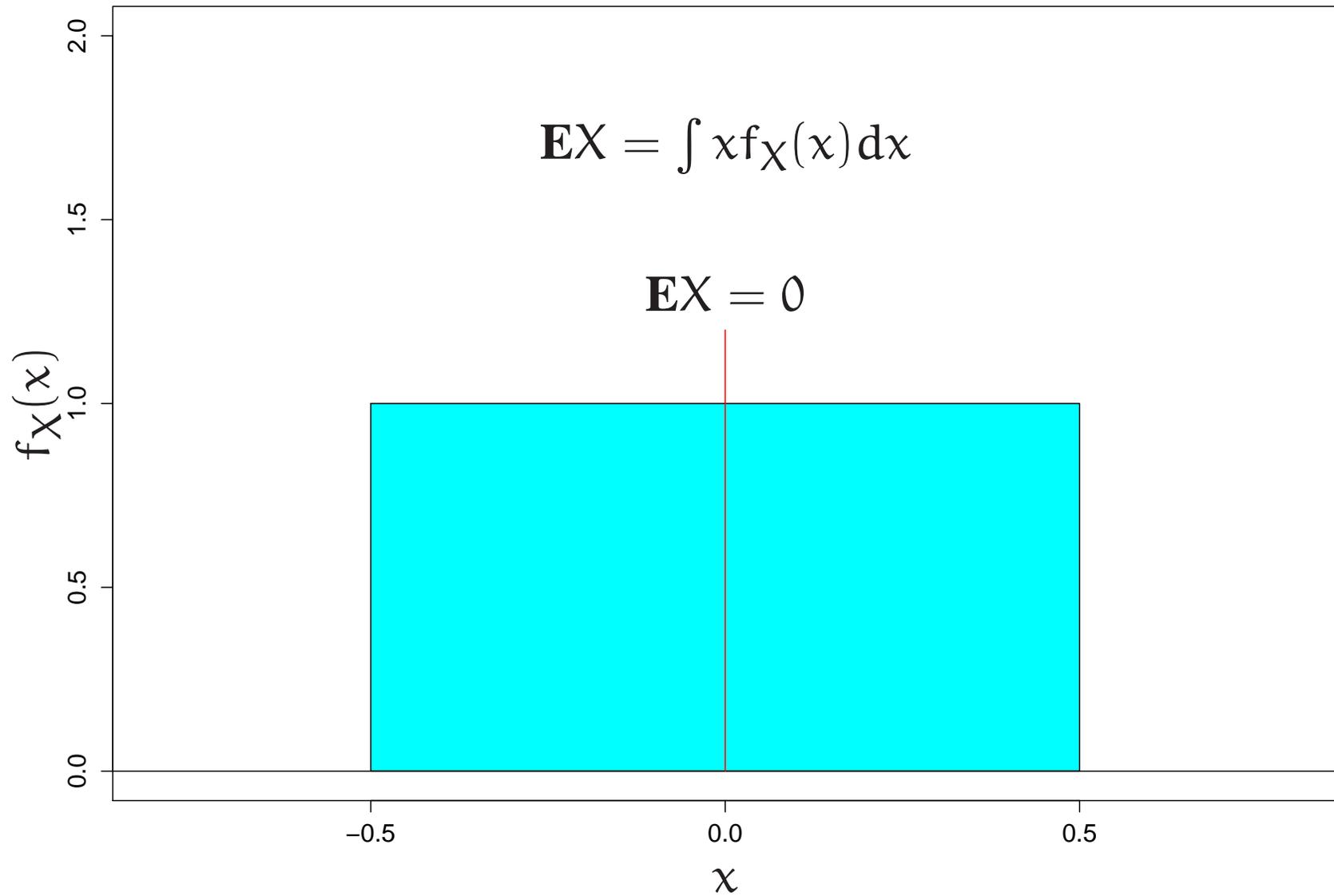
Dichte f_X der Verteilung von X



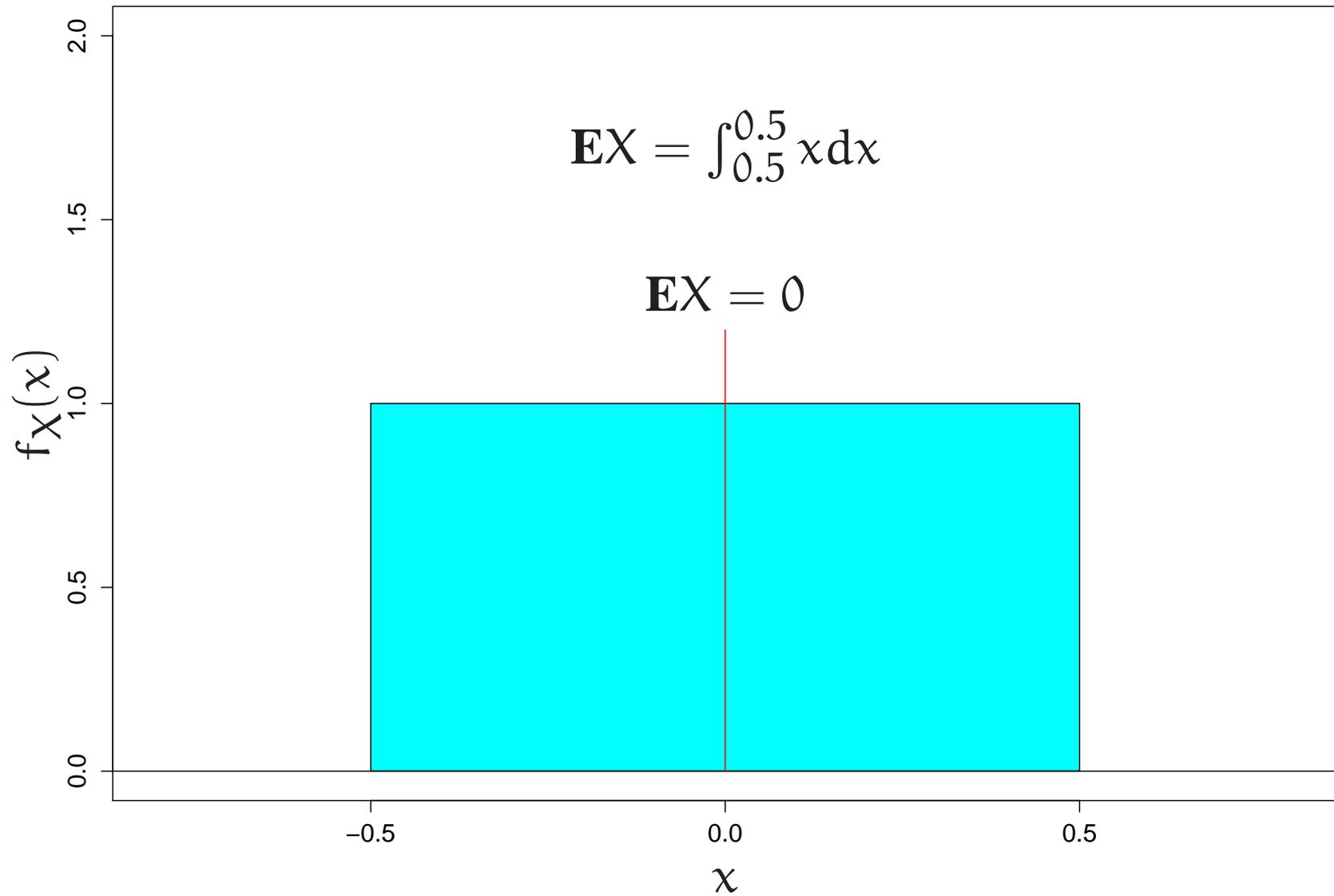
Dichte f_X der Verteilung von X



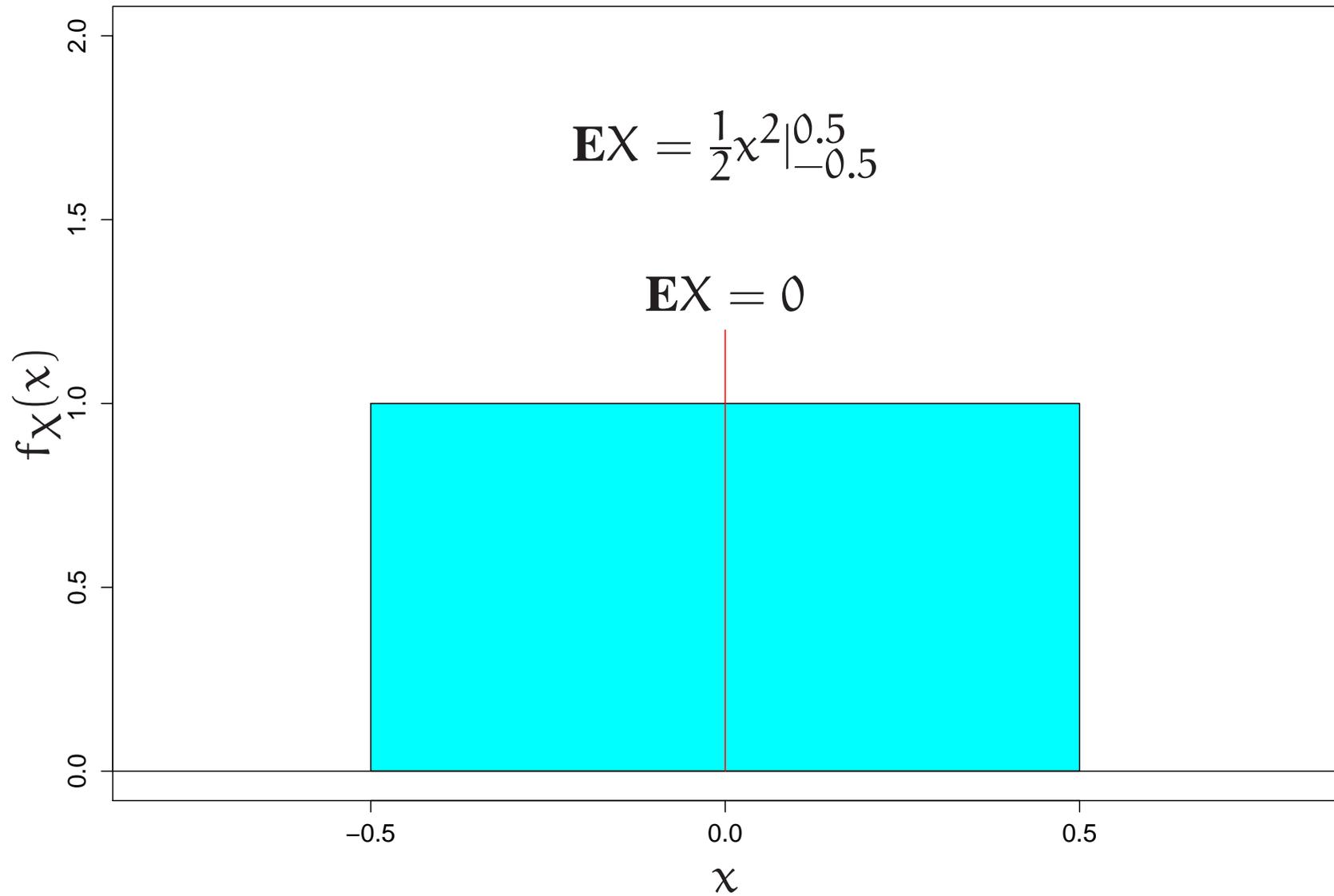
Dichte f_X der Verteilung von X



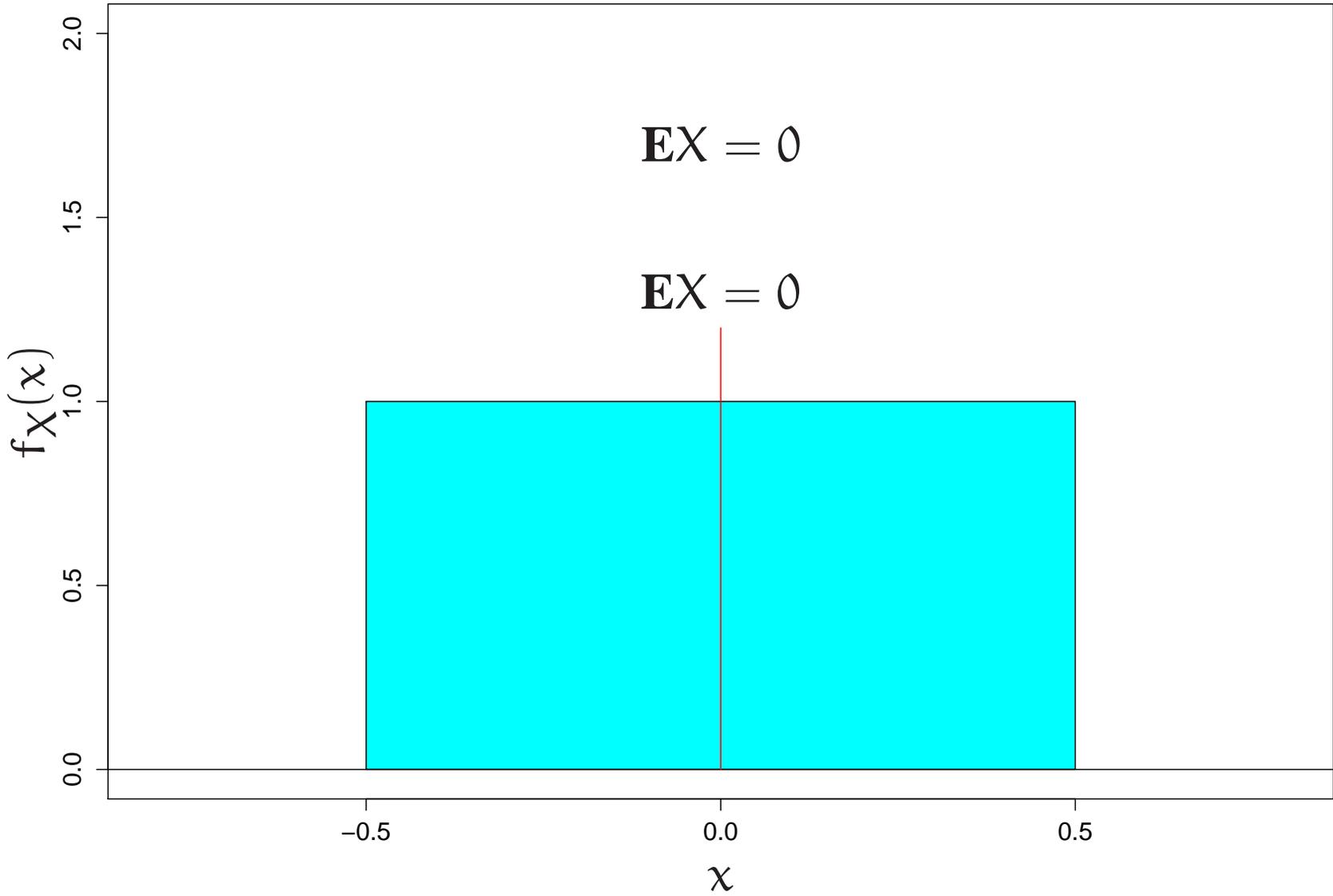
Dichte f_X der Verteilung von X



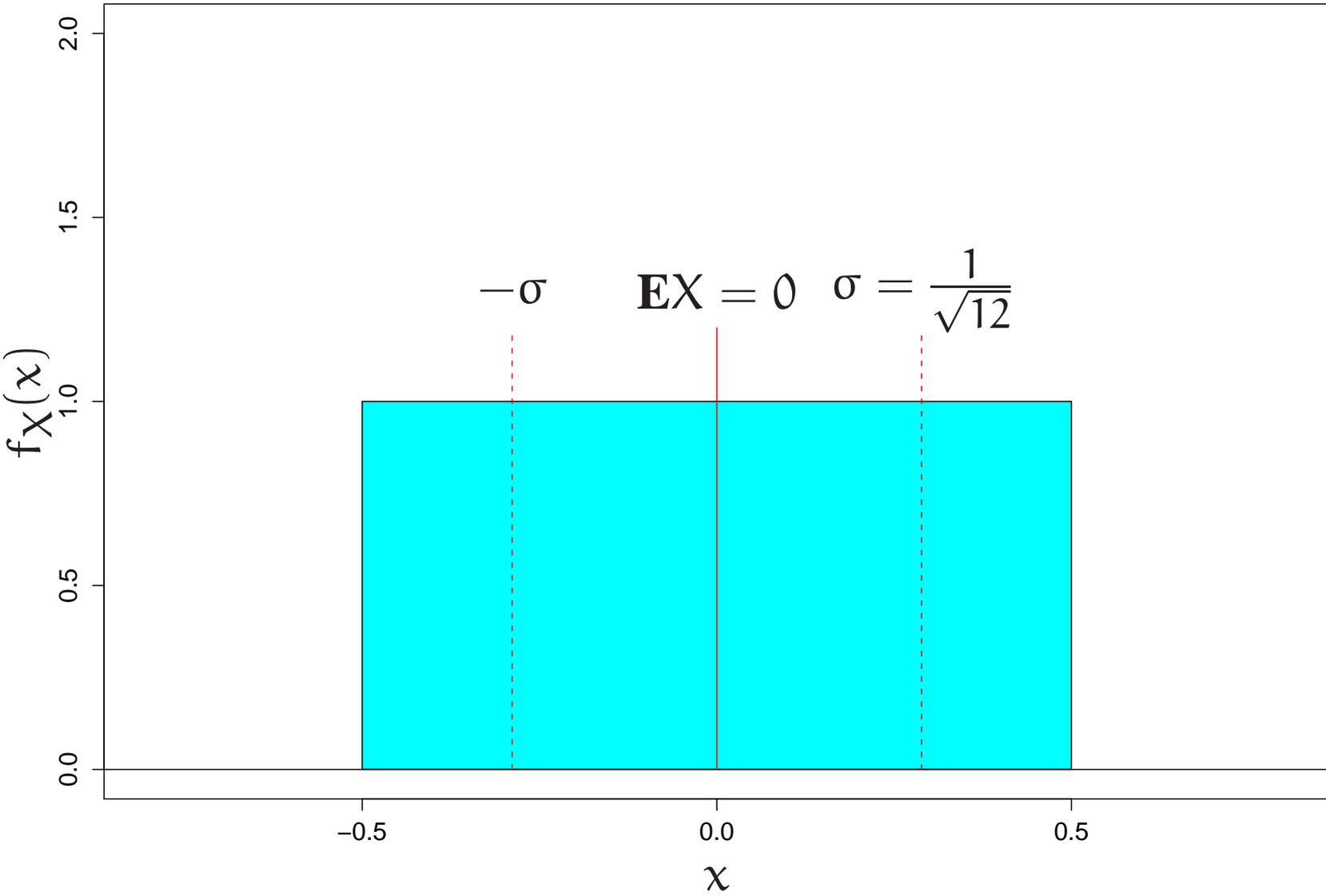
Dichte f_X der Verteilung von X



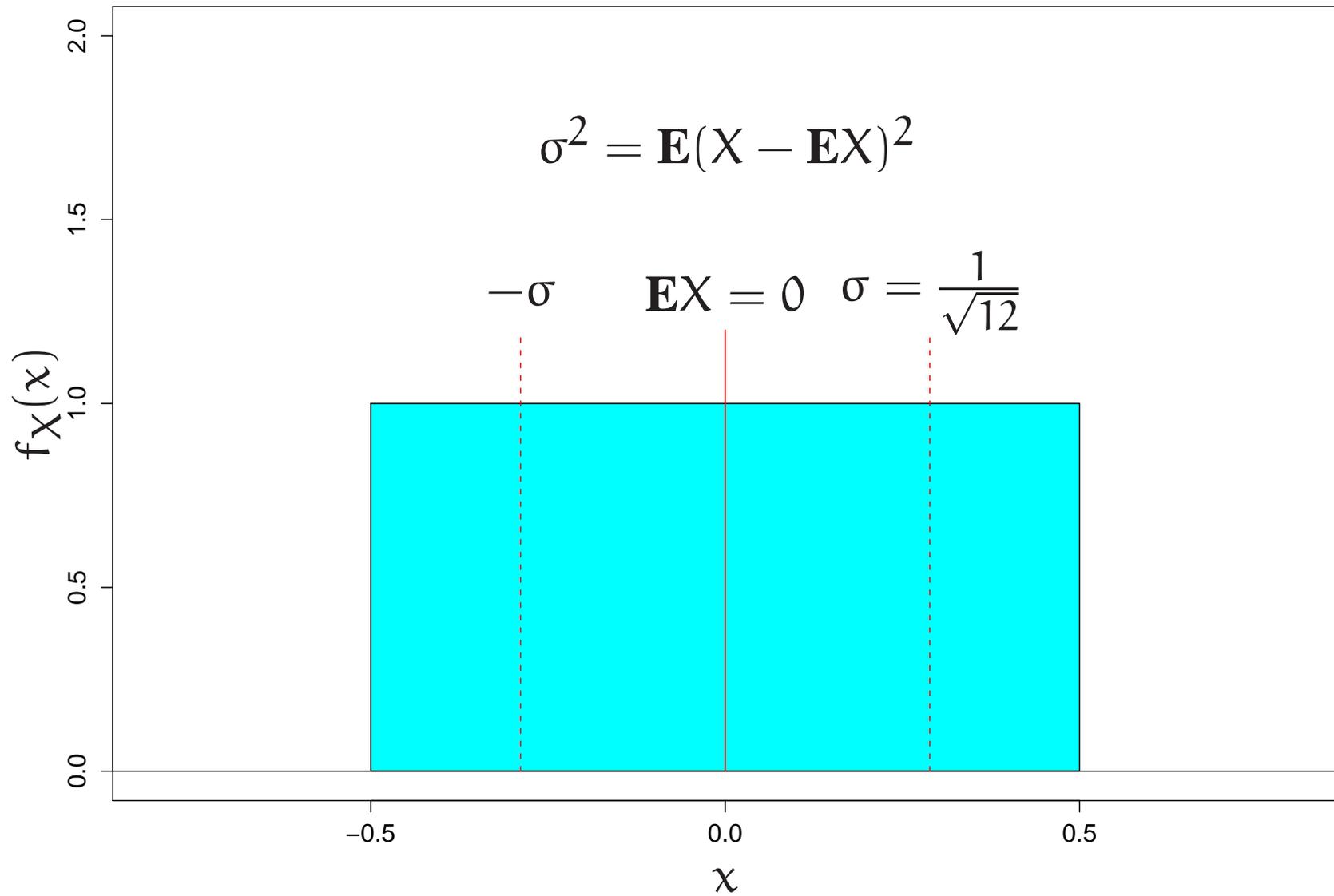
Dichte f_X der Verteilung von X



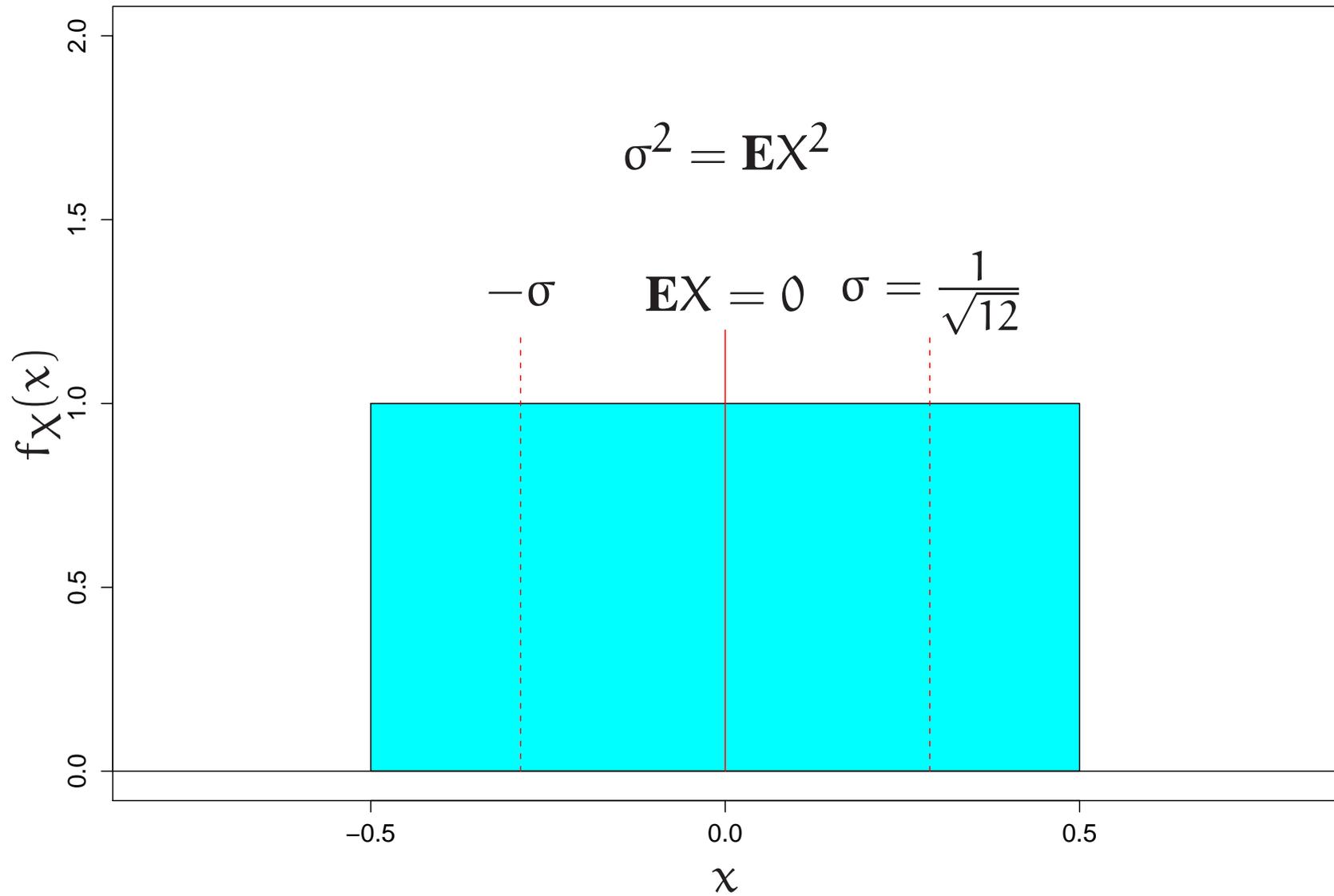
Dichte f_X der Verteilung von X



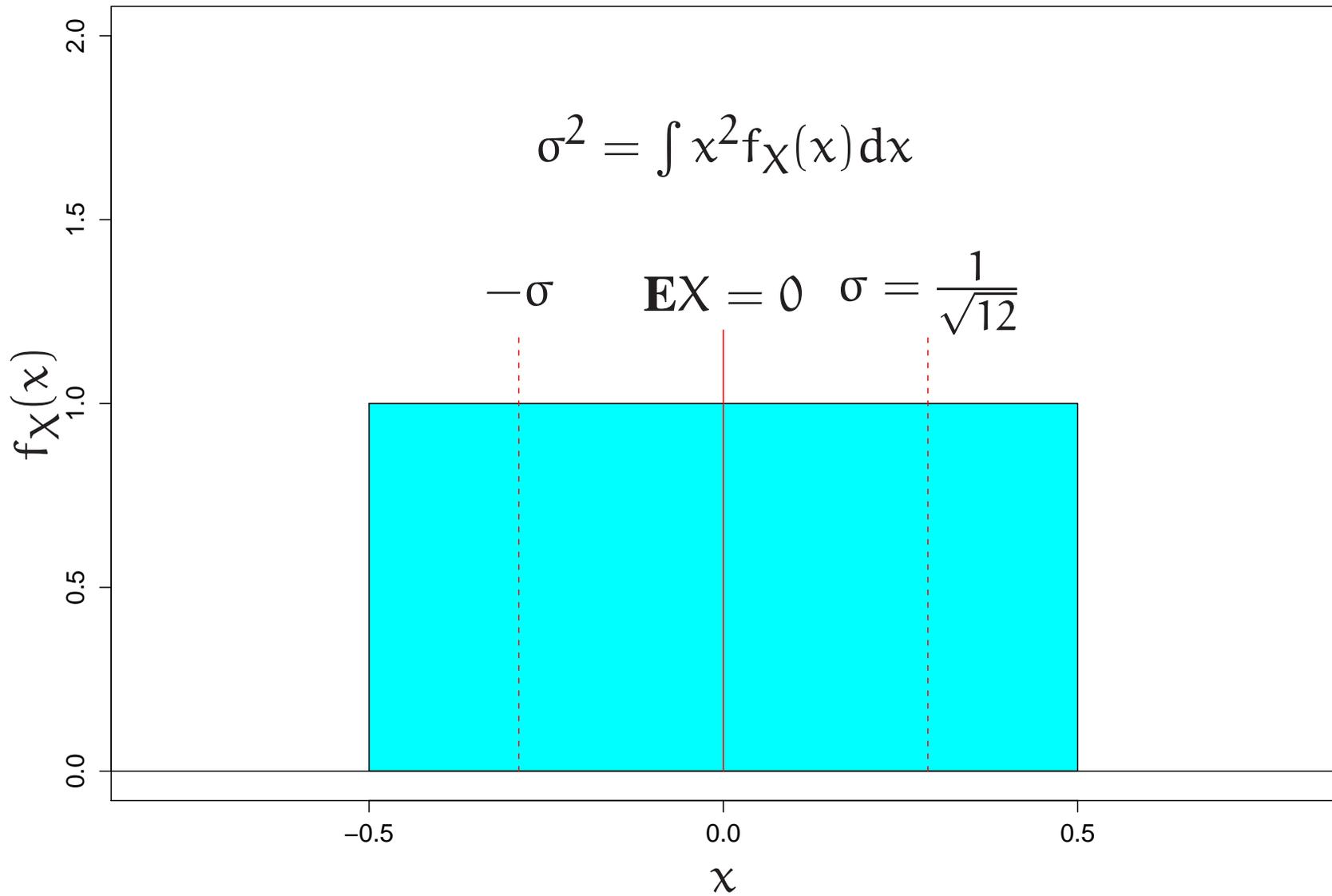
Dichte f_X der Verteilung von X



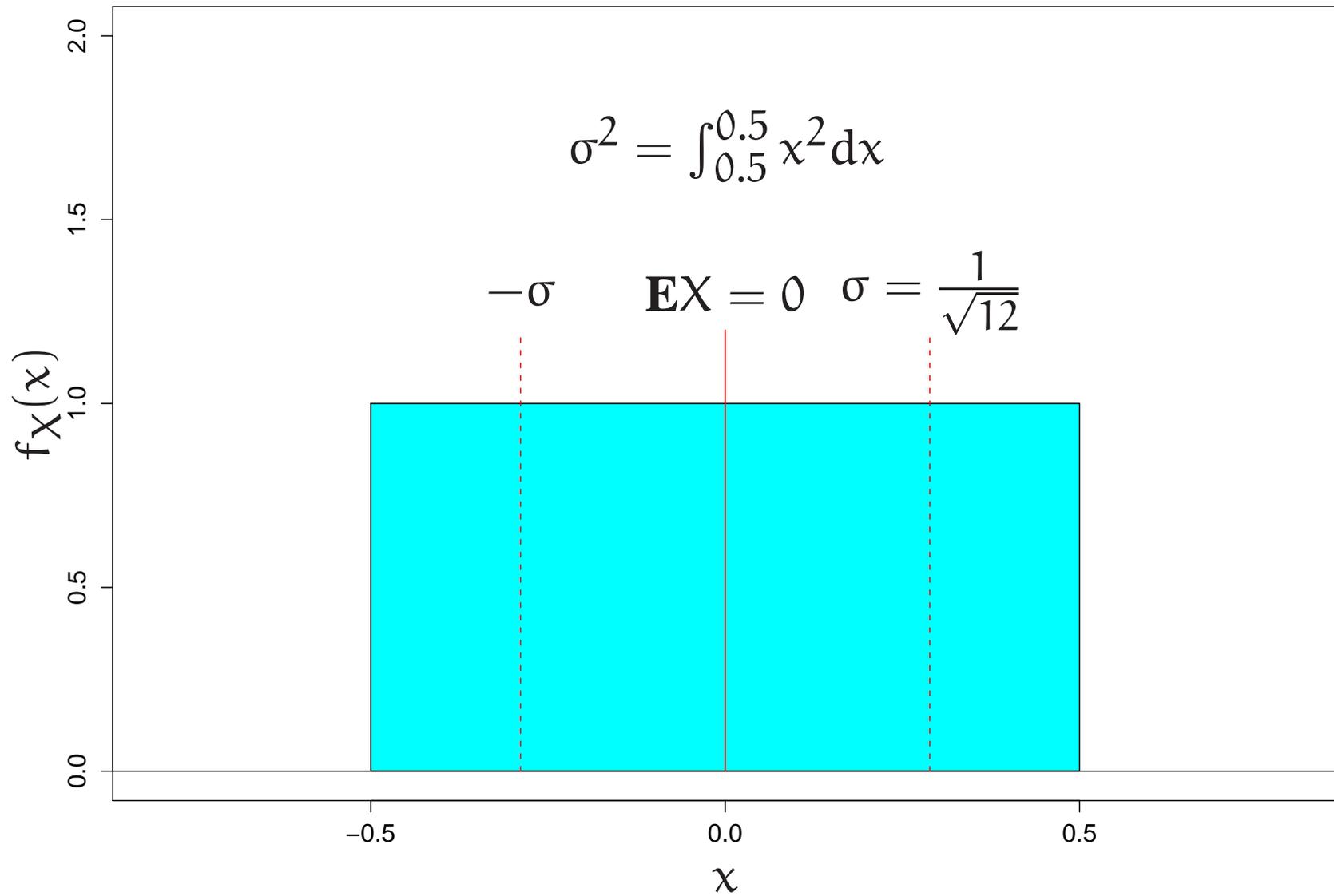
Dichte f_X der Verteilung von X



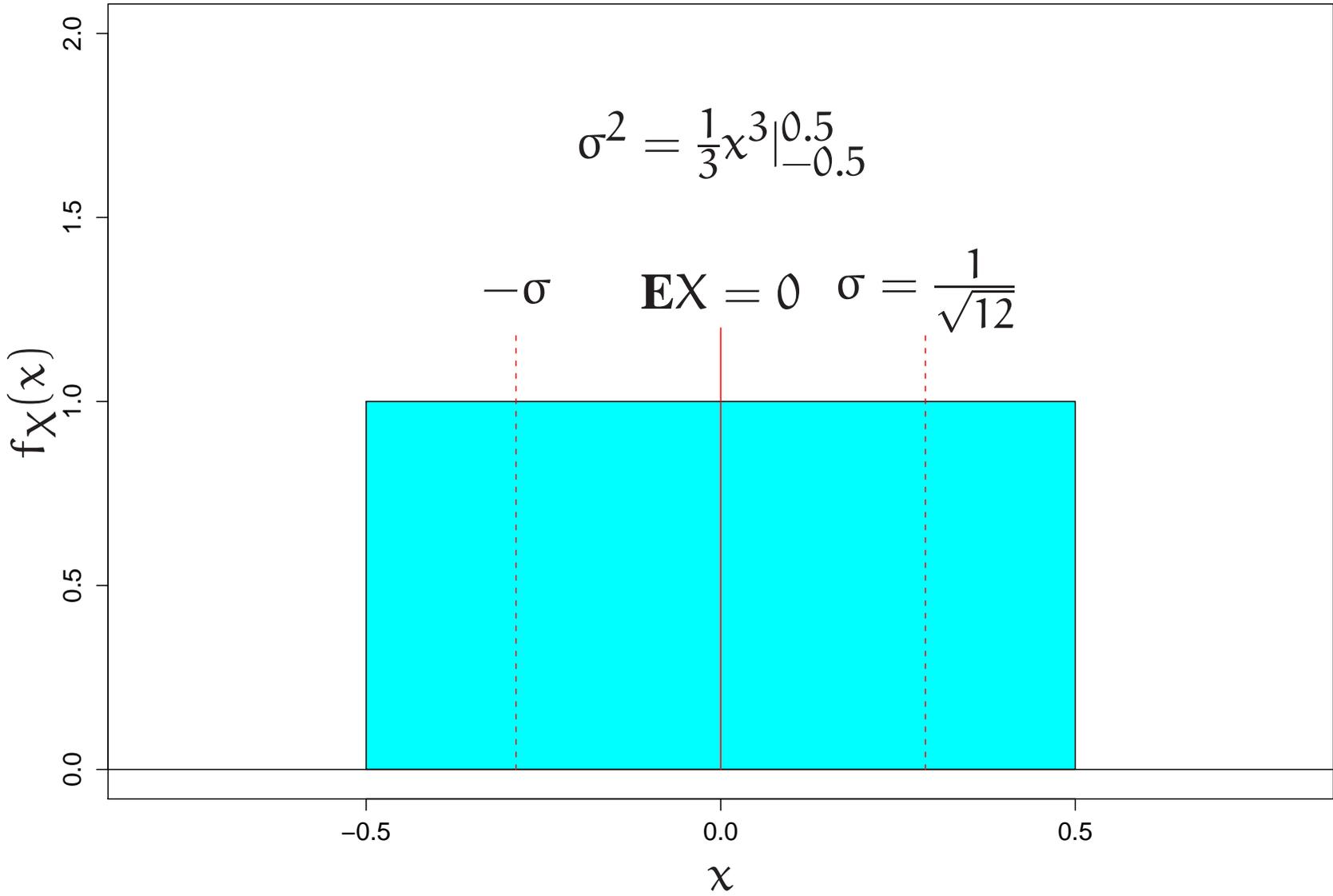
Dichte f_X der Verteilung von X



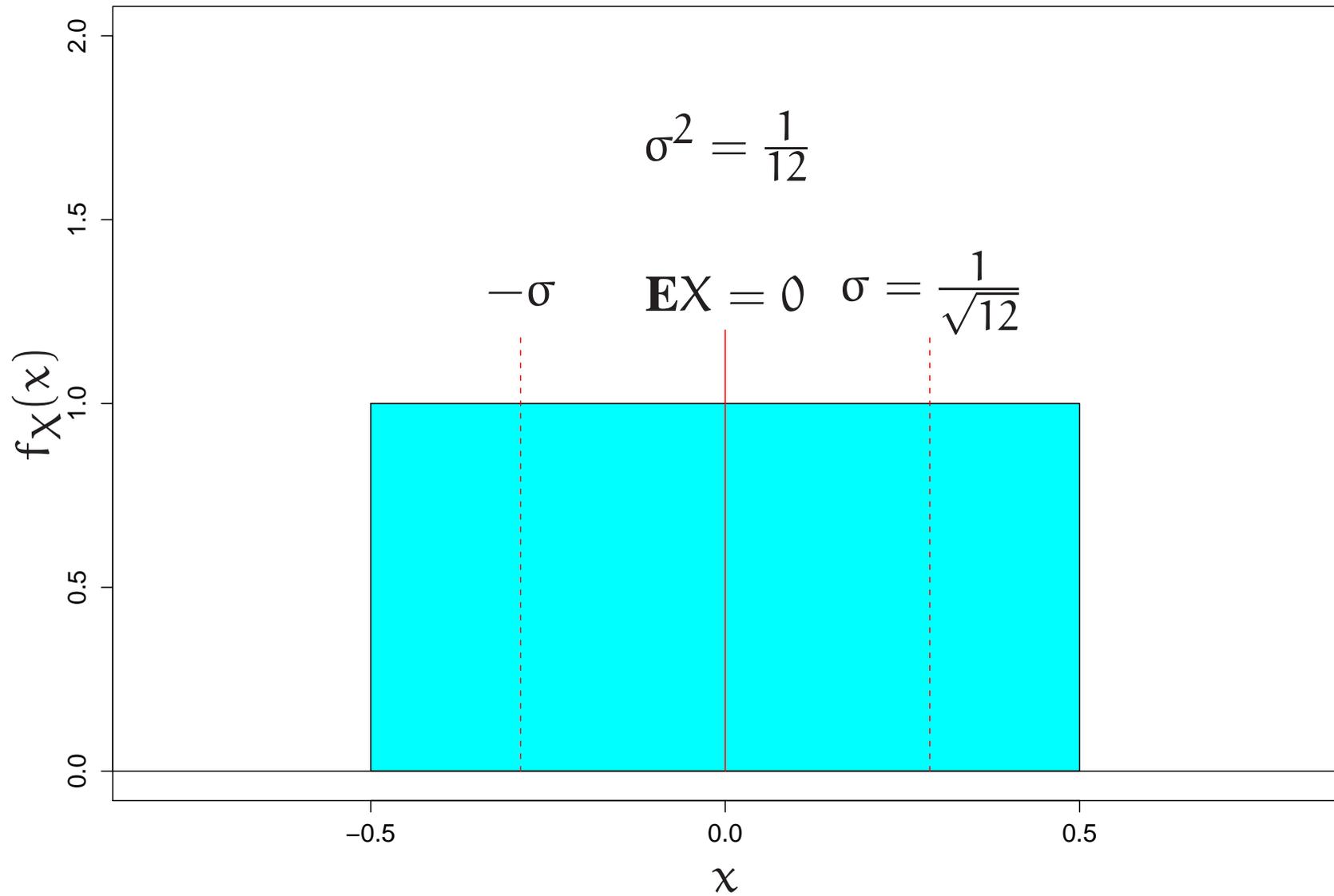
Dichte f_X der Verteilung von X



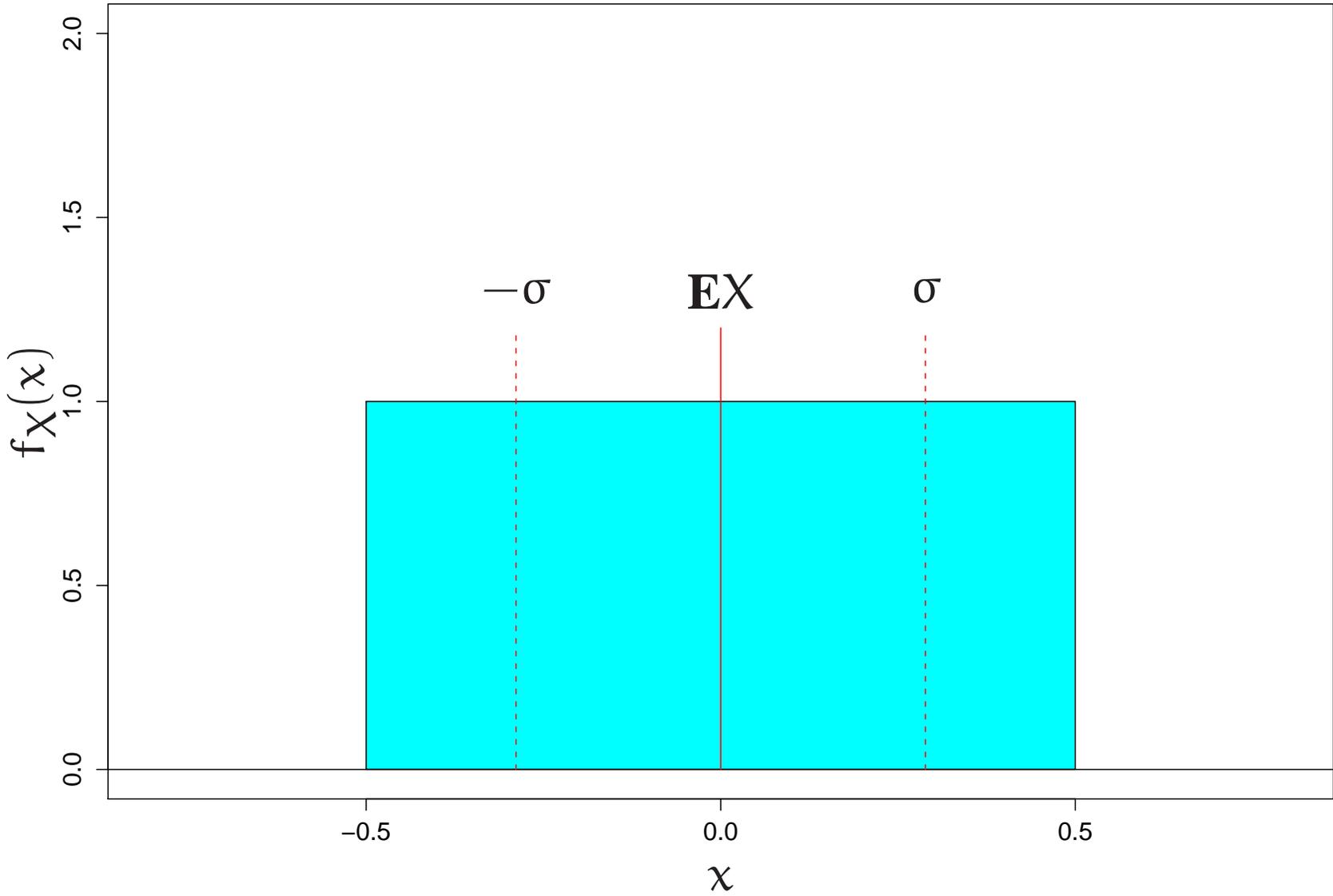
Dichte f_X der Verteilung von X



Dichte f_X der Verteilung von X

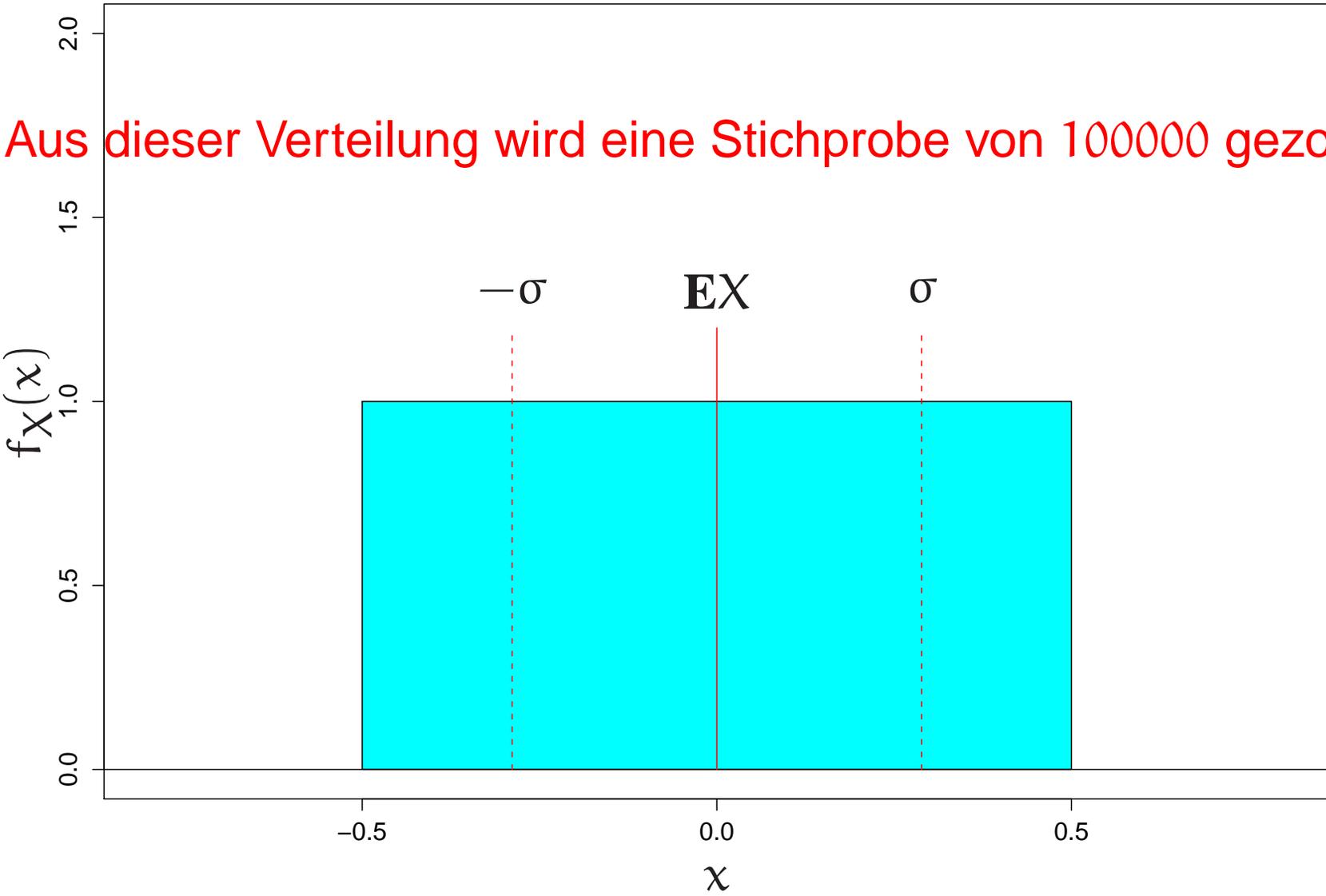


Dichte f_X der Verteilung von X

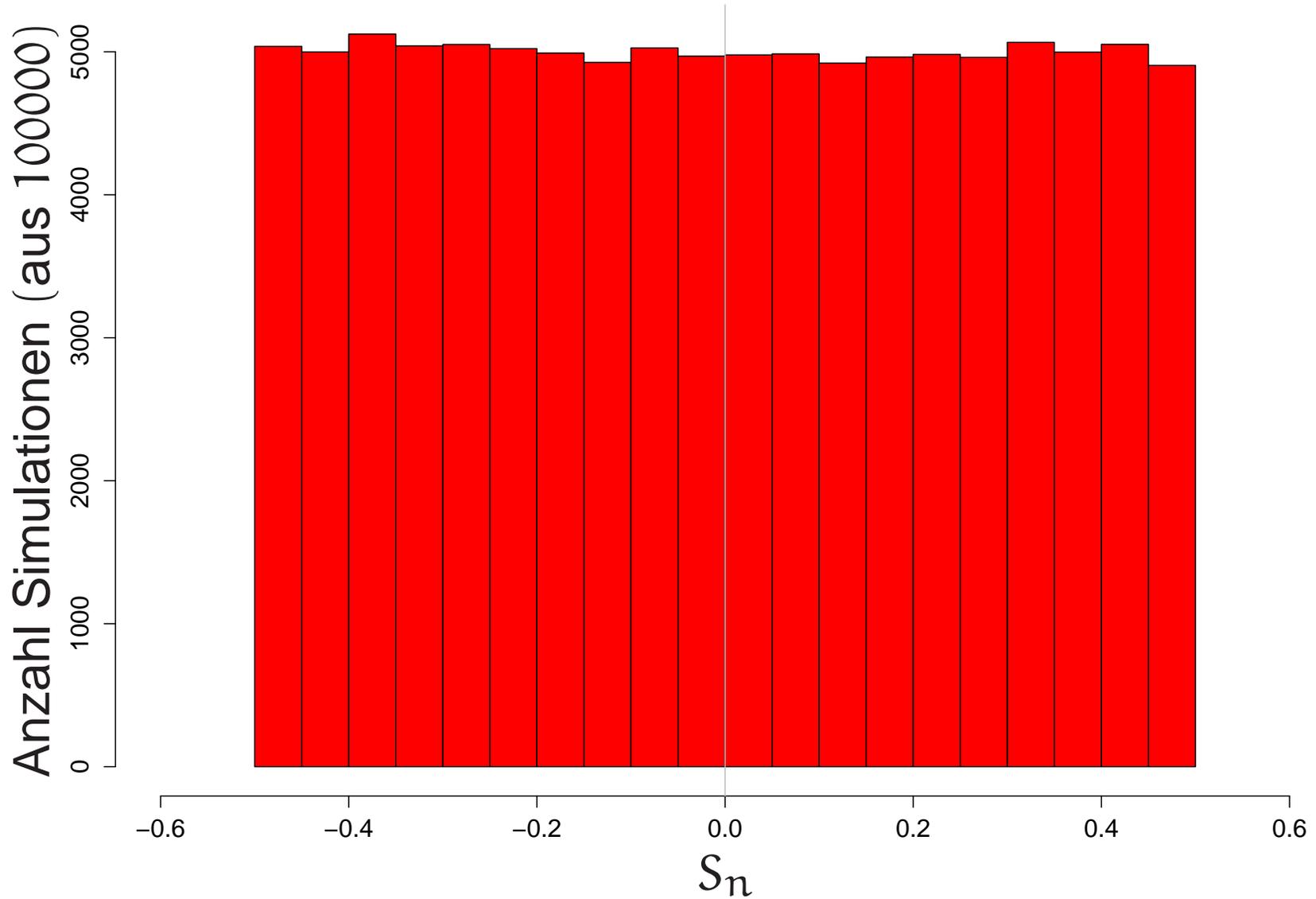


Dichte f_X der Verteilung von X

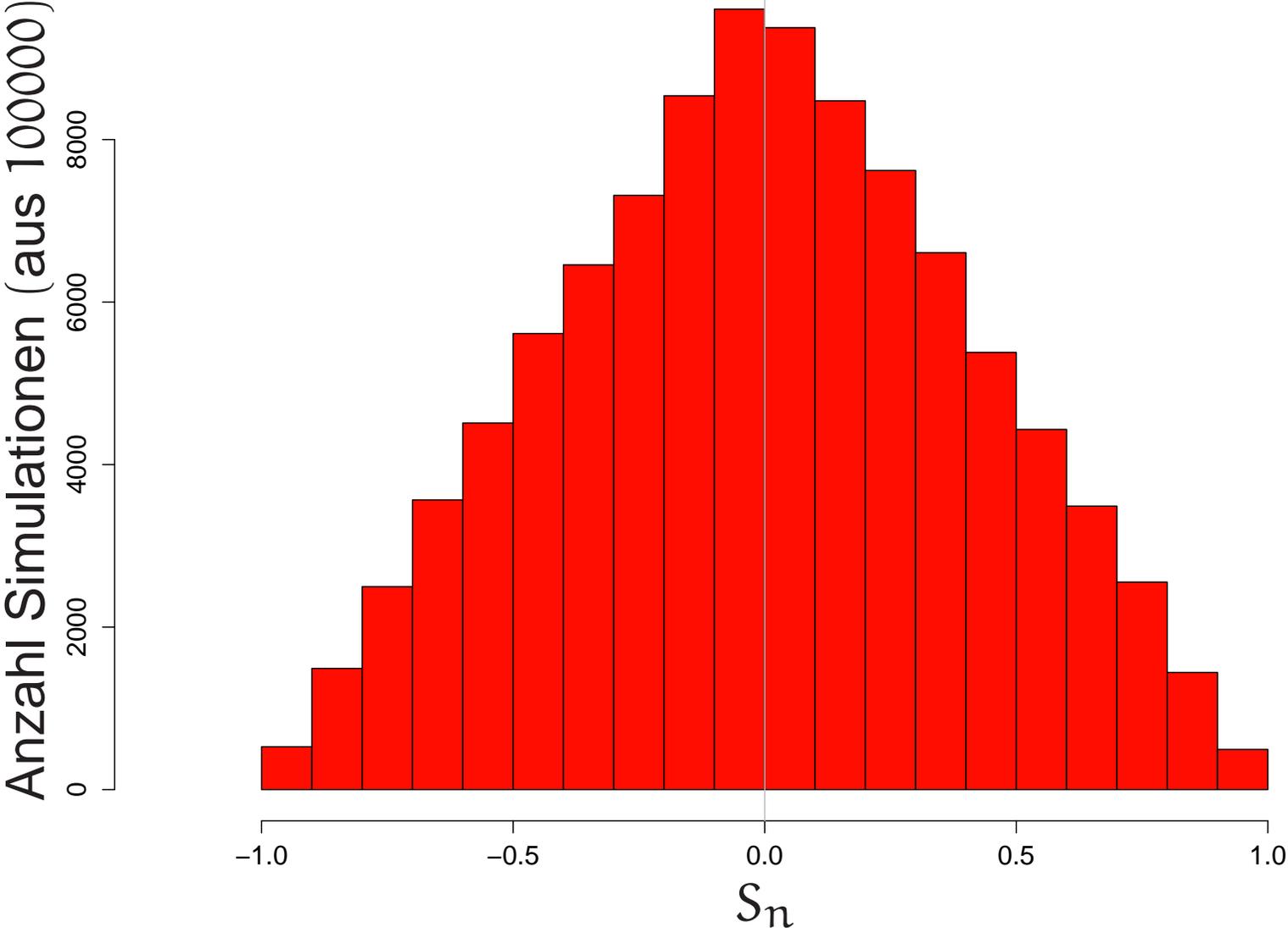
Aus dieser Verteilung wird eine Stichprobe von 100000 gezogen.



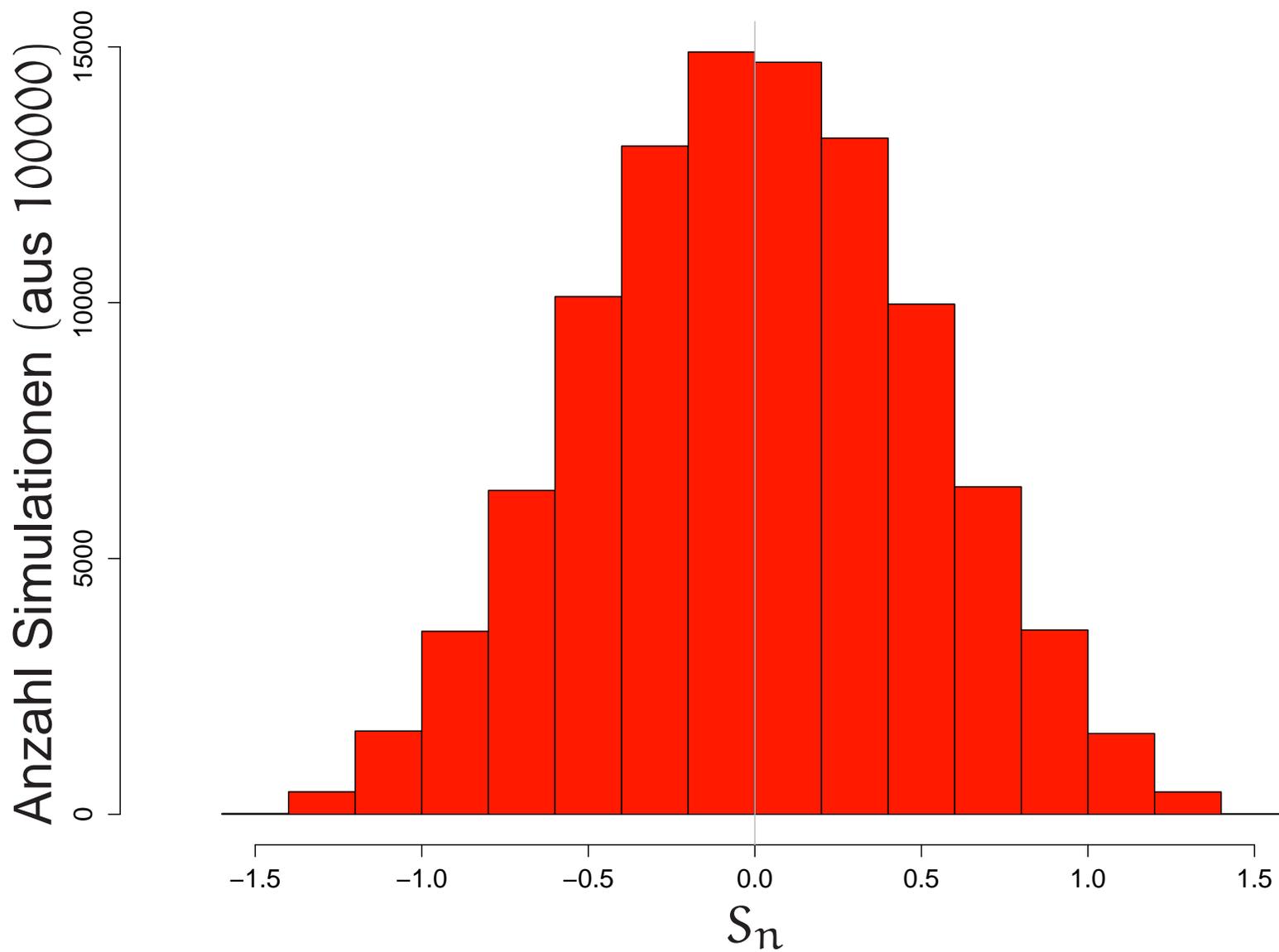
Verteilung von S_n ($n = 1$)



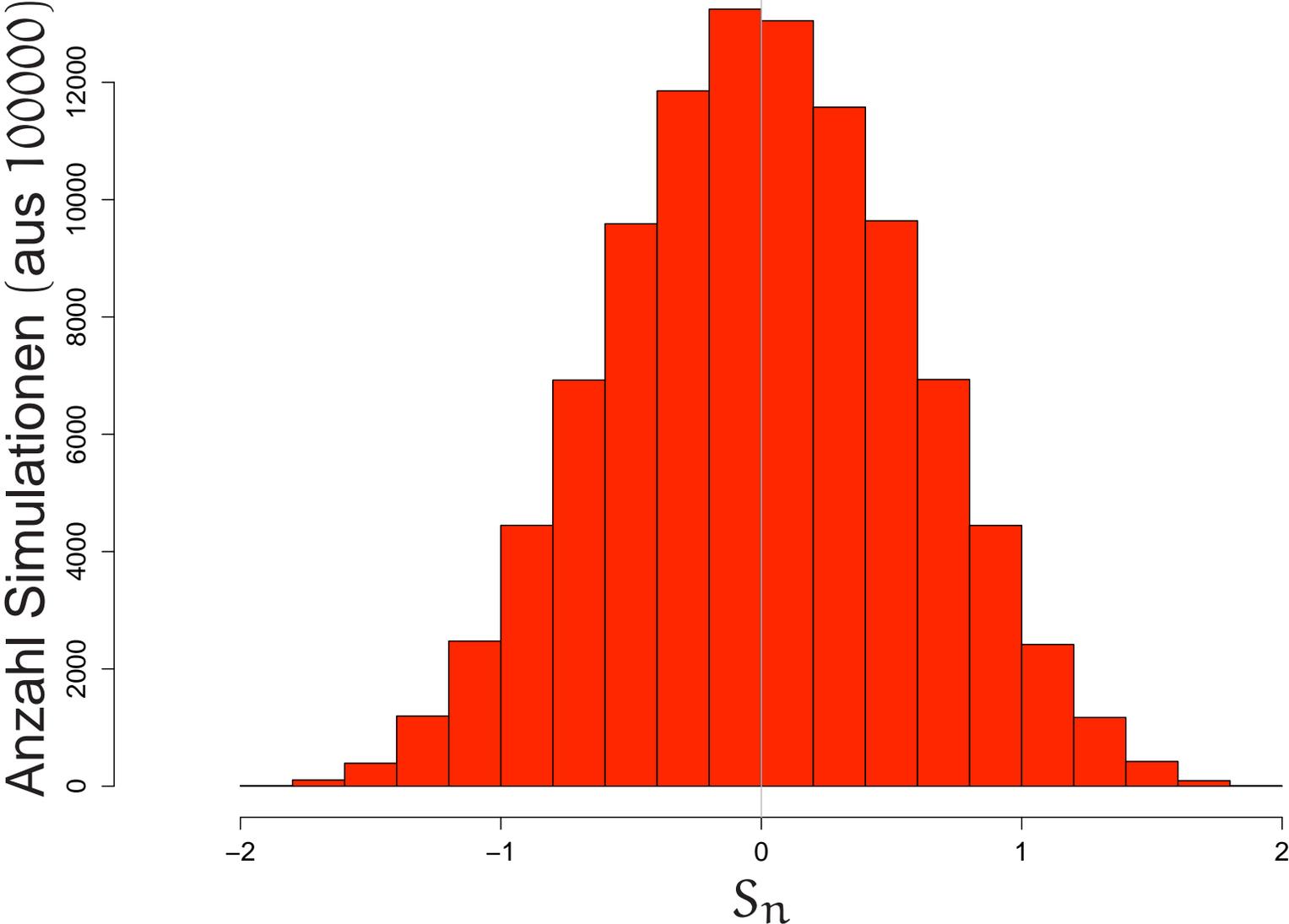
Verteilung von S_n ($n = 2$)



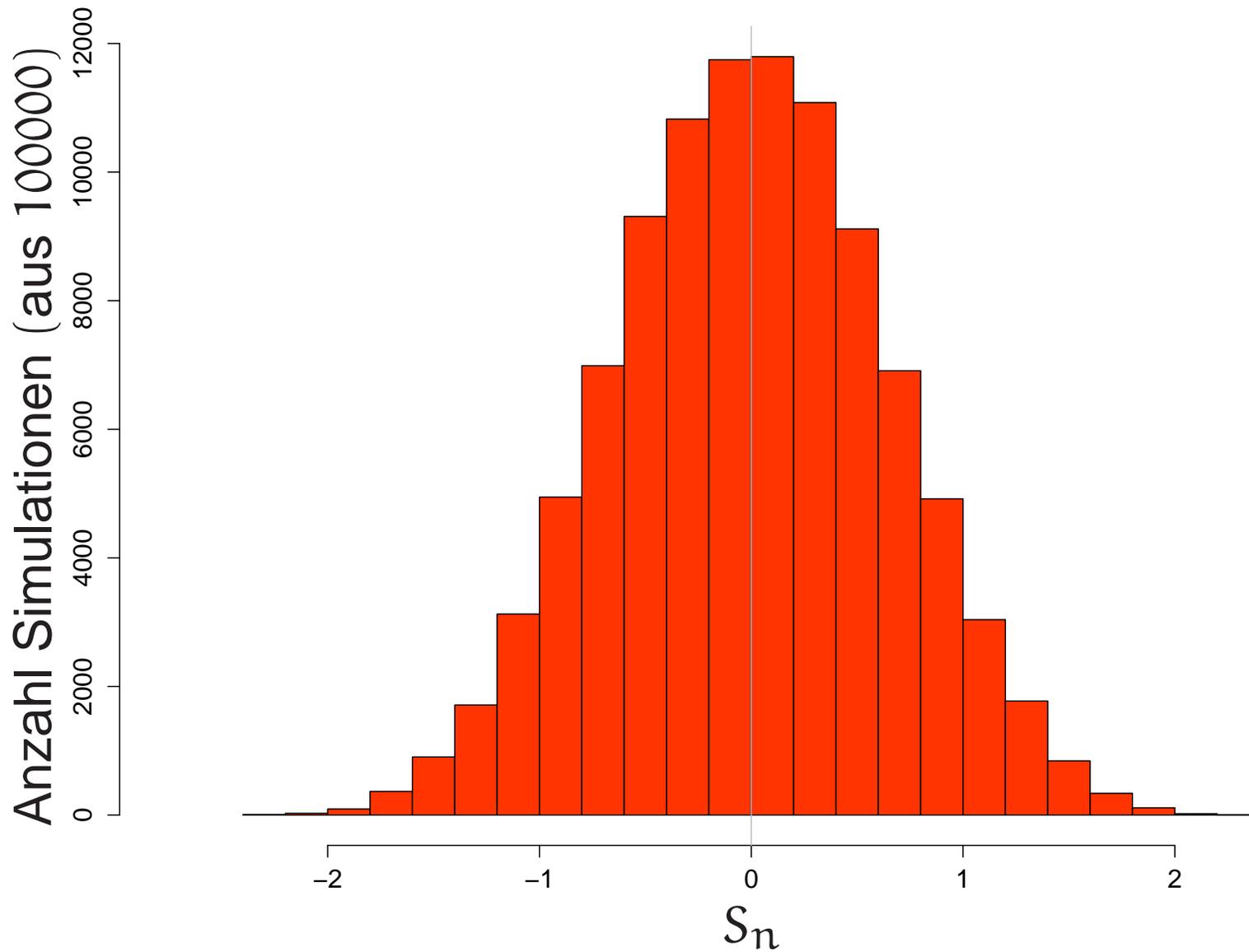
Verteilung von S_n ($n = 3$)



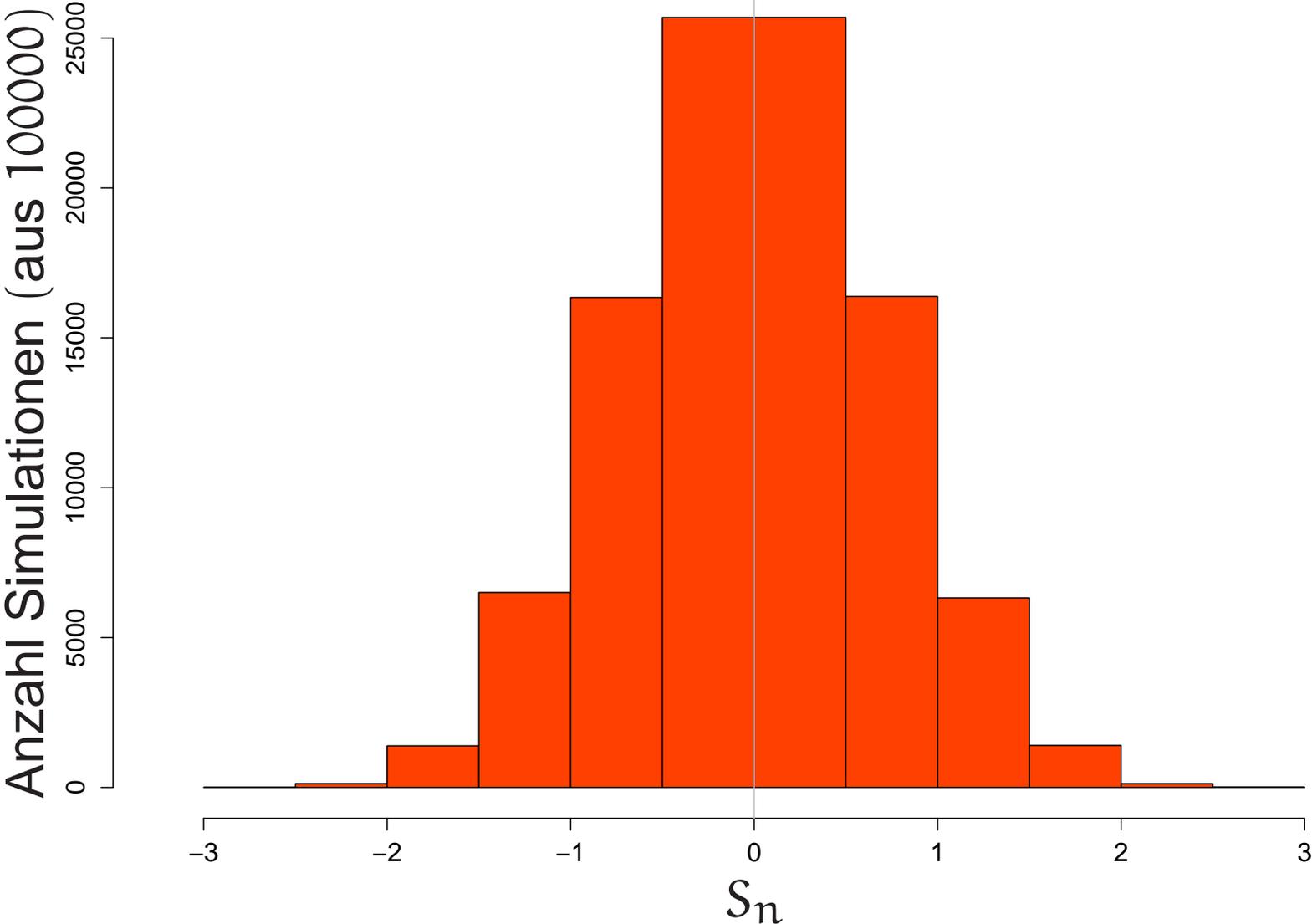
Verteilung von S_n ($n = 4$)



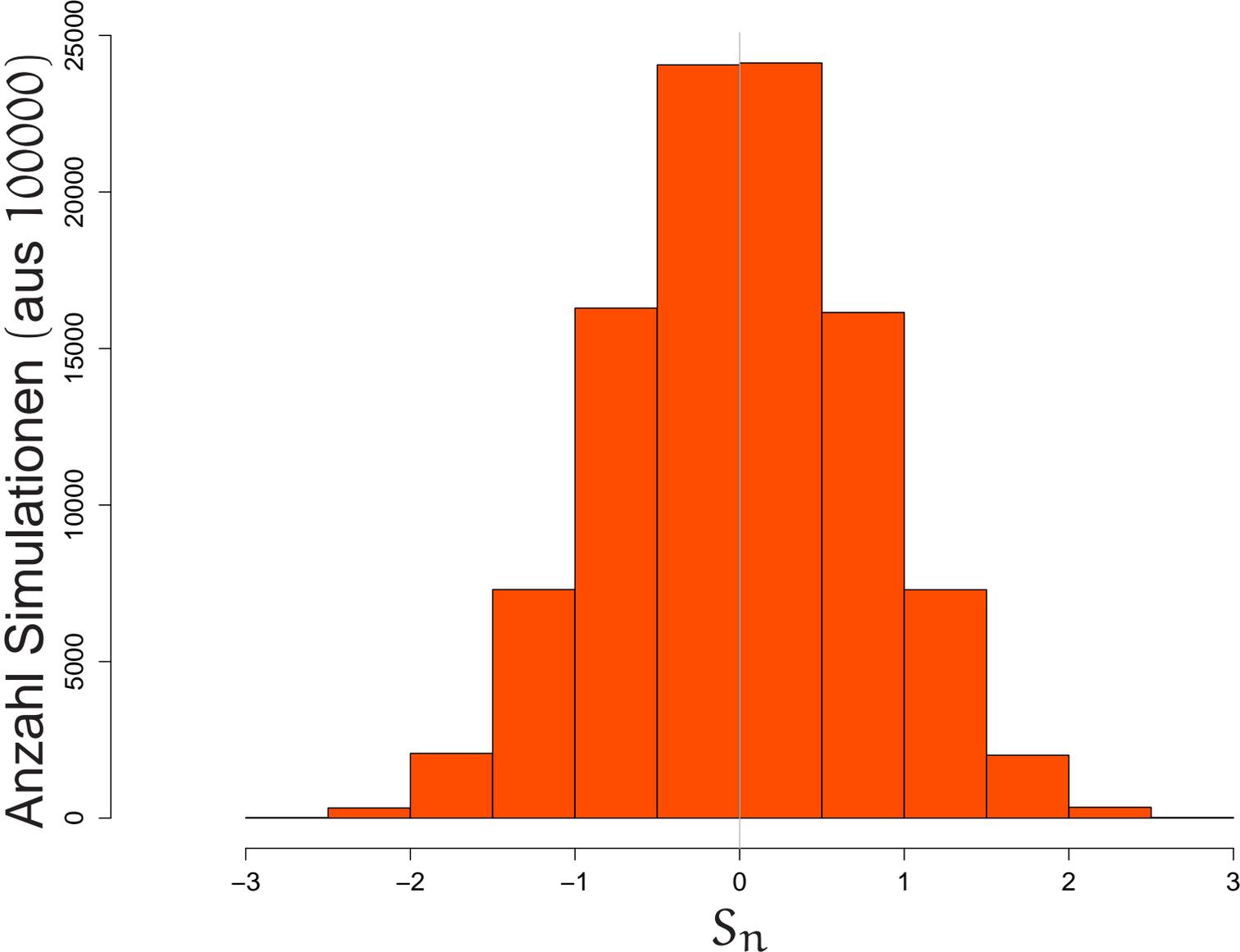
Verteilung von S_n ($n = 5$)



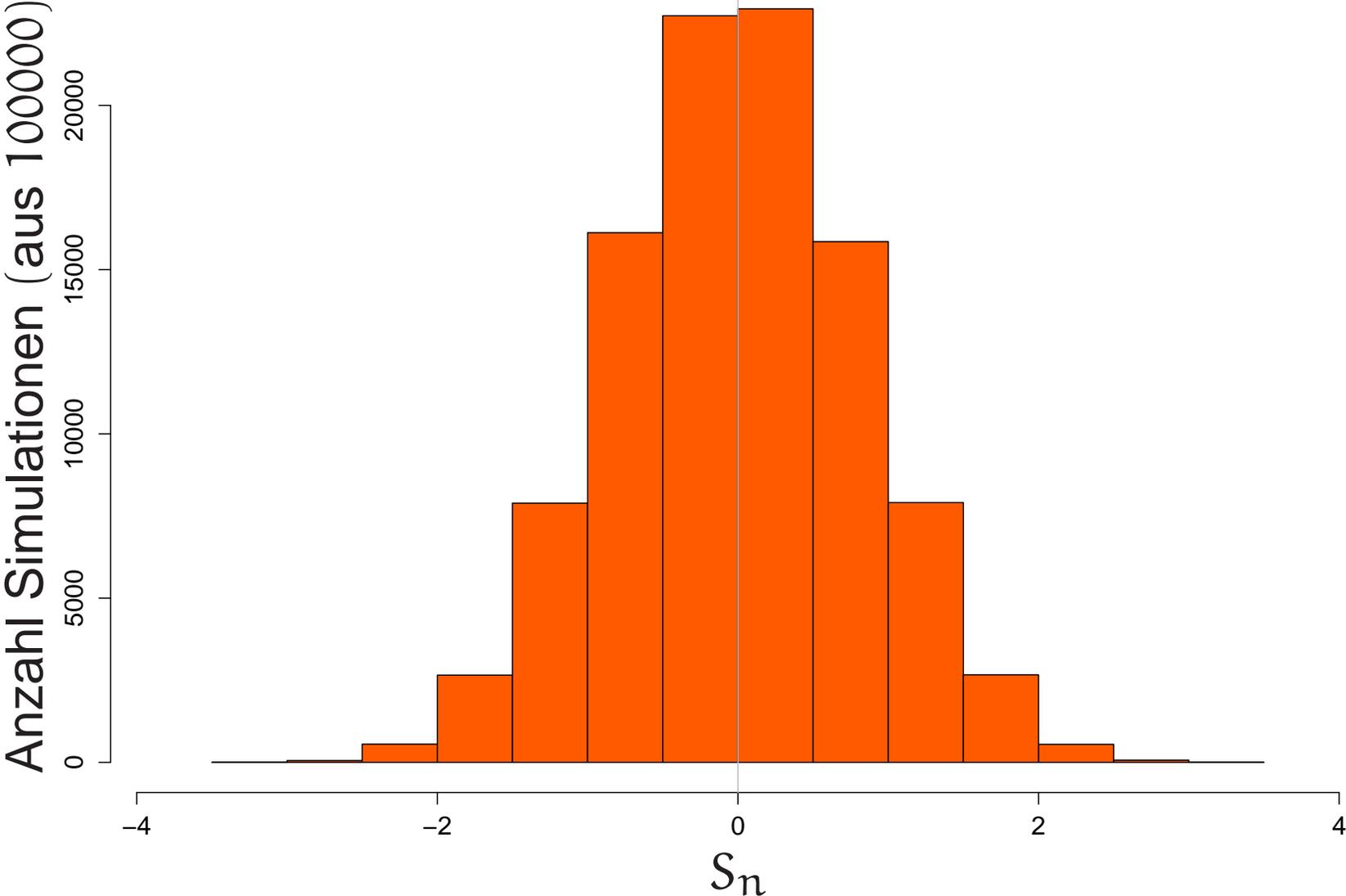
Verteilung von S_n ($n = 6$)



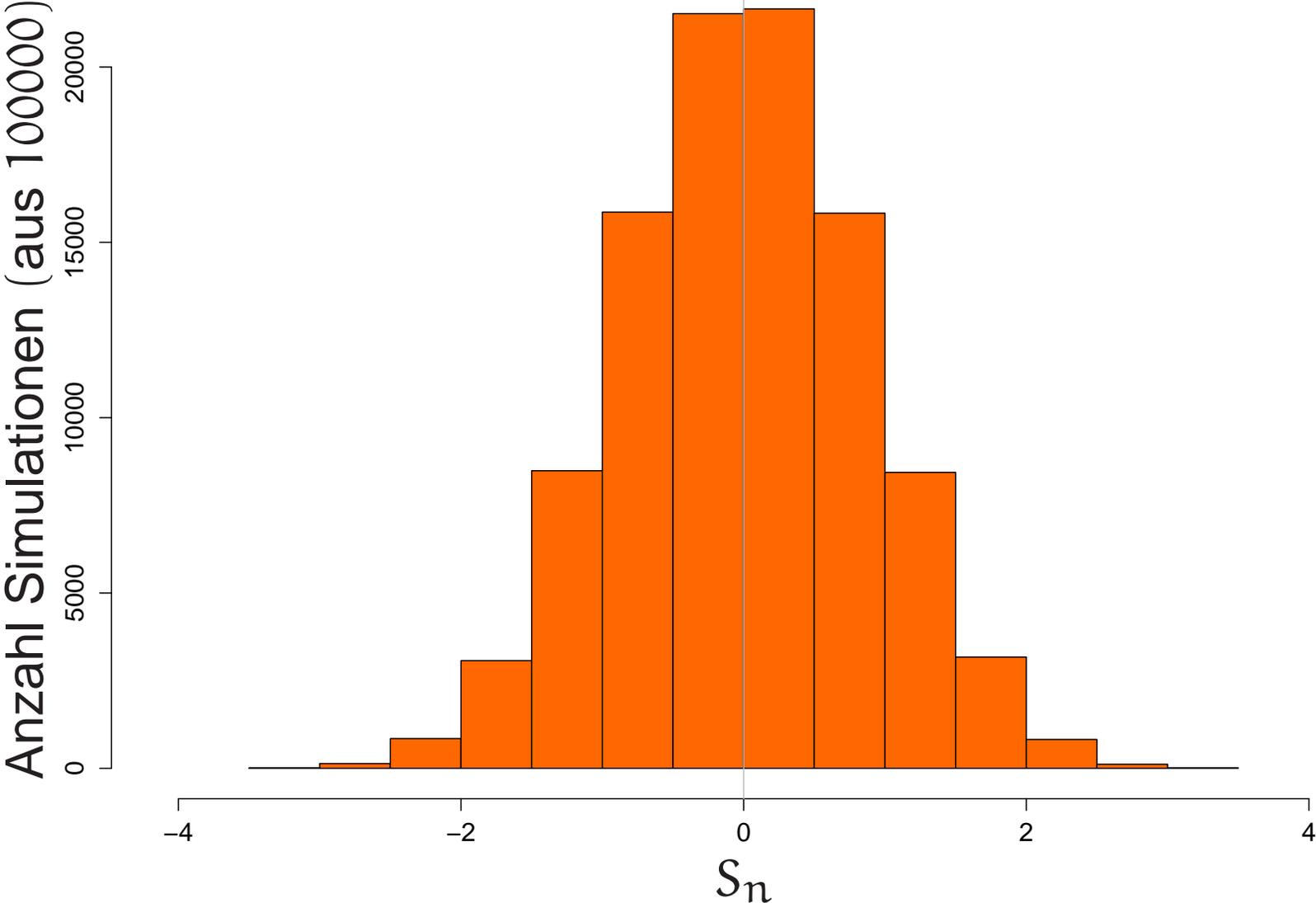
Verteilung von S_n ($n = 7$)



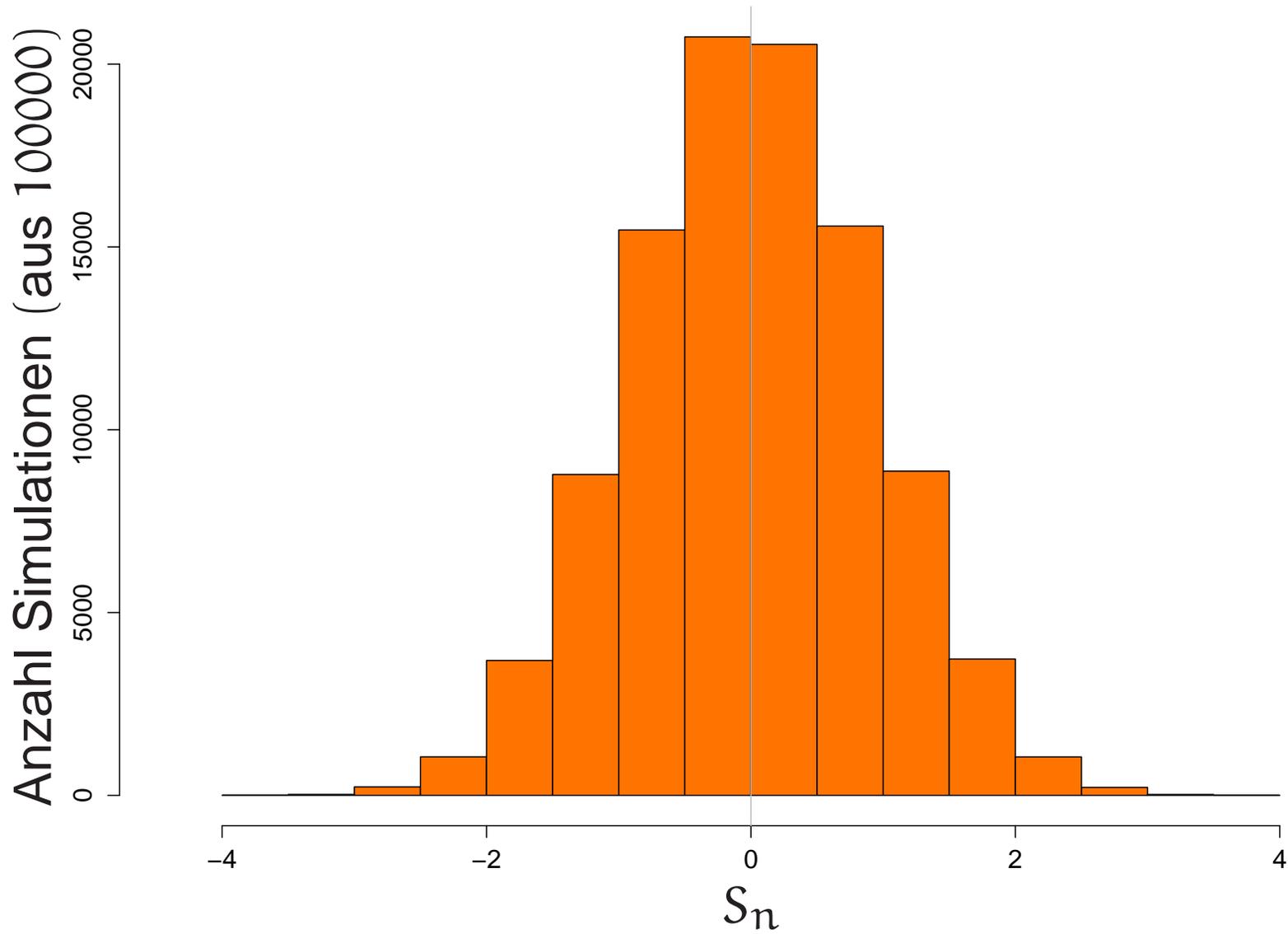
Verteilung von S_n ($n = 8$)



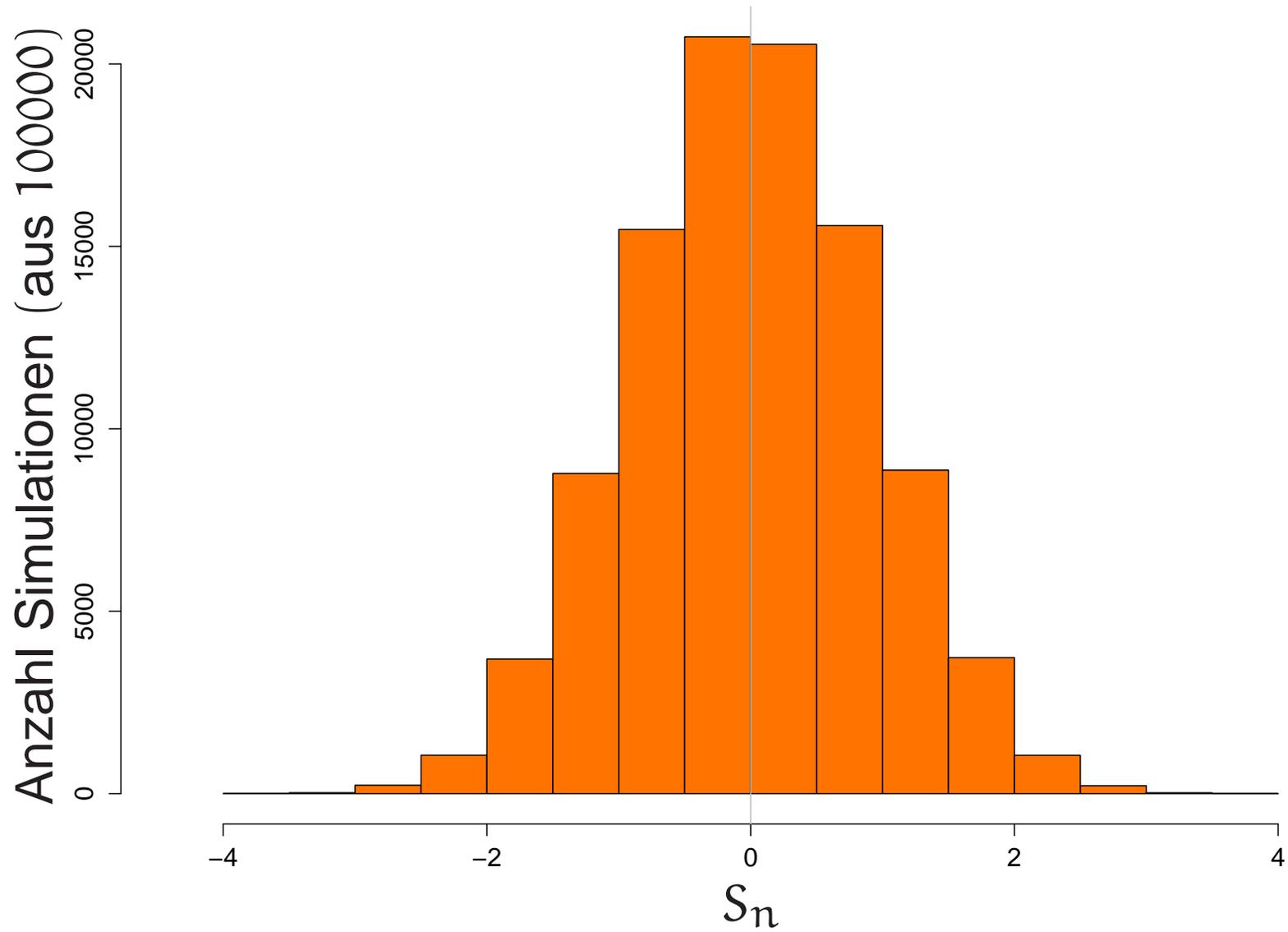
Verteilung von S_n ($n = 9$)



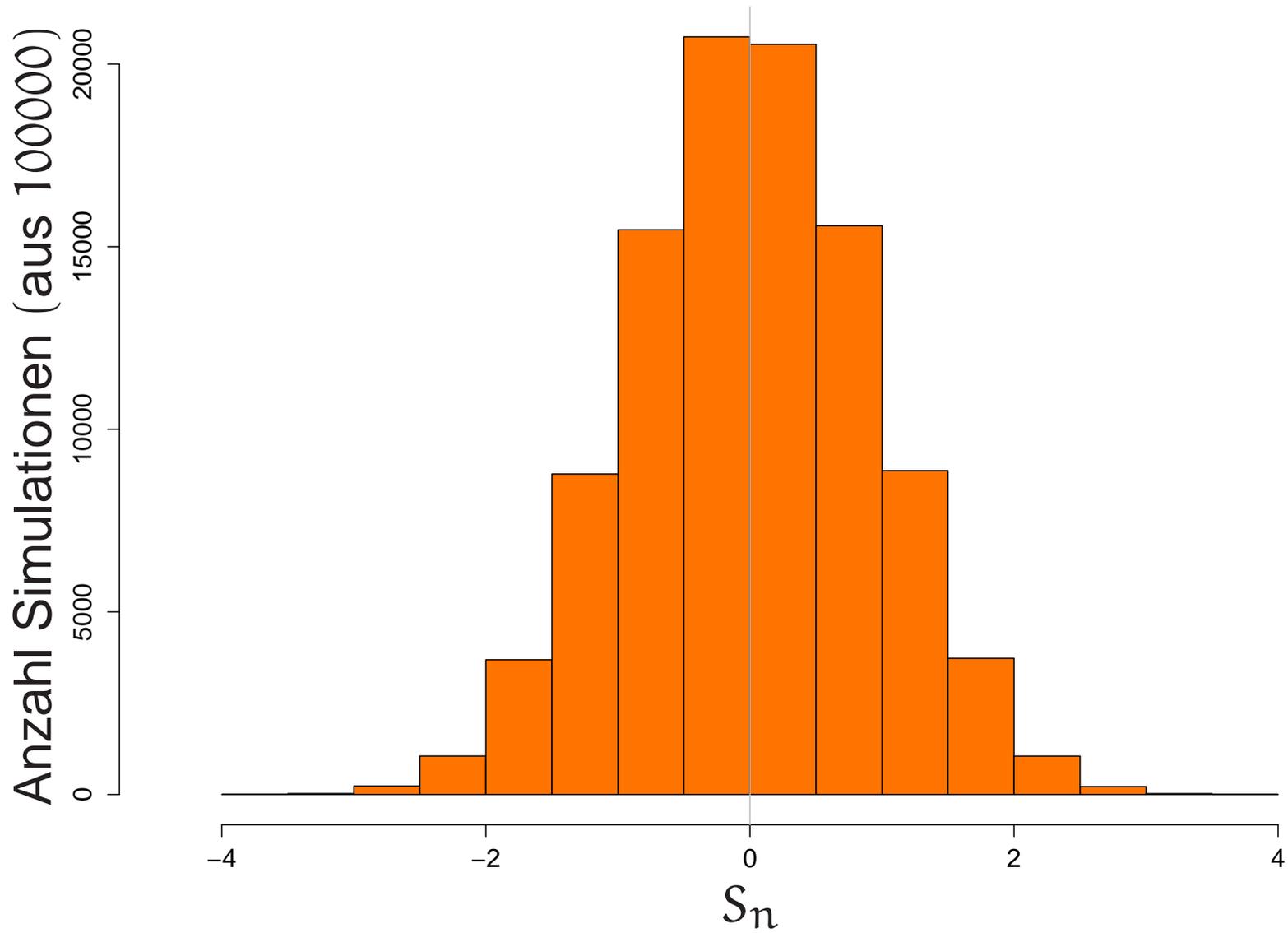
Verteilung von S_n ($n = 10$)



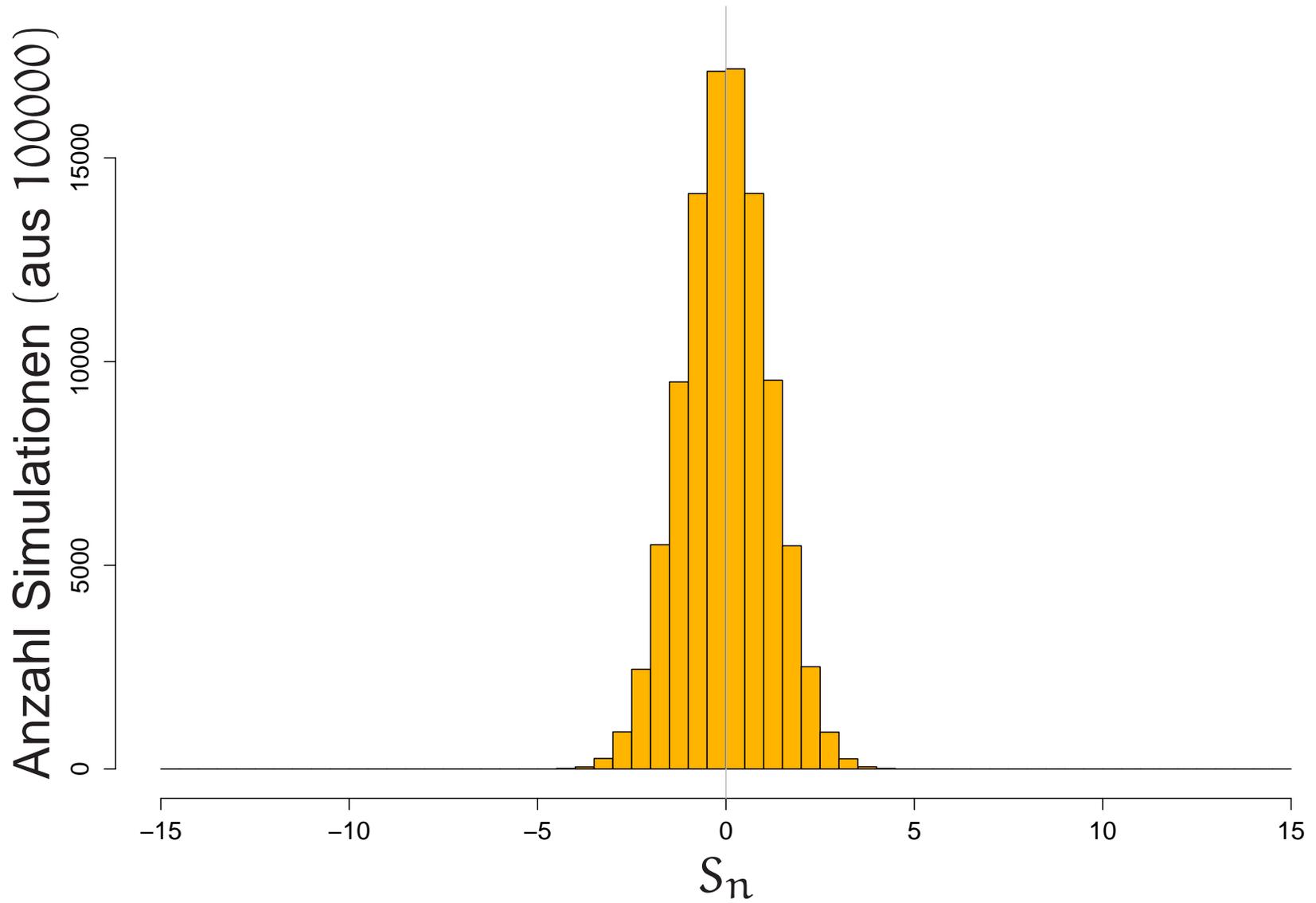
Bisher: dynamische Skalierung



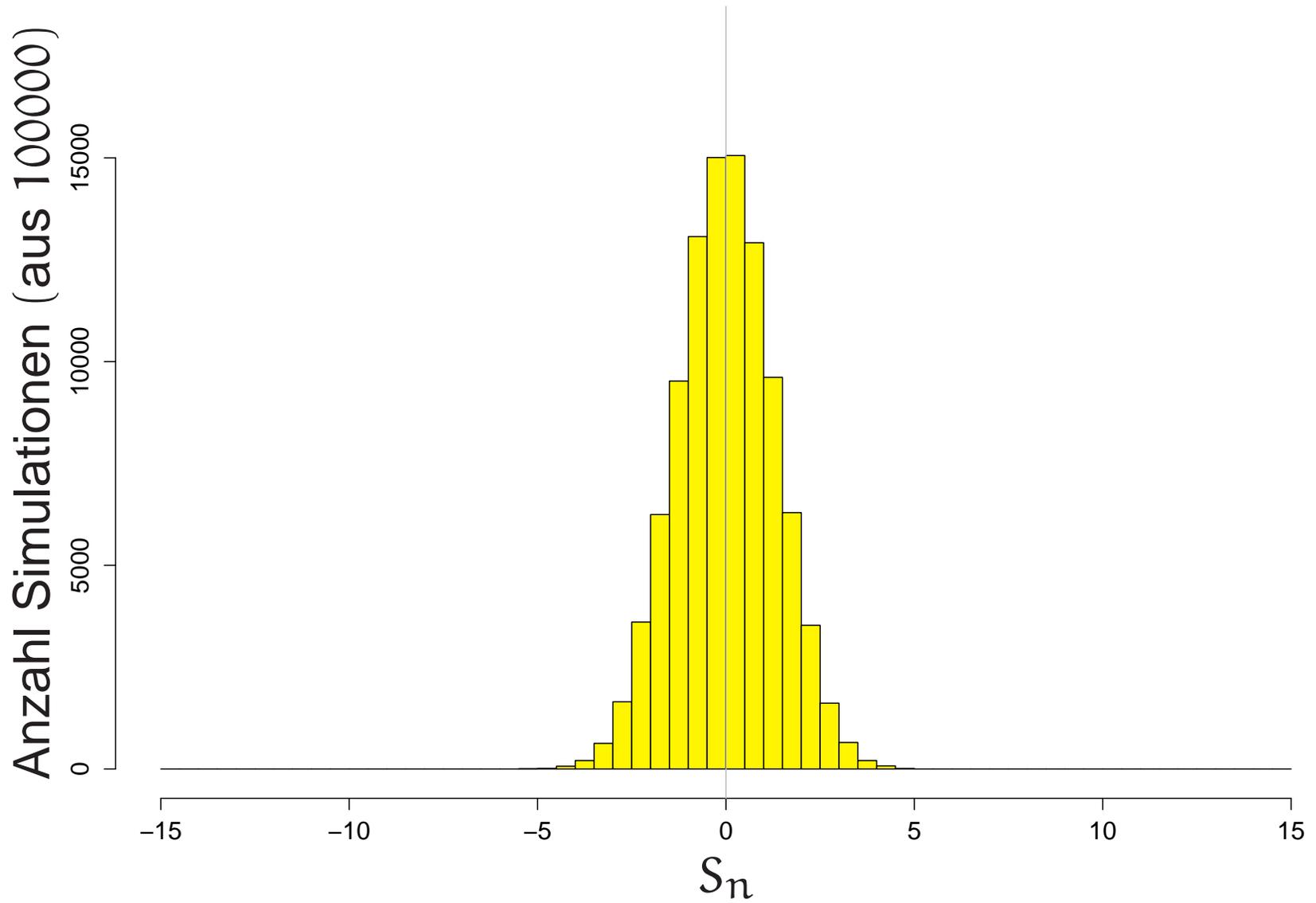
Jetzt: feste Skalierung



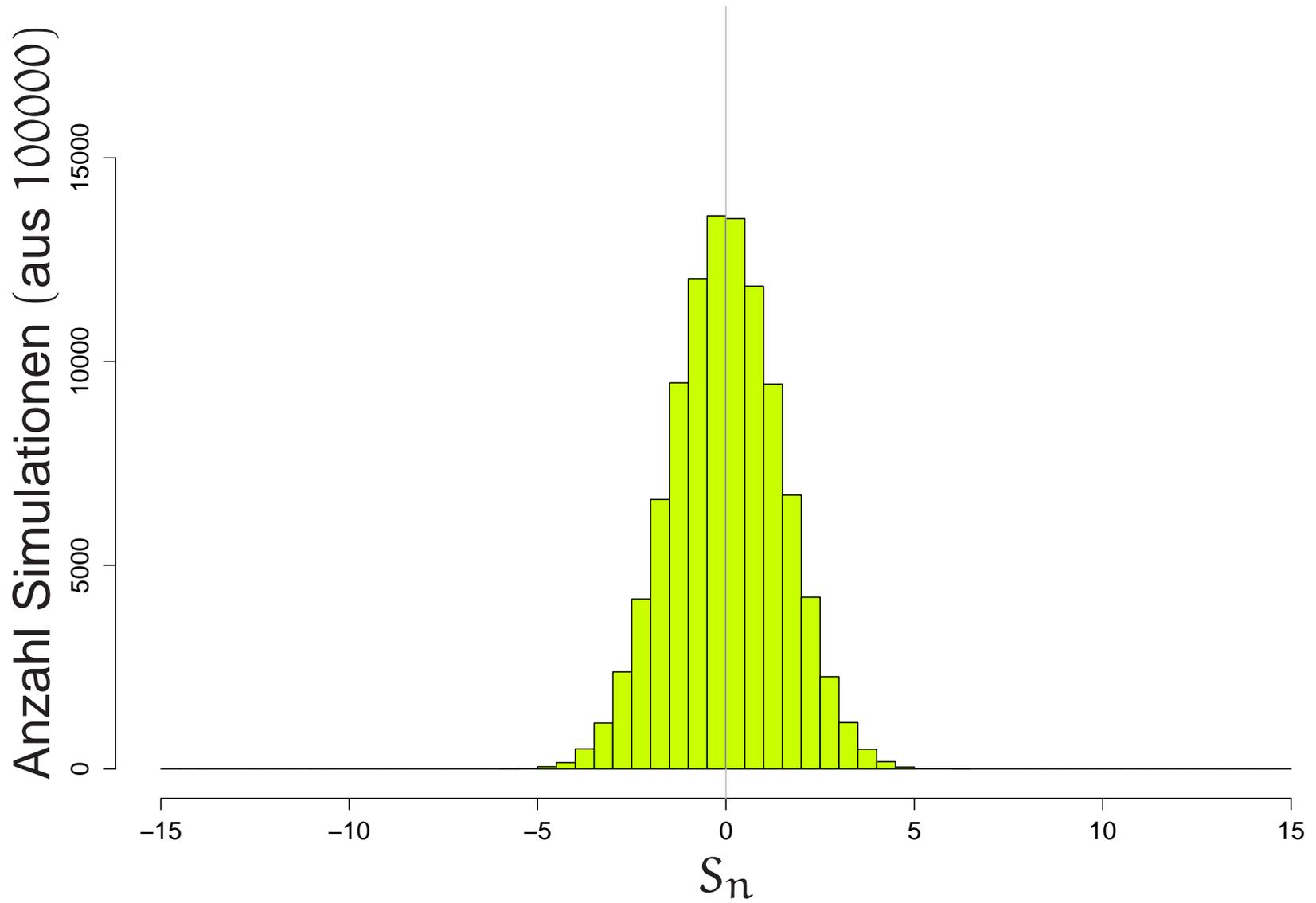
Verteilung von S_n ($n = 15$)



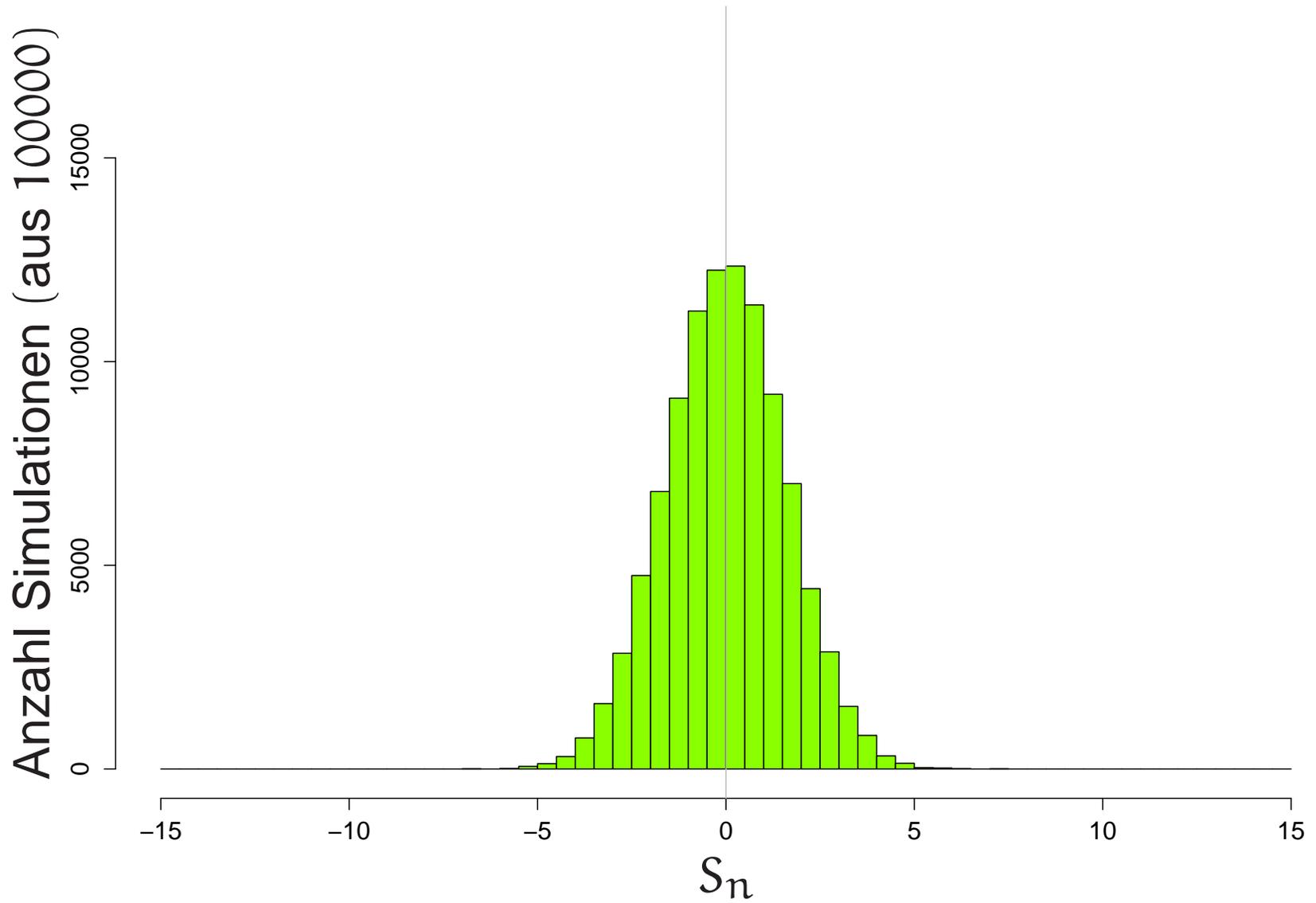
Verteilung von S_n ($n = 20$)



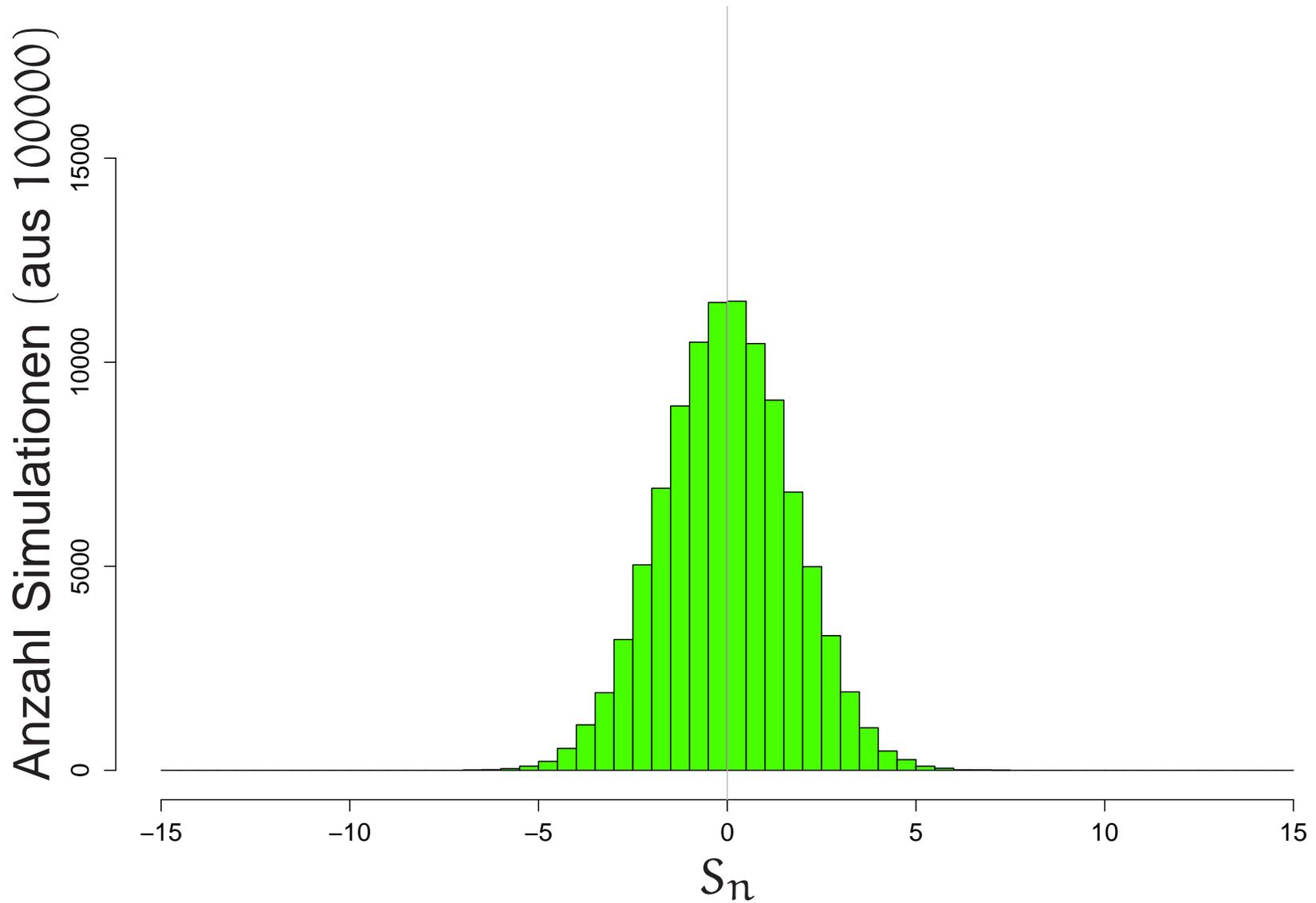
Verteilung von S_n ($n = 25$)



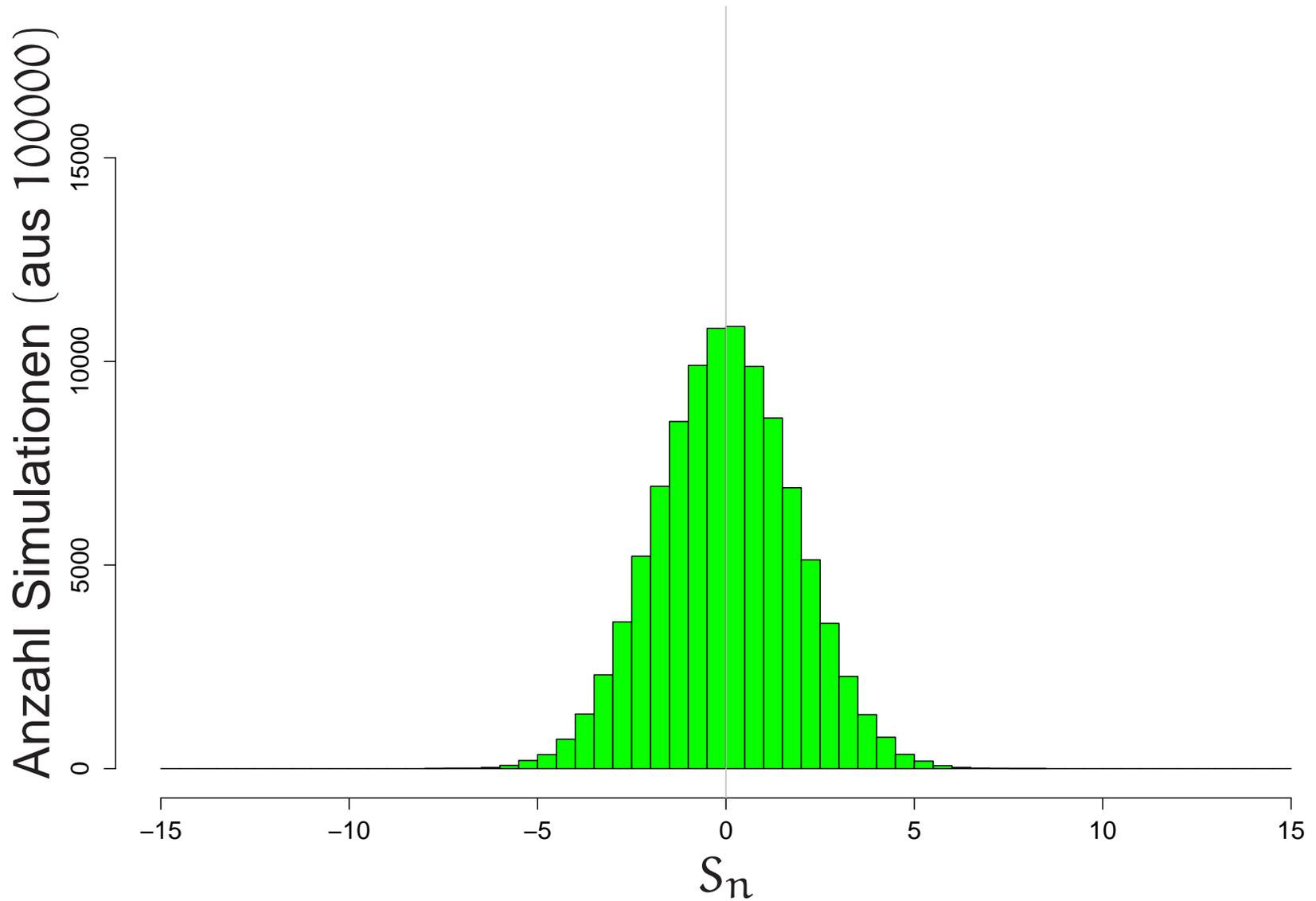
Verteilung von S_n ($n = 30$)



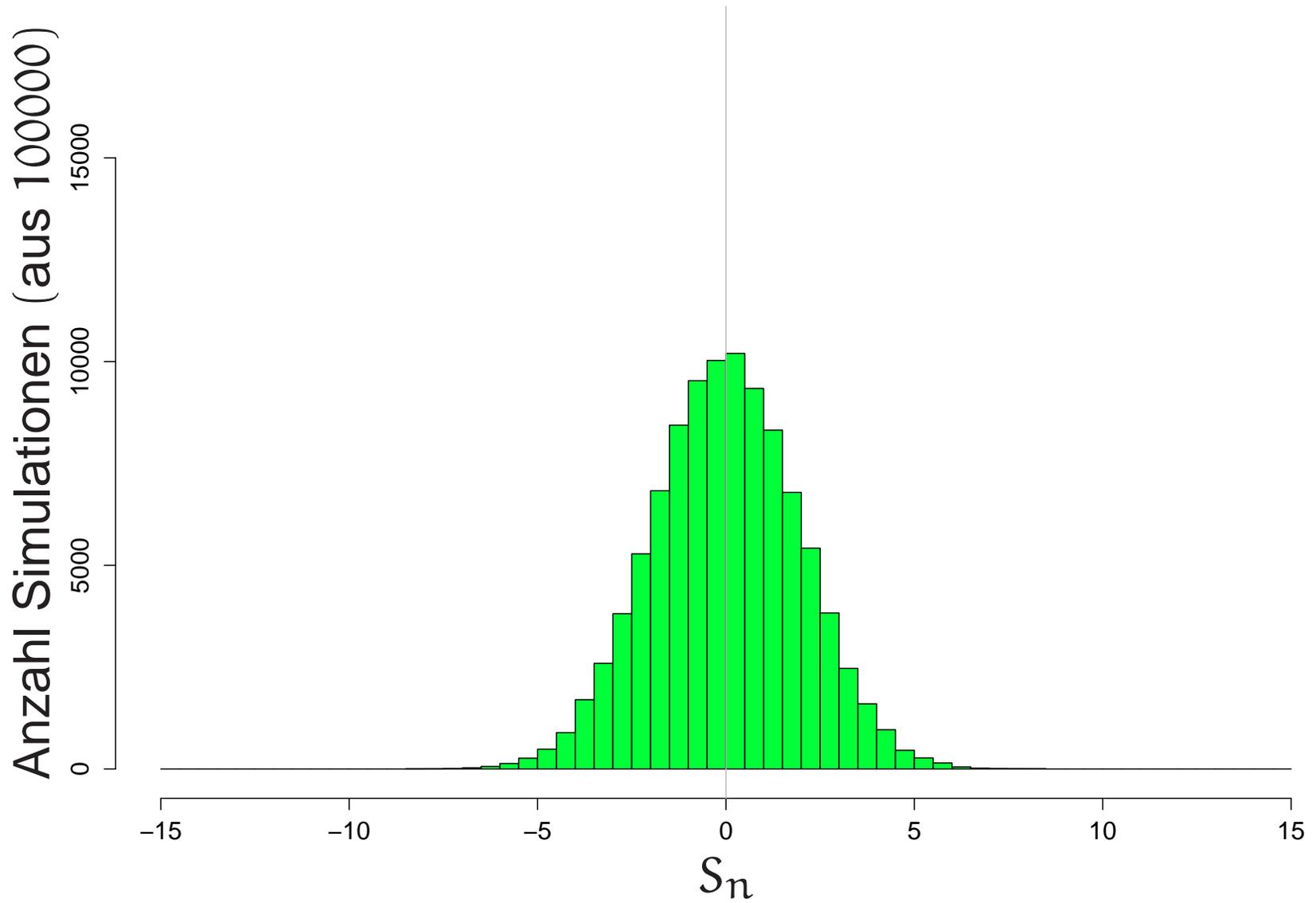
Verteilung von S_n ($n = 35$)



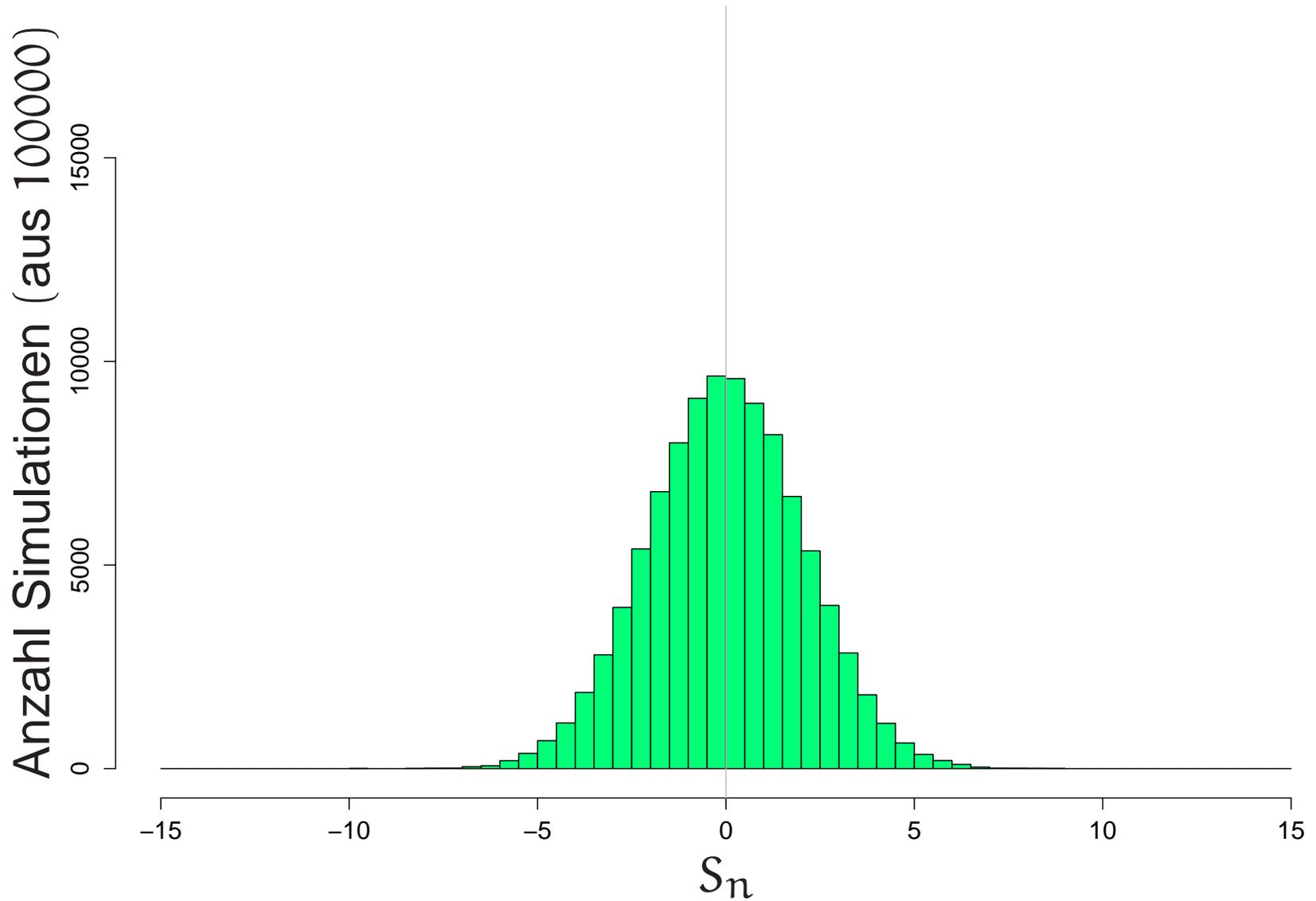
Verteilung von S_n ($n = 40$)



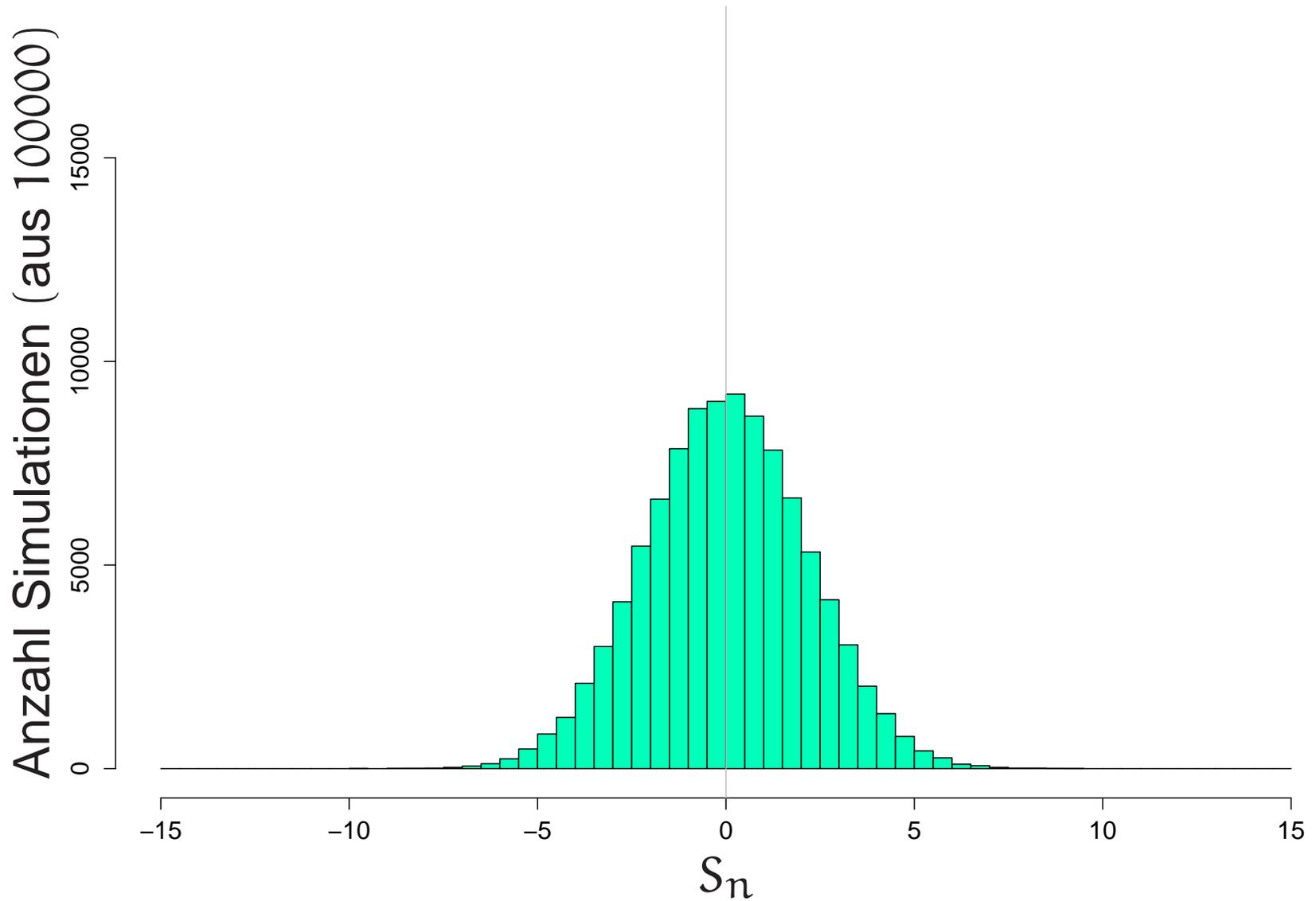
Verteilung von S_n ($n = 45$)



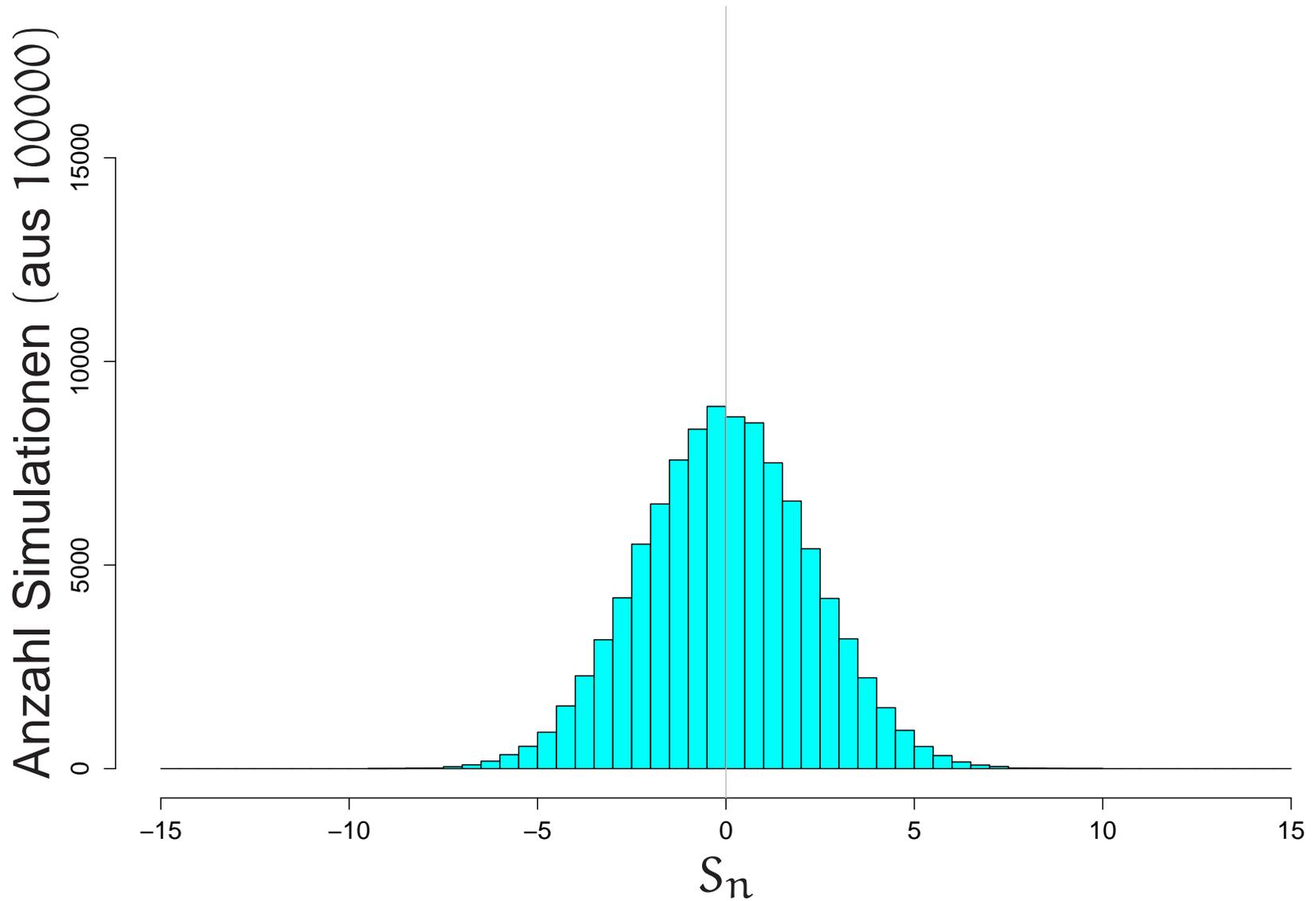
Verteilung von S_n ($n = 50$)



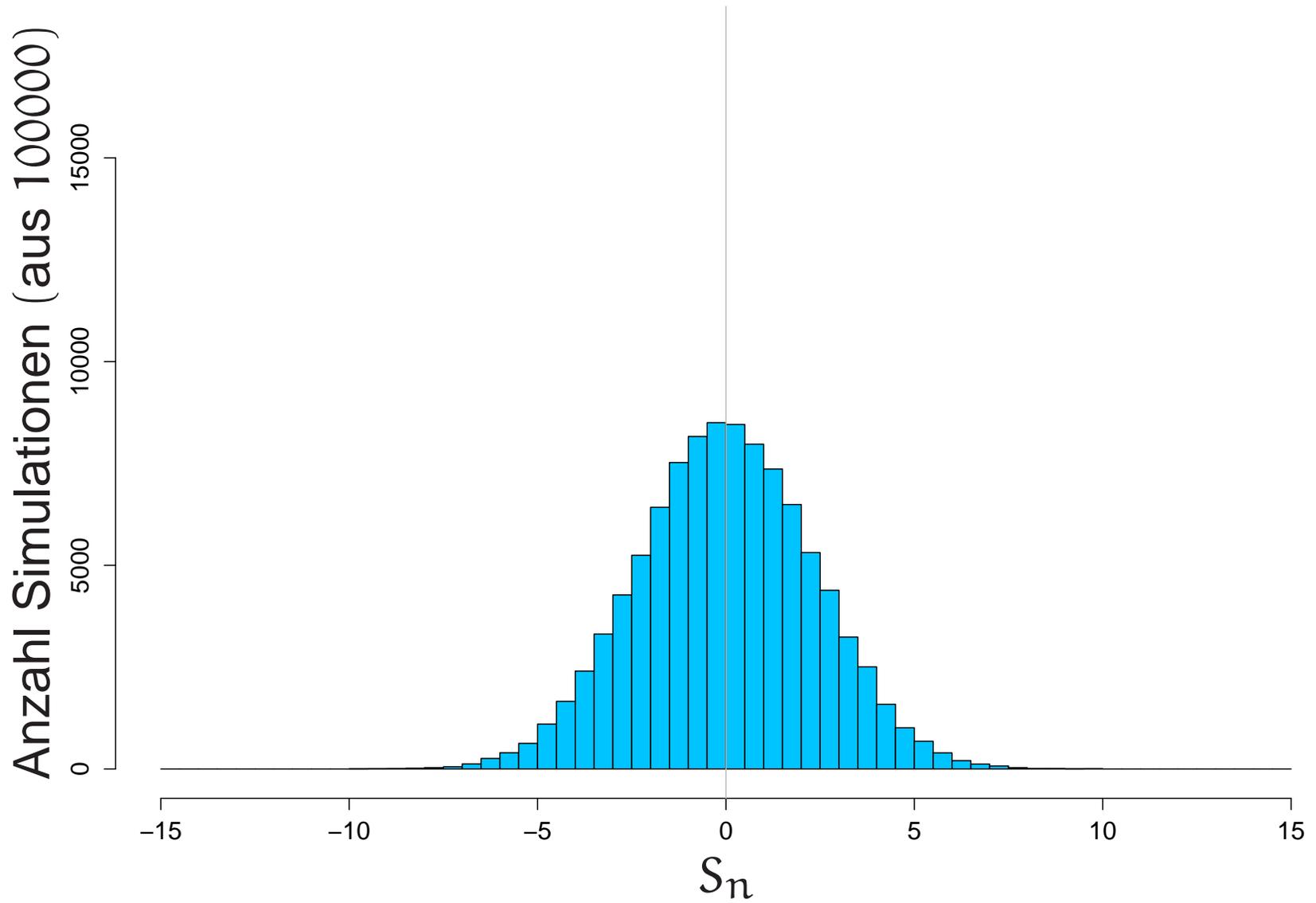
Verteilung von S_n ($n = 55$)



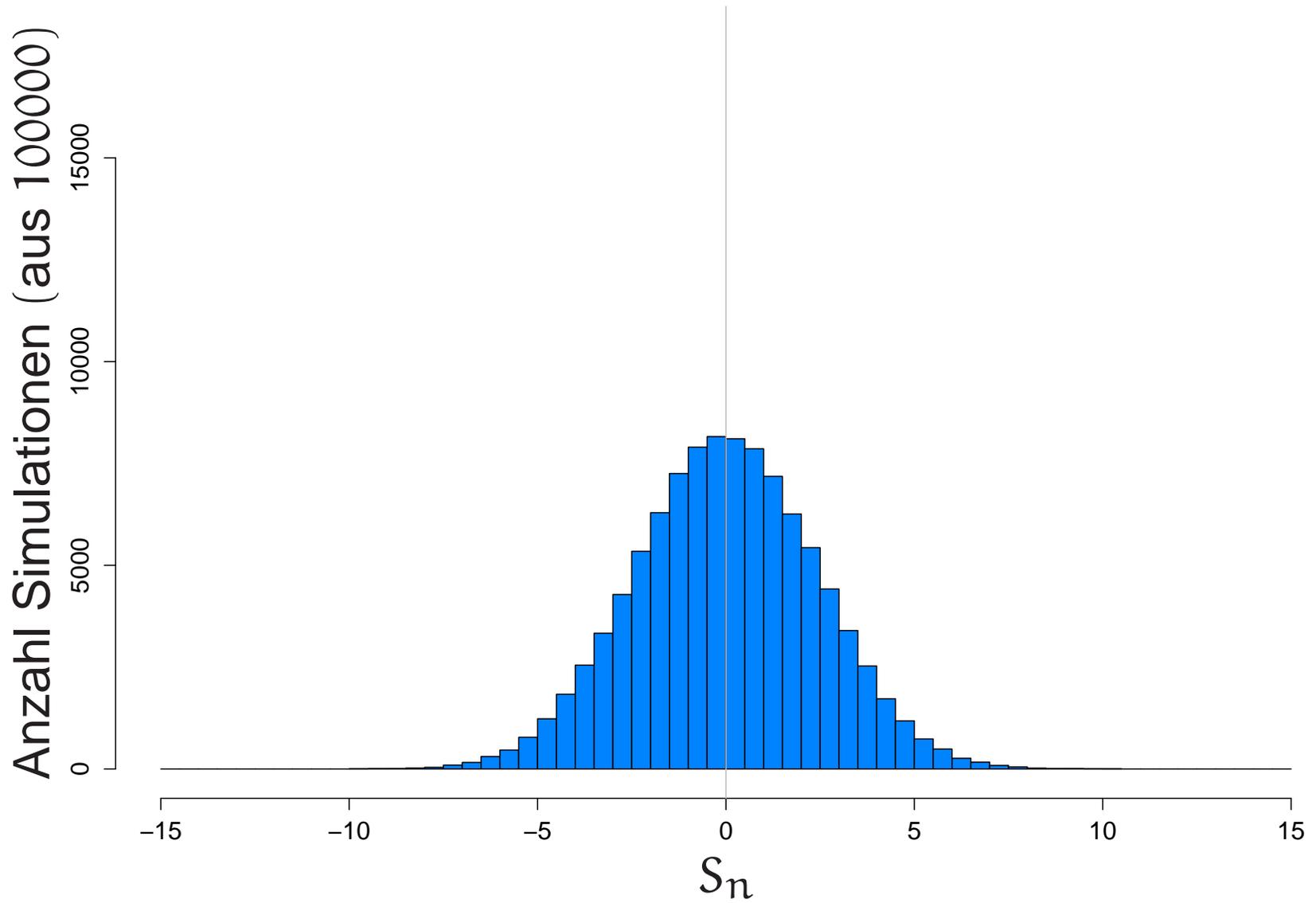
Verteilung von S_n ($n = 60$)



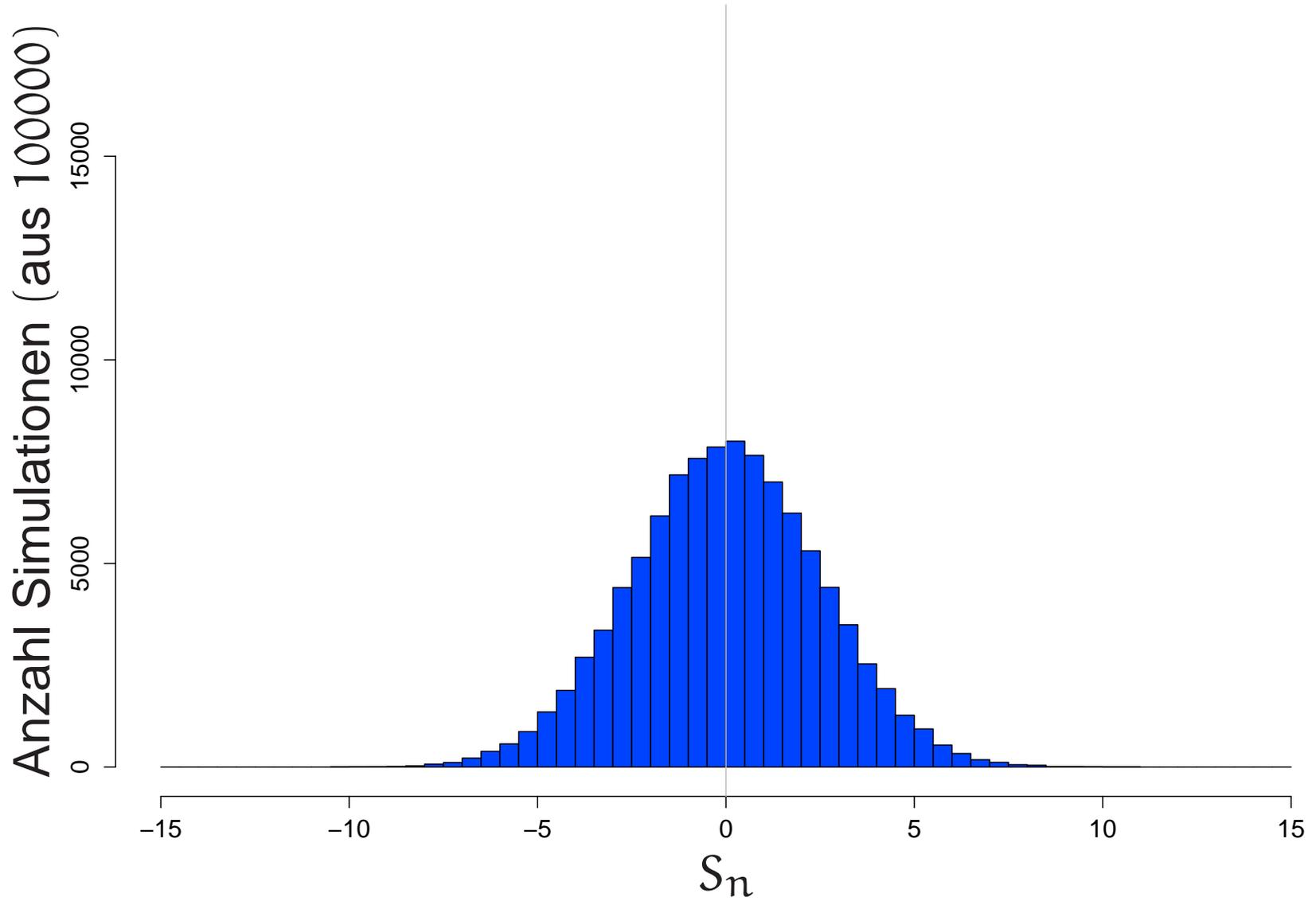
Verteilung von S_n ($n = 65$)



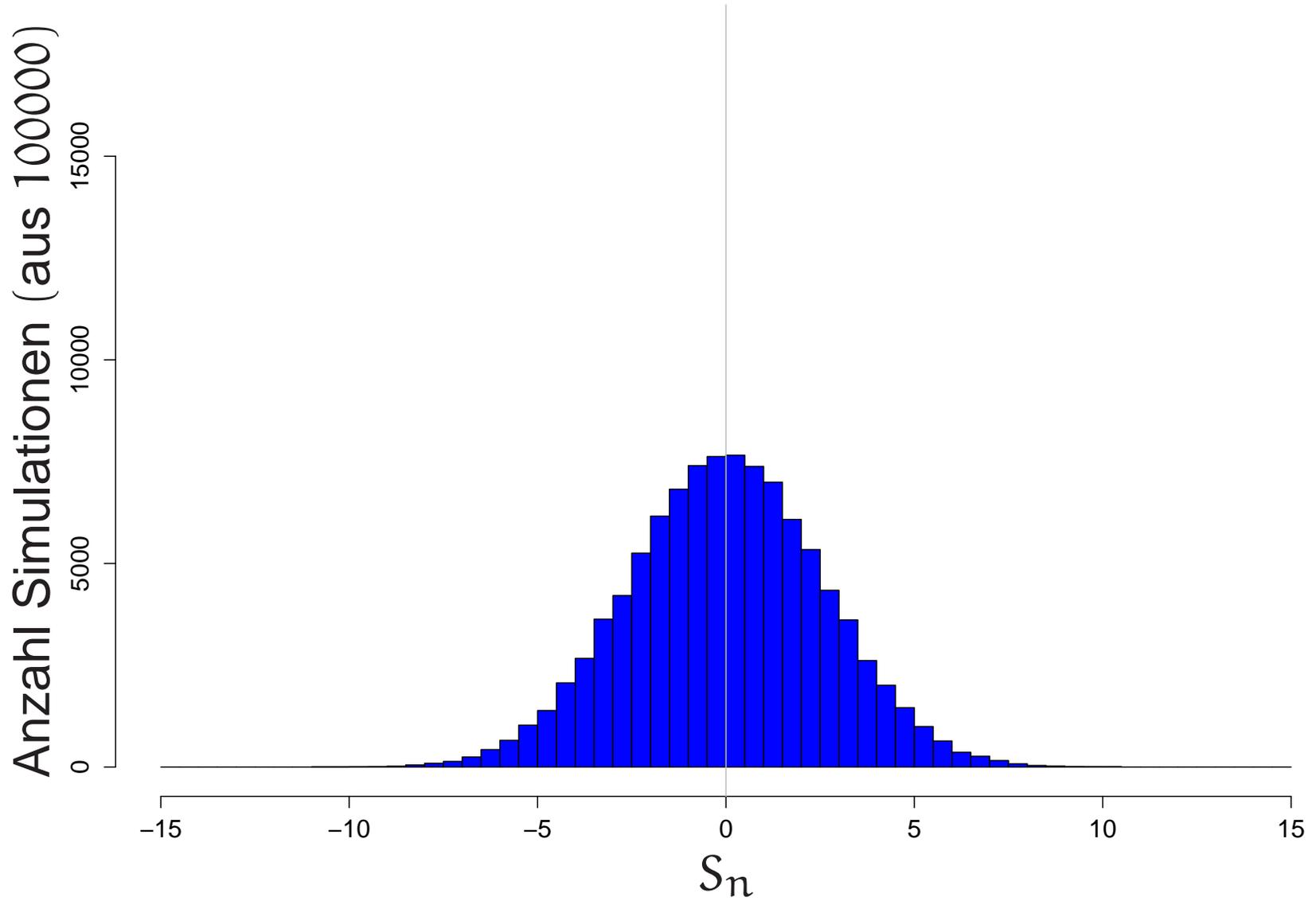
Verteilung von S_n ($n = 70$)



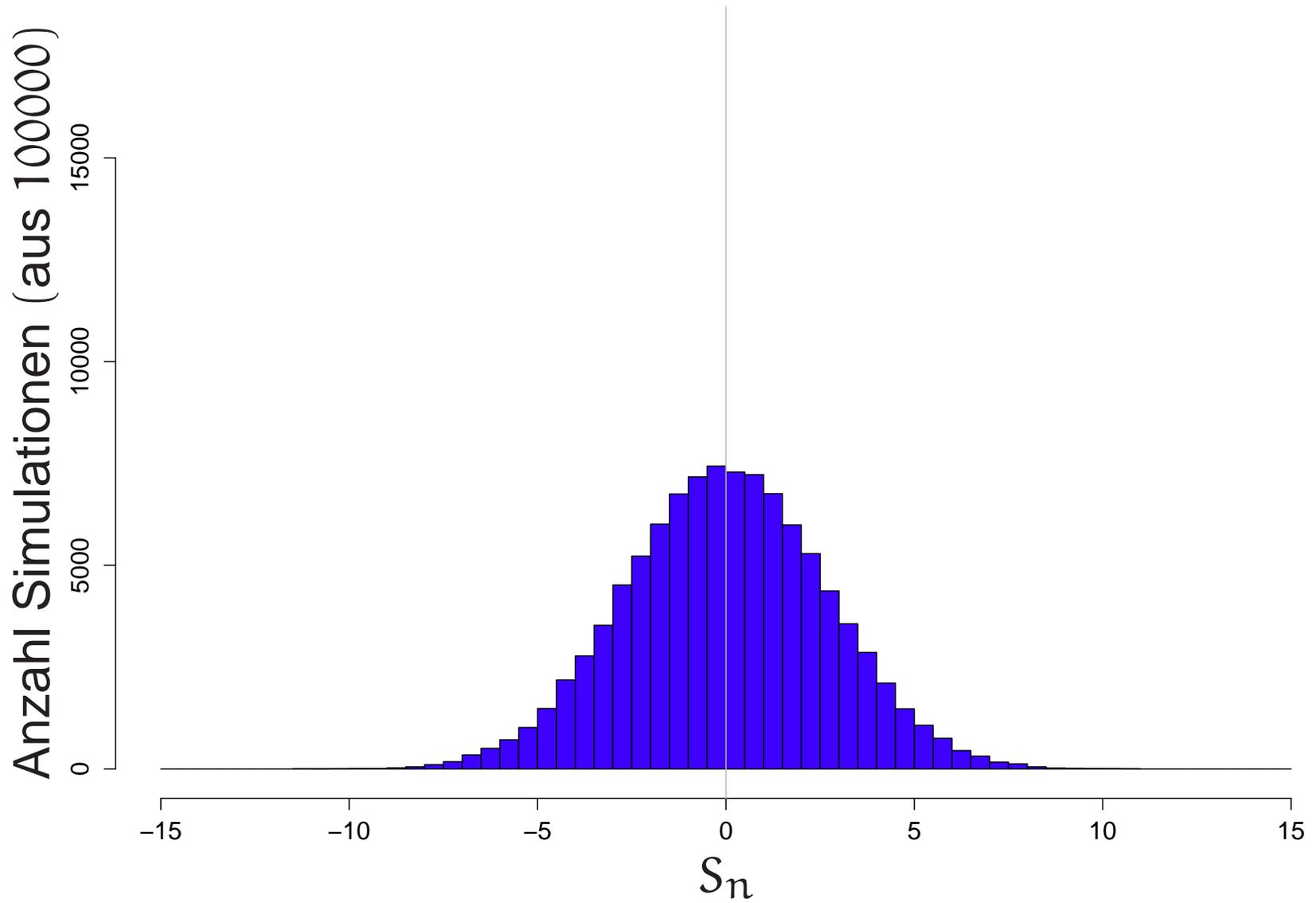
Verteilung von S_n ($n = 75$)



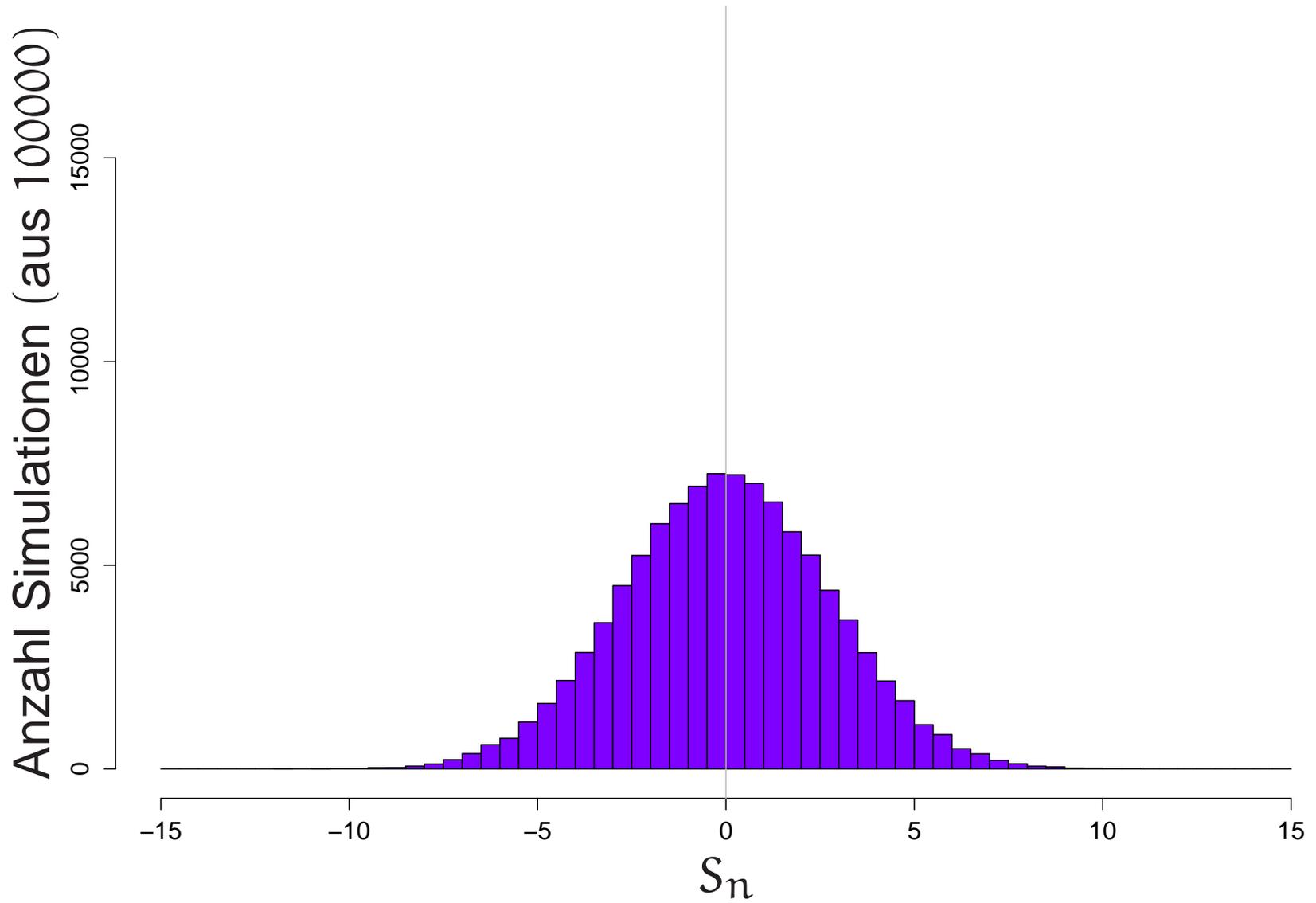
Verteilung von S_n ($n = 80$)



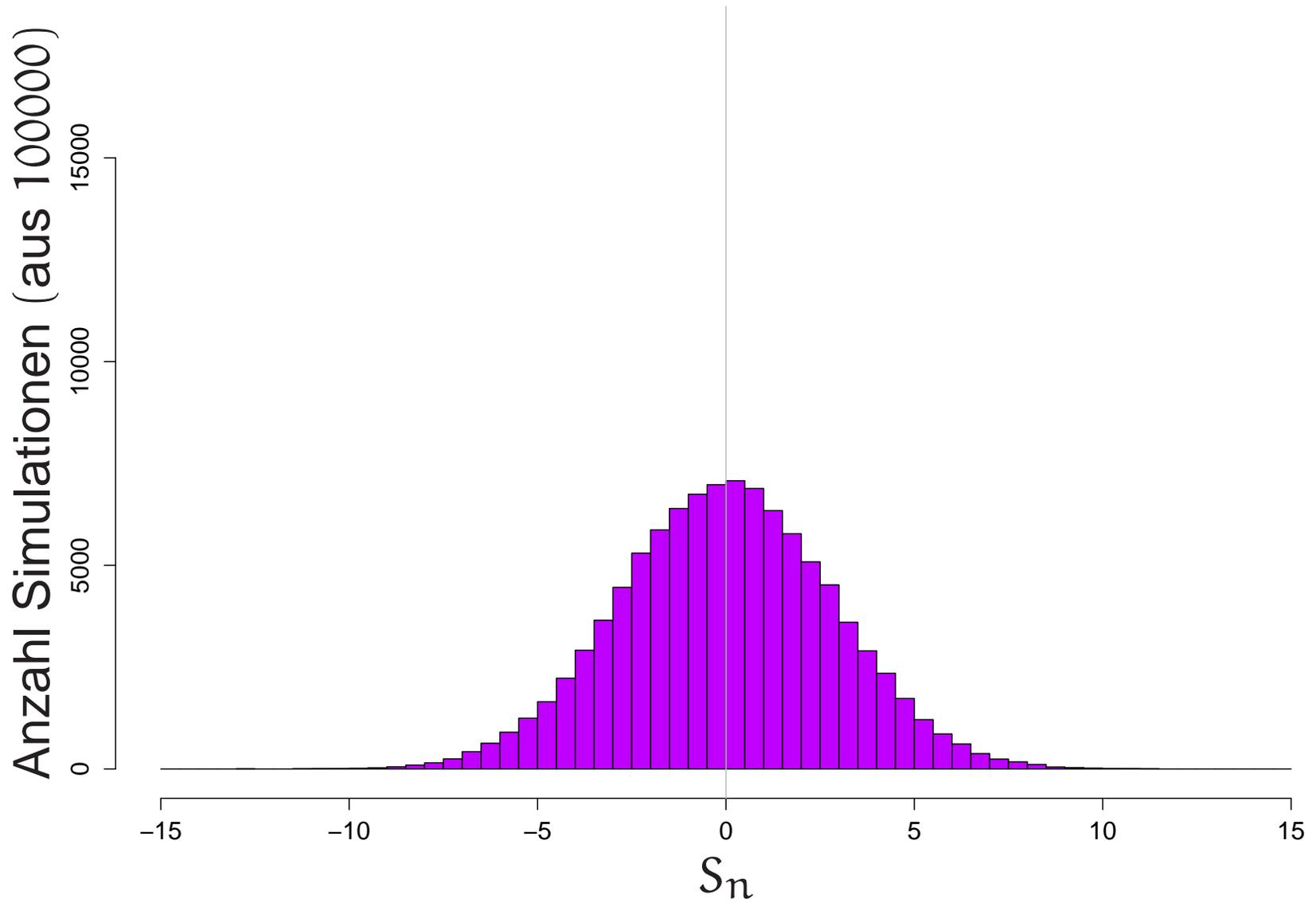
Verteilung von S_n ($n = 85$)



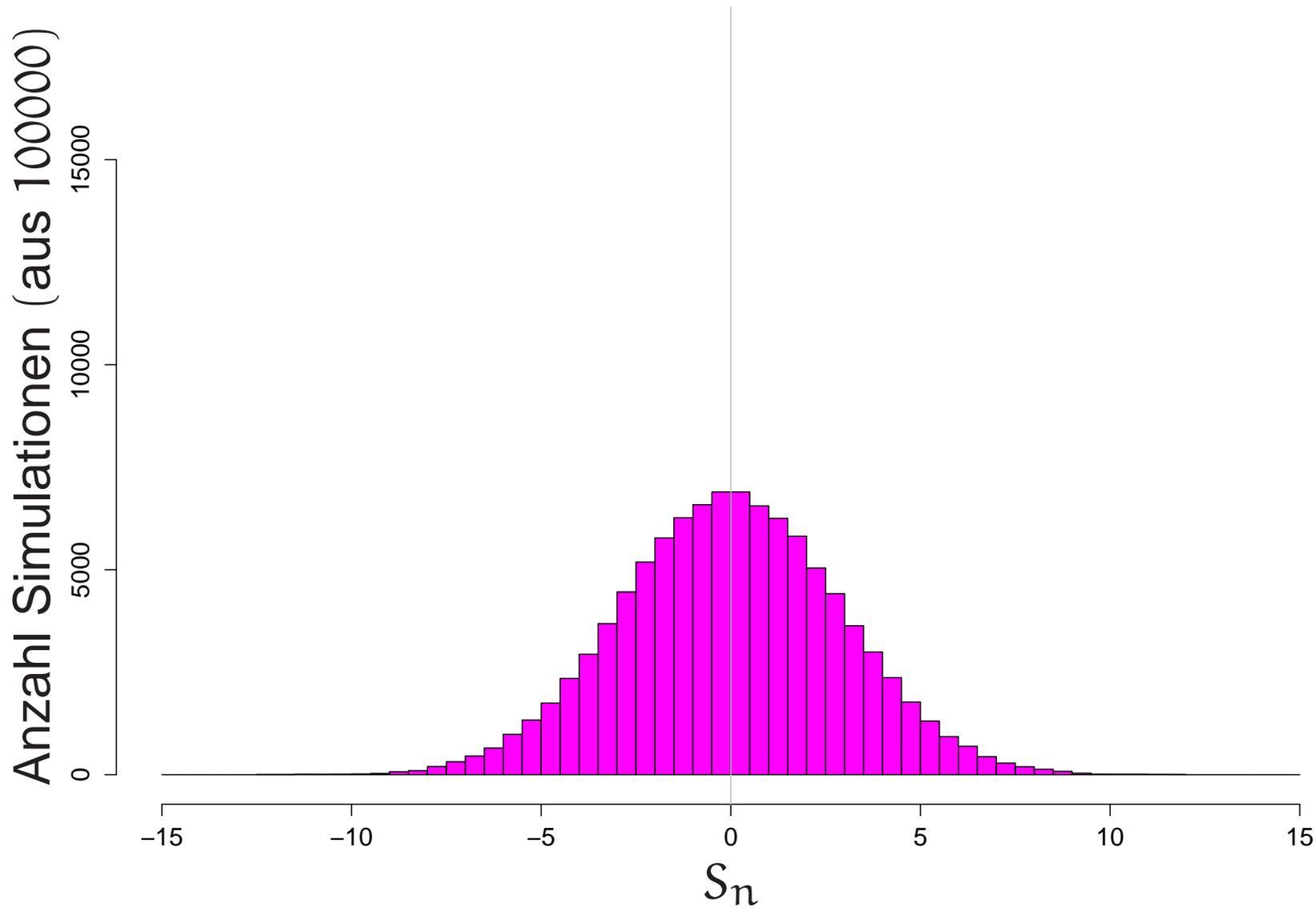
Verteilung von S_n ($n = 90$)



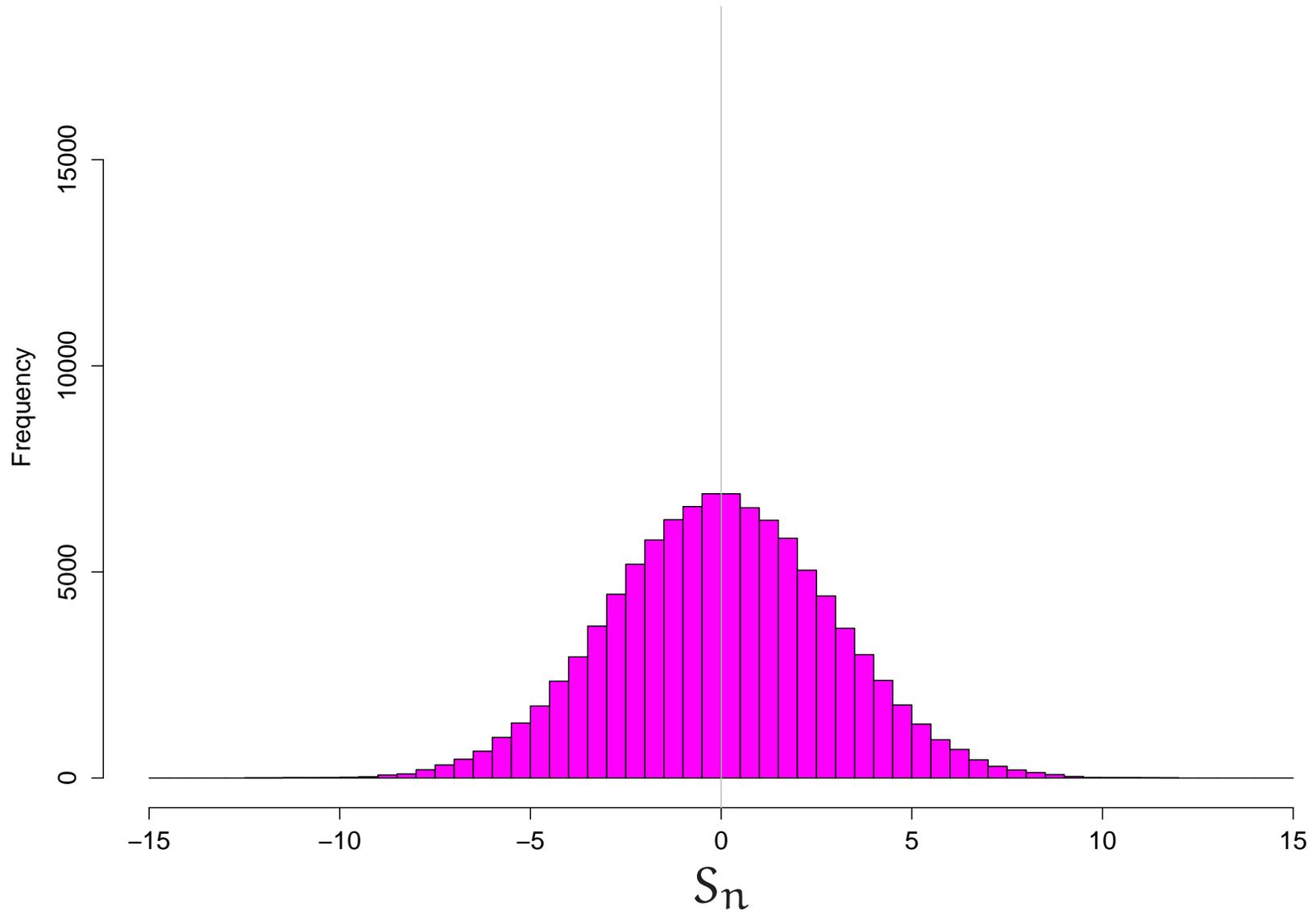
Verteilung von S_n ($n = 95$)



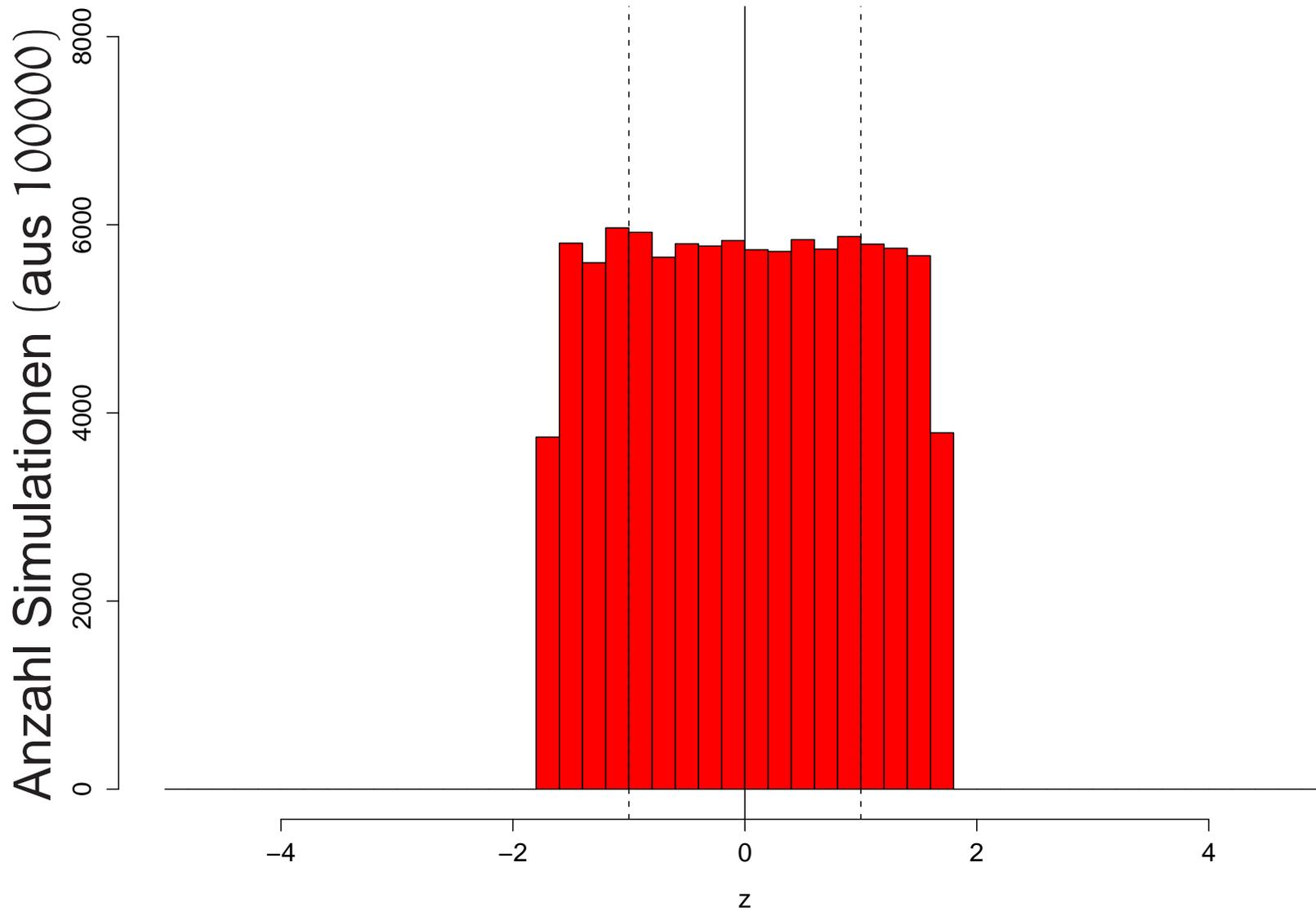
Verteilung von S_n ($n = 100$)



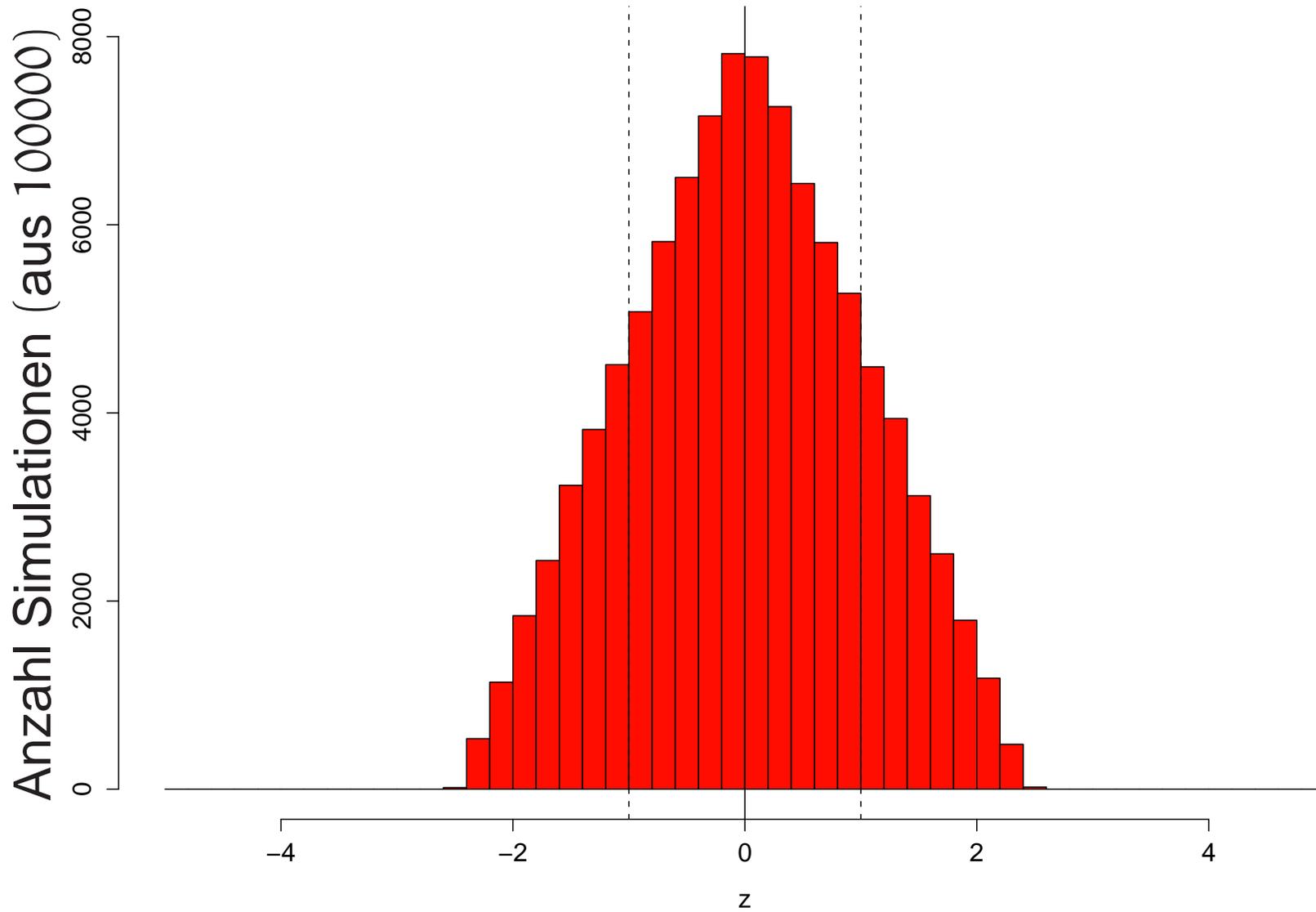
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n}$



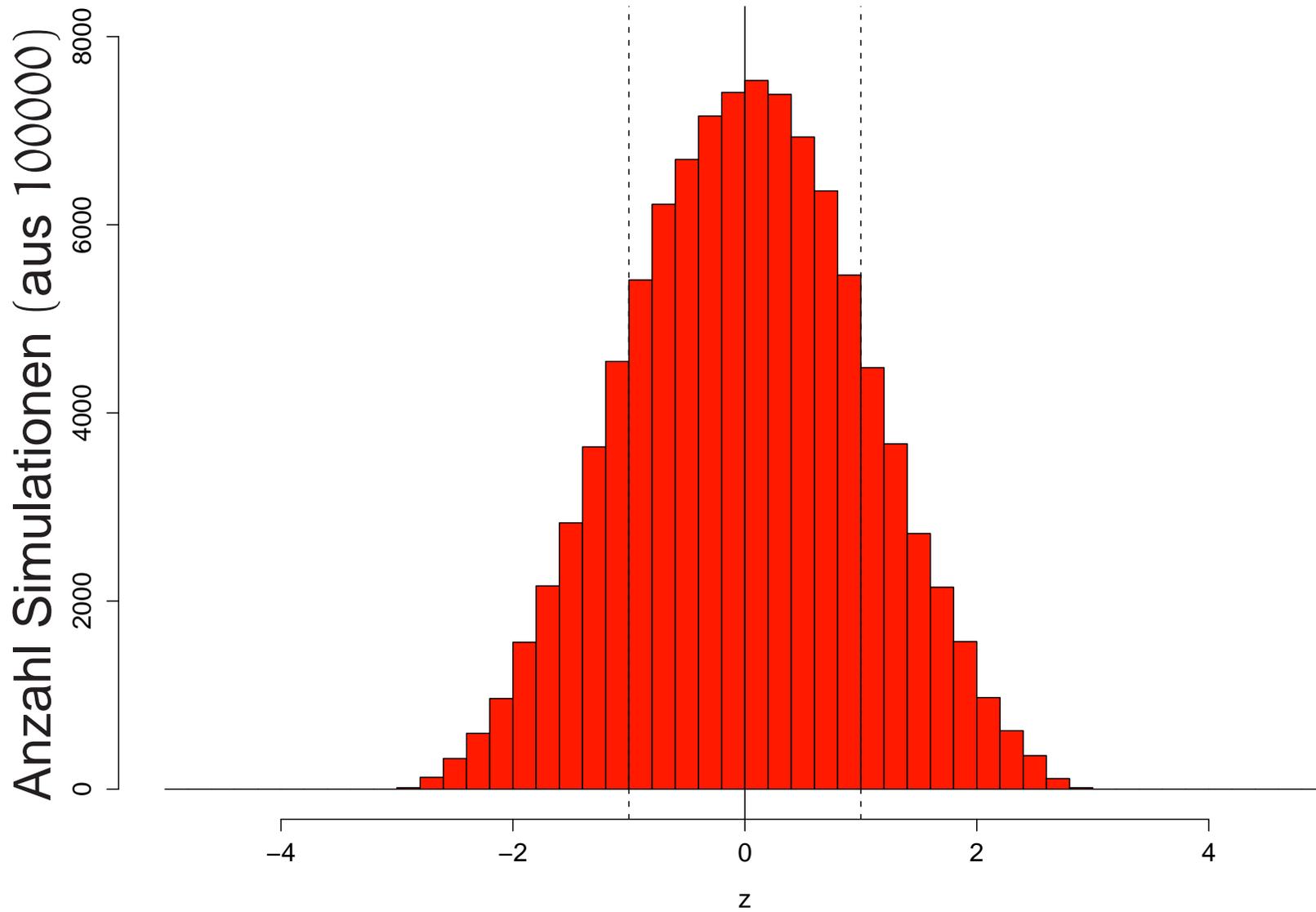
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 1)$



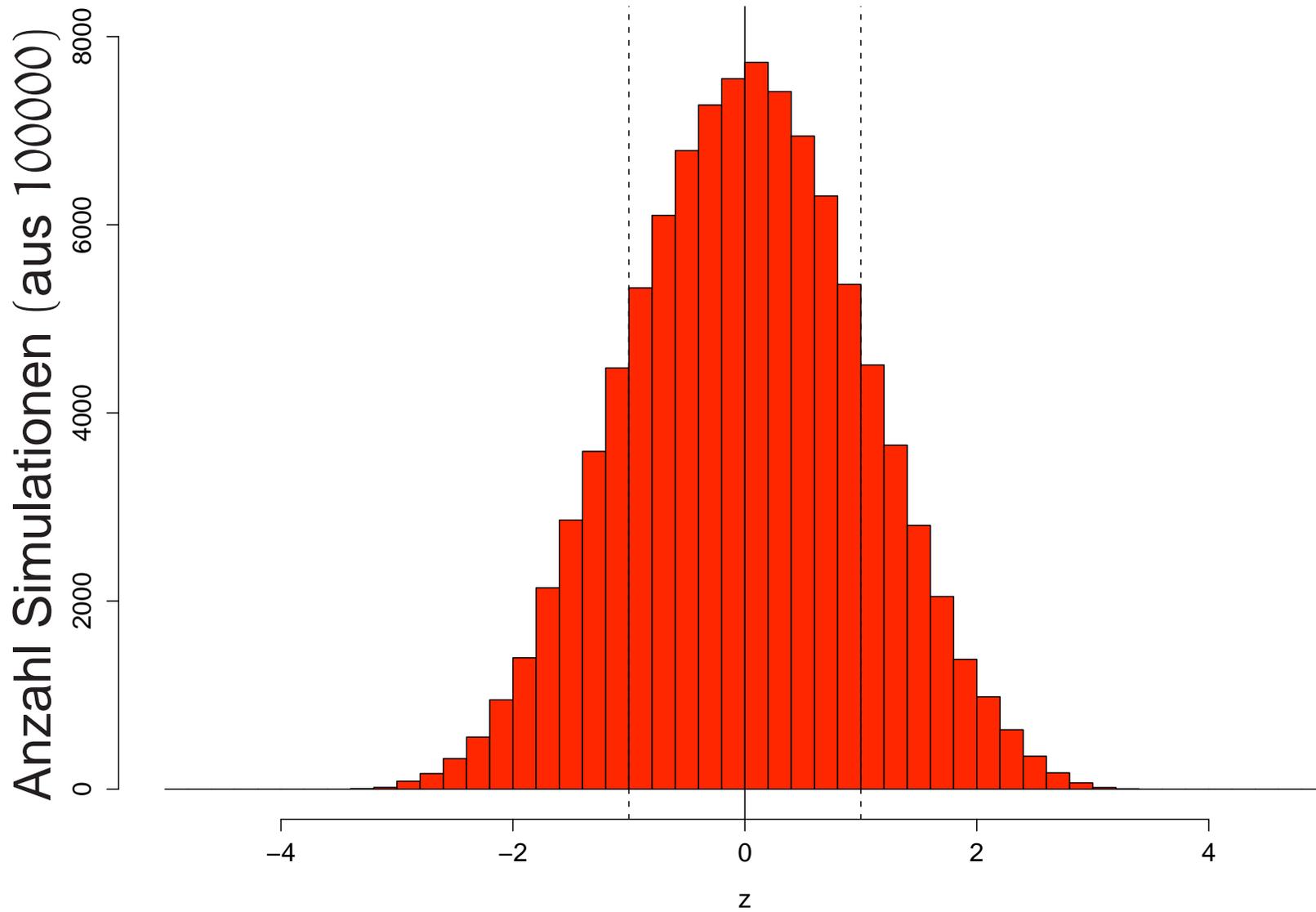
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 2)$



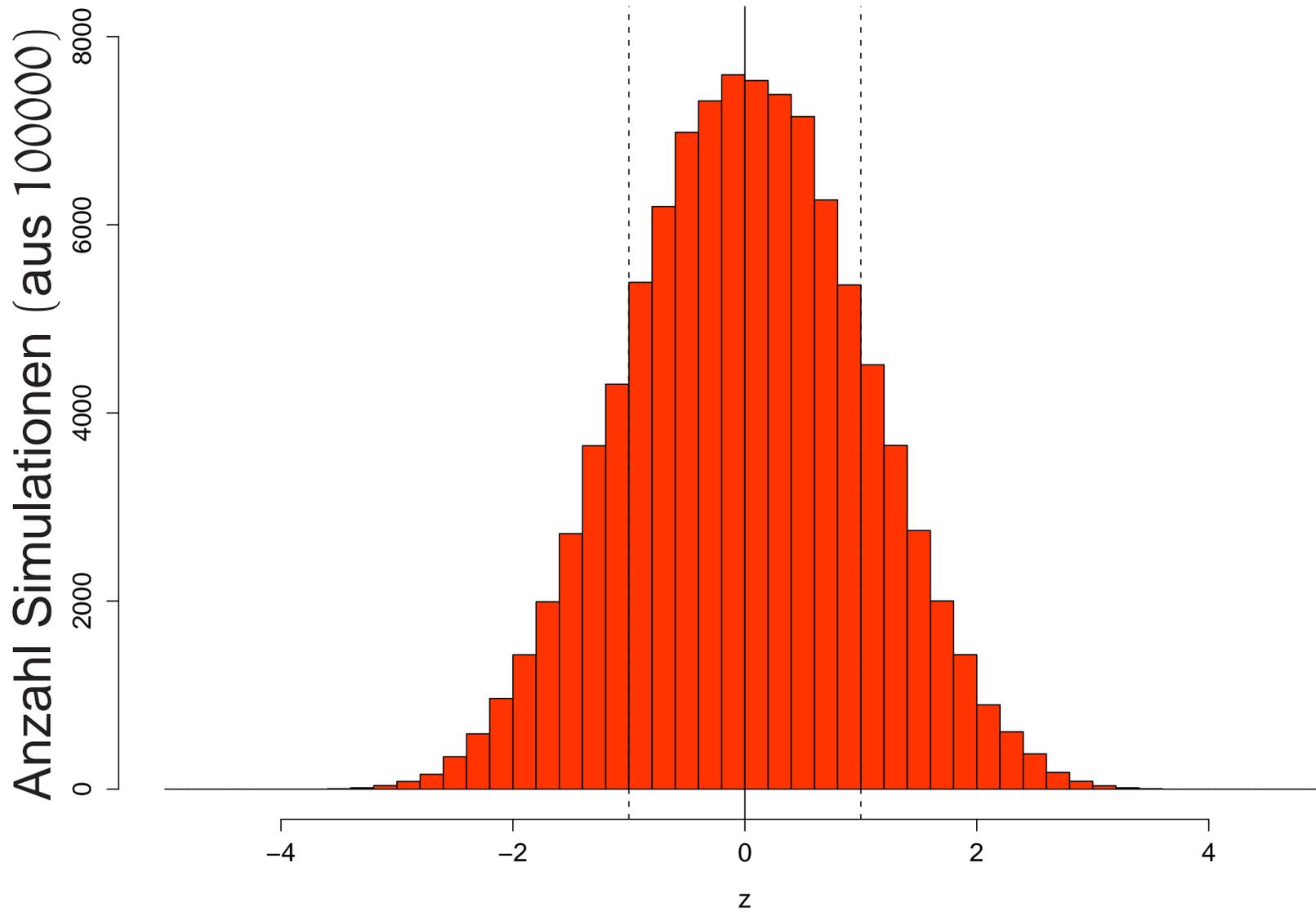
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 3)$



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 4)$

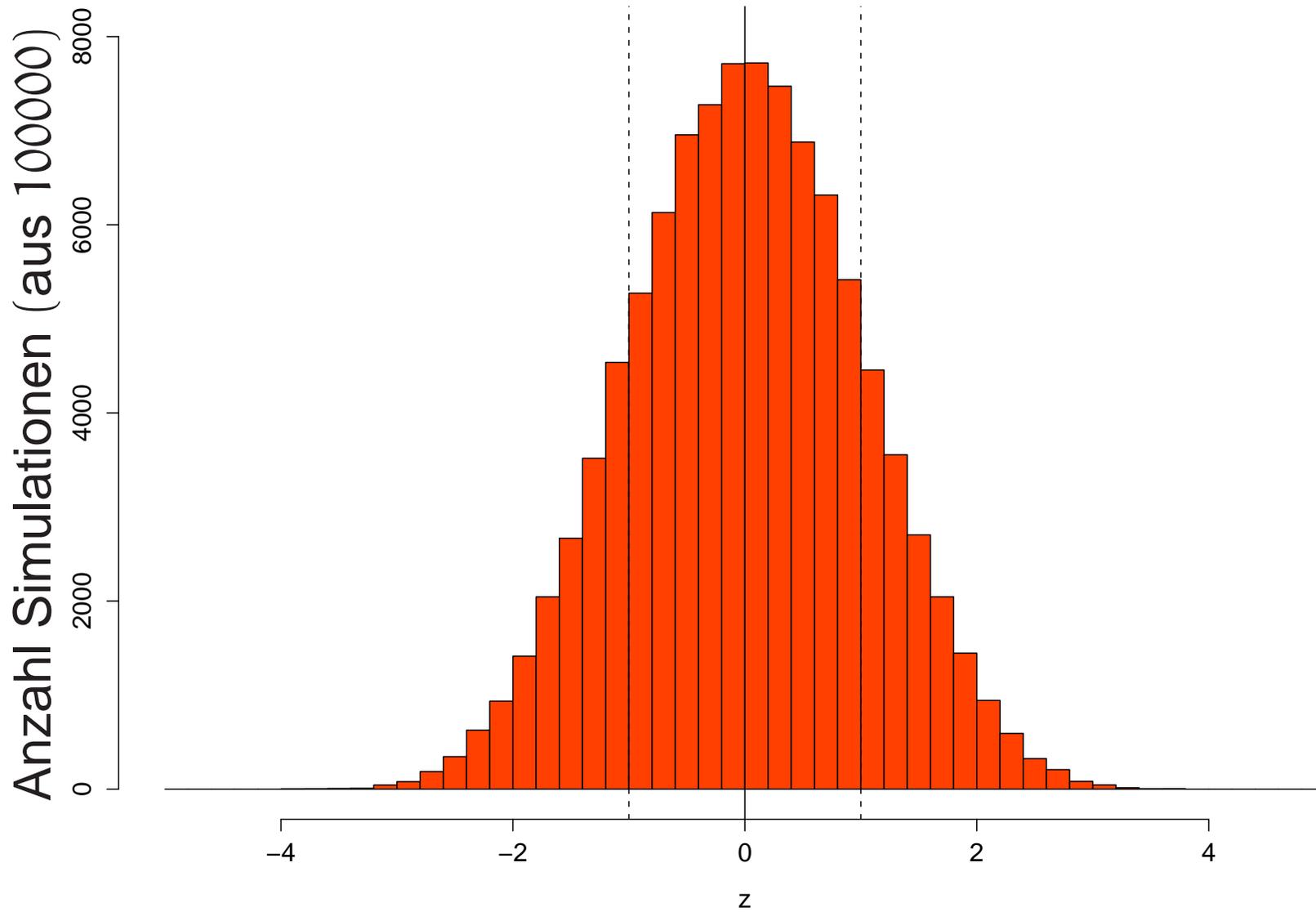


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n}$ ($n = 5$)



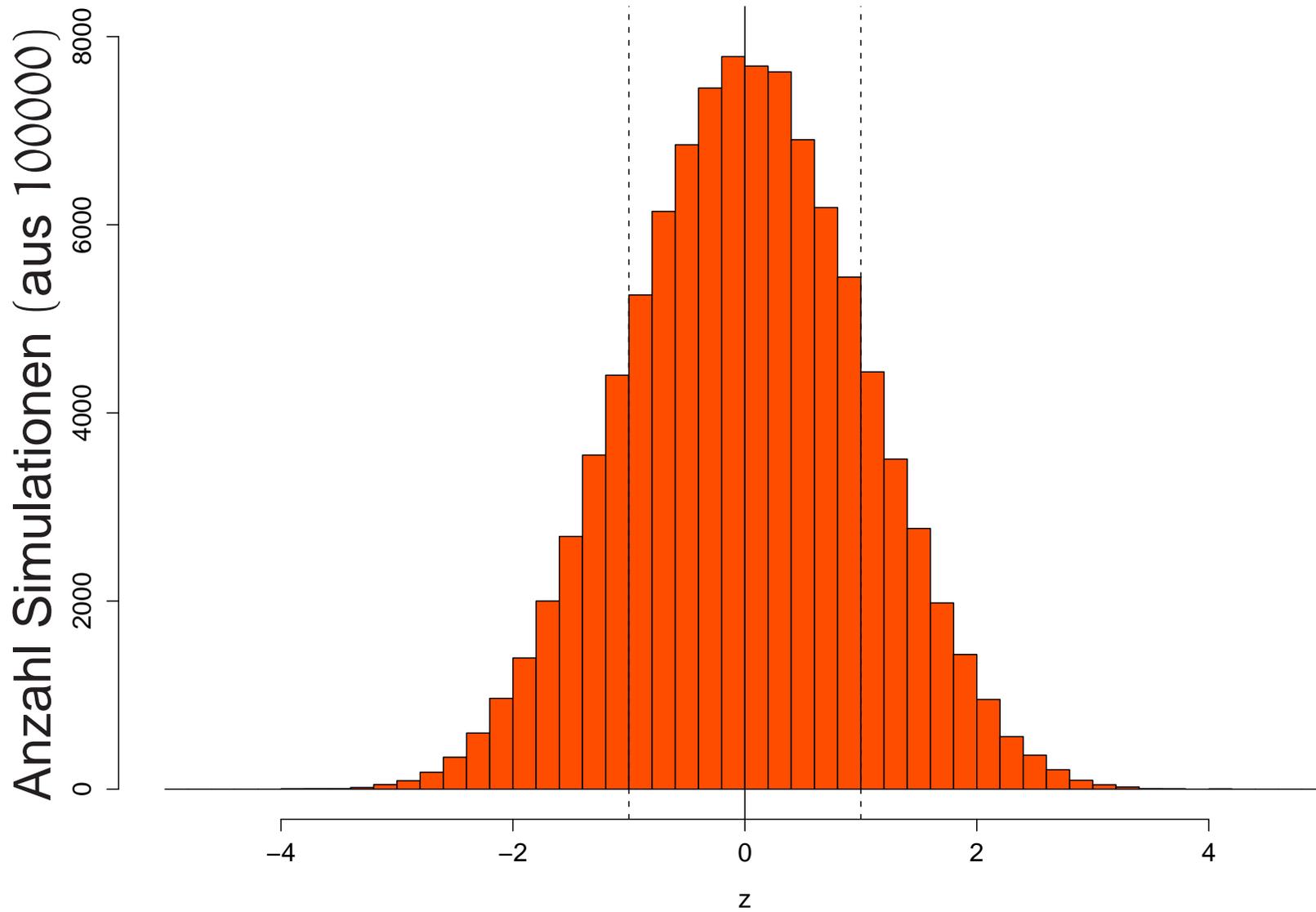
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 6)$$

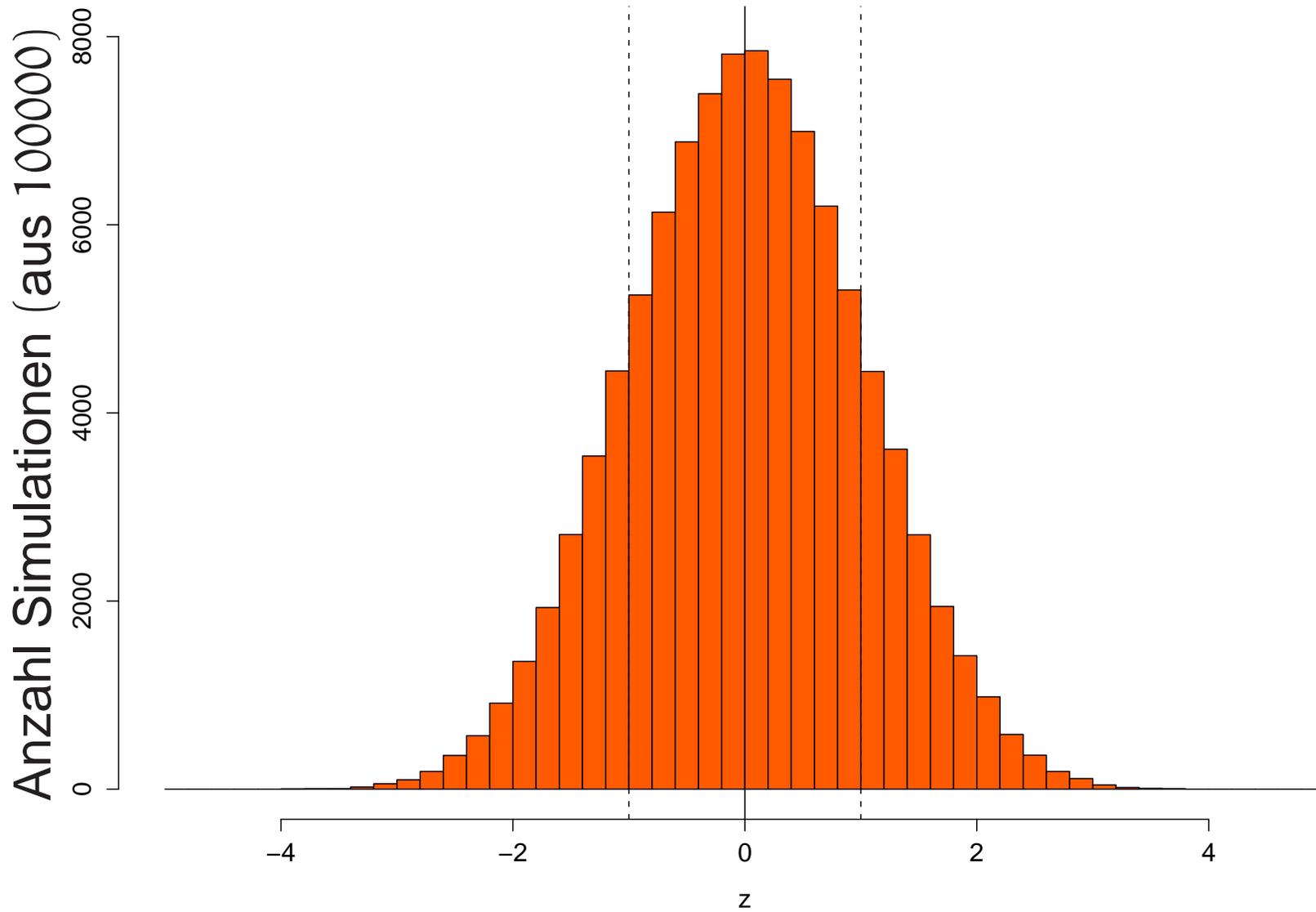


Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 7)$$

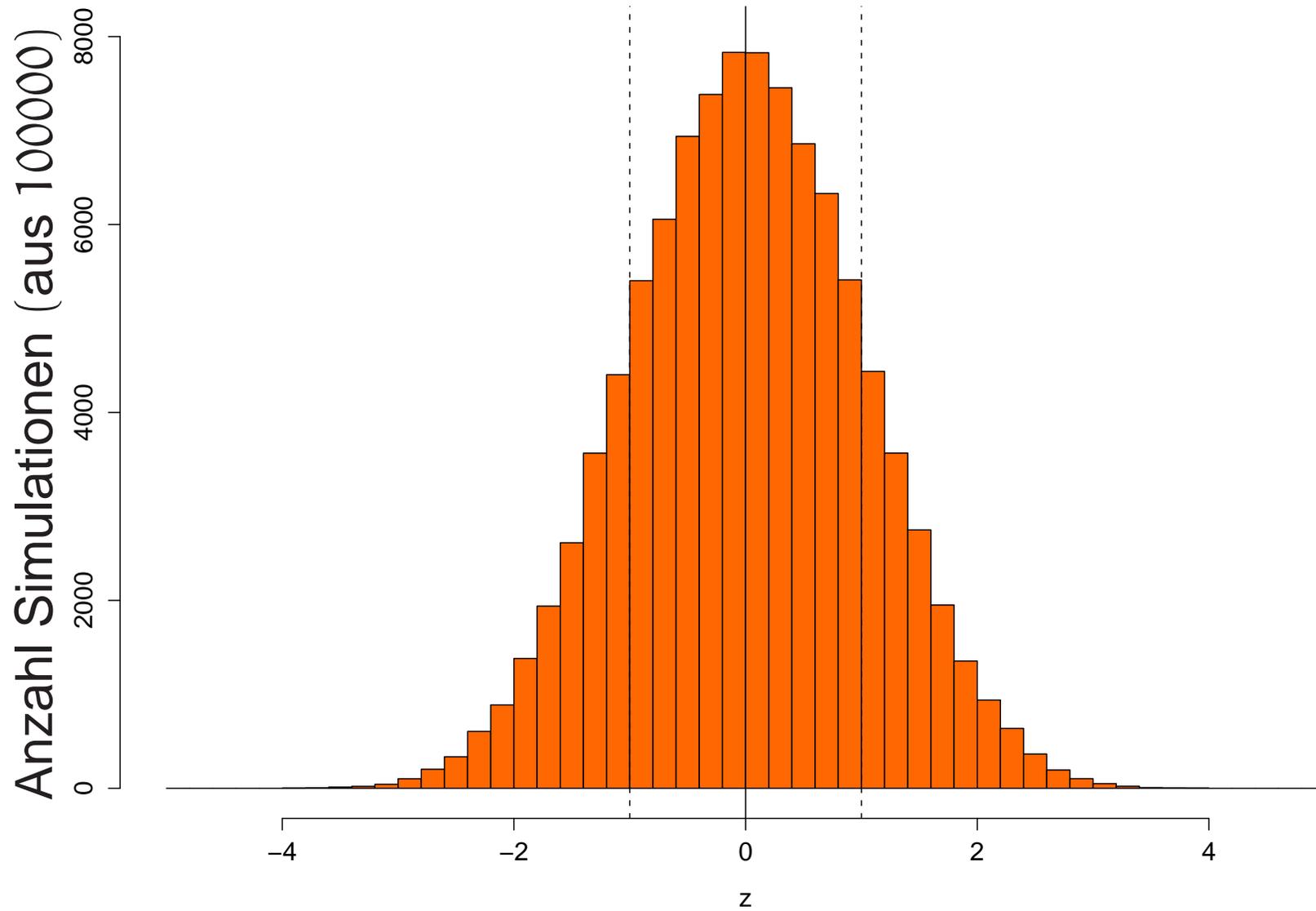


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 8)$



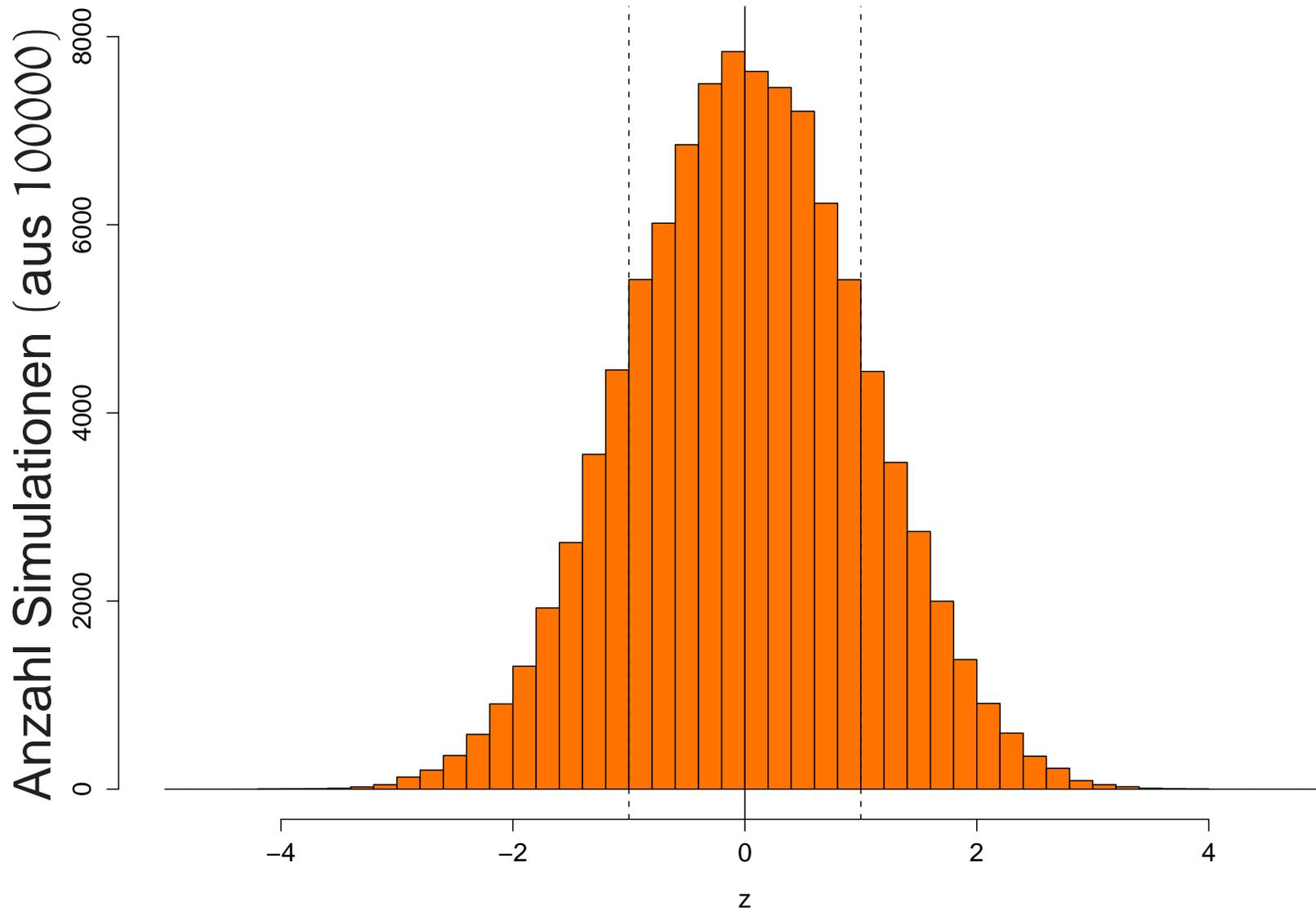
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 9)$$



Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 10)$$



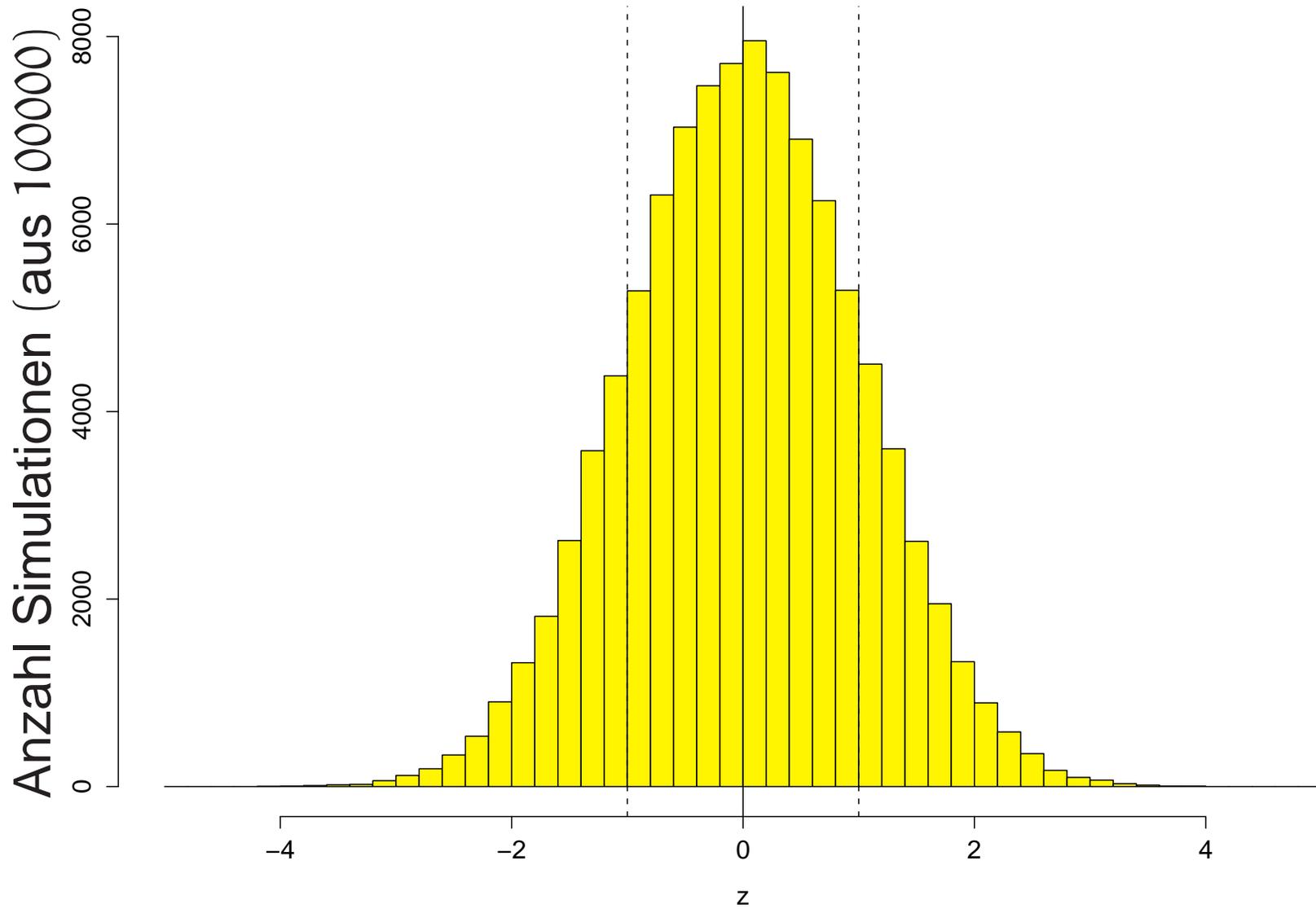
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 15)$$



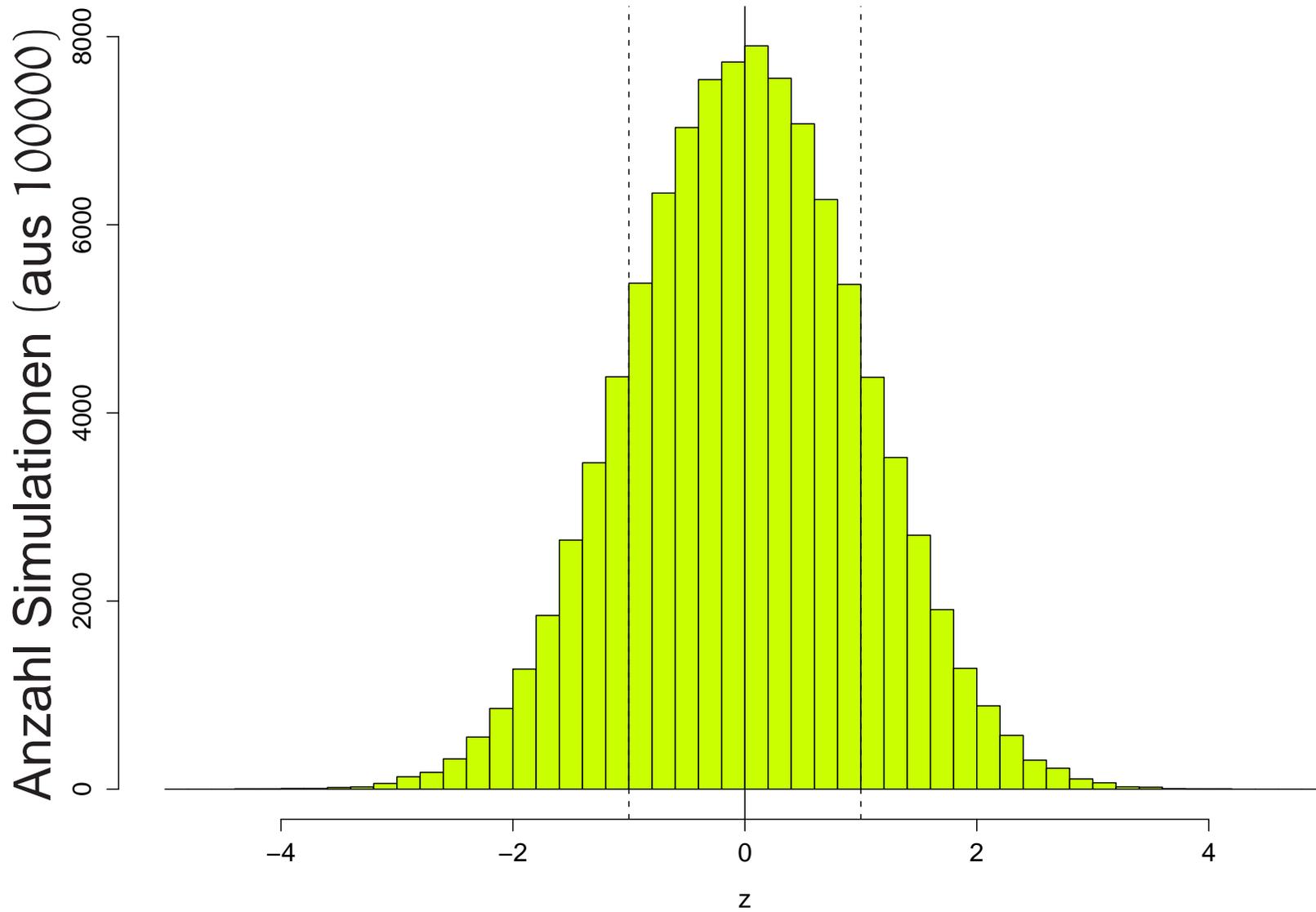
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 20)$$



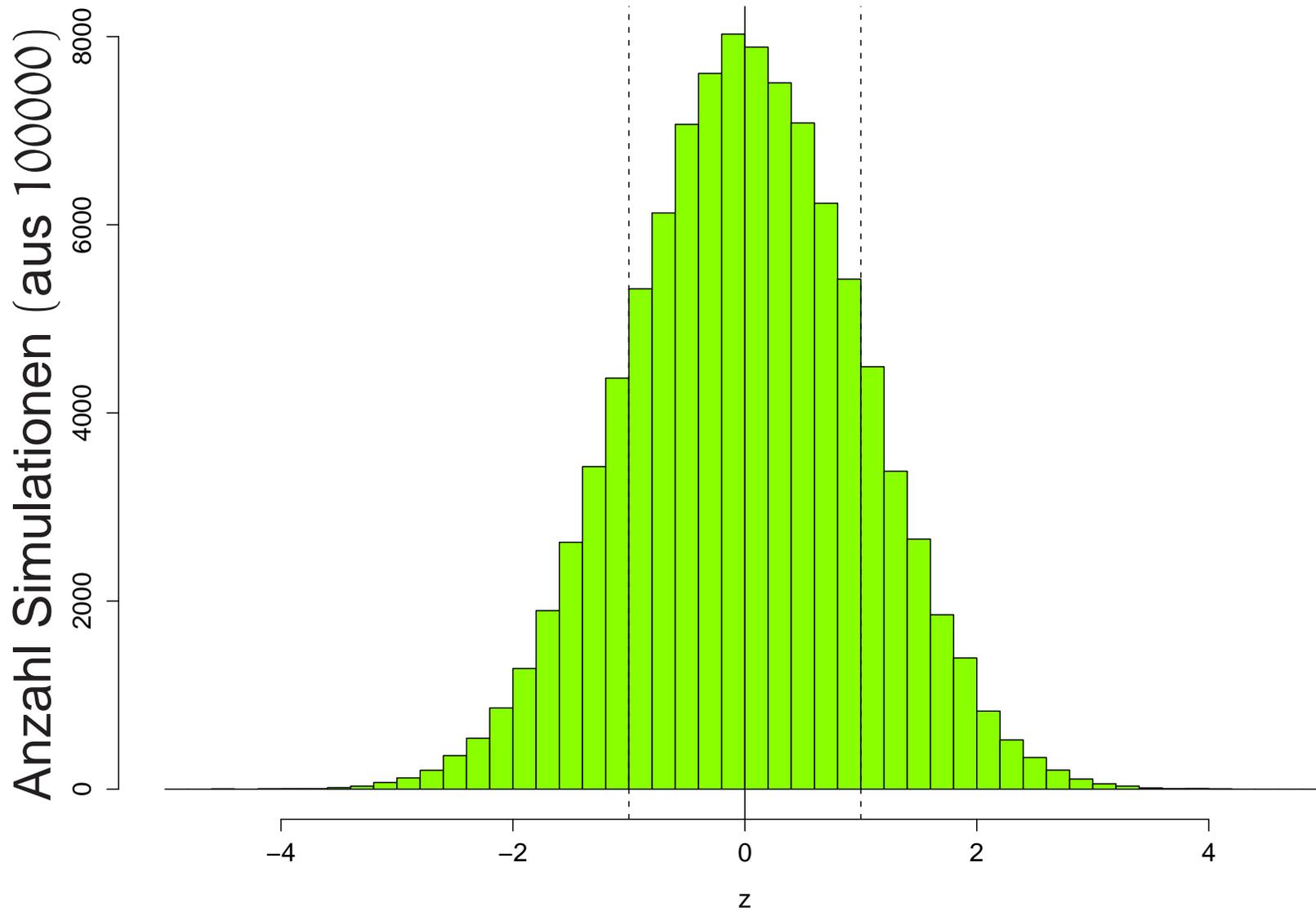
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 25)$$



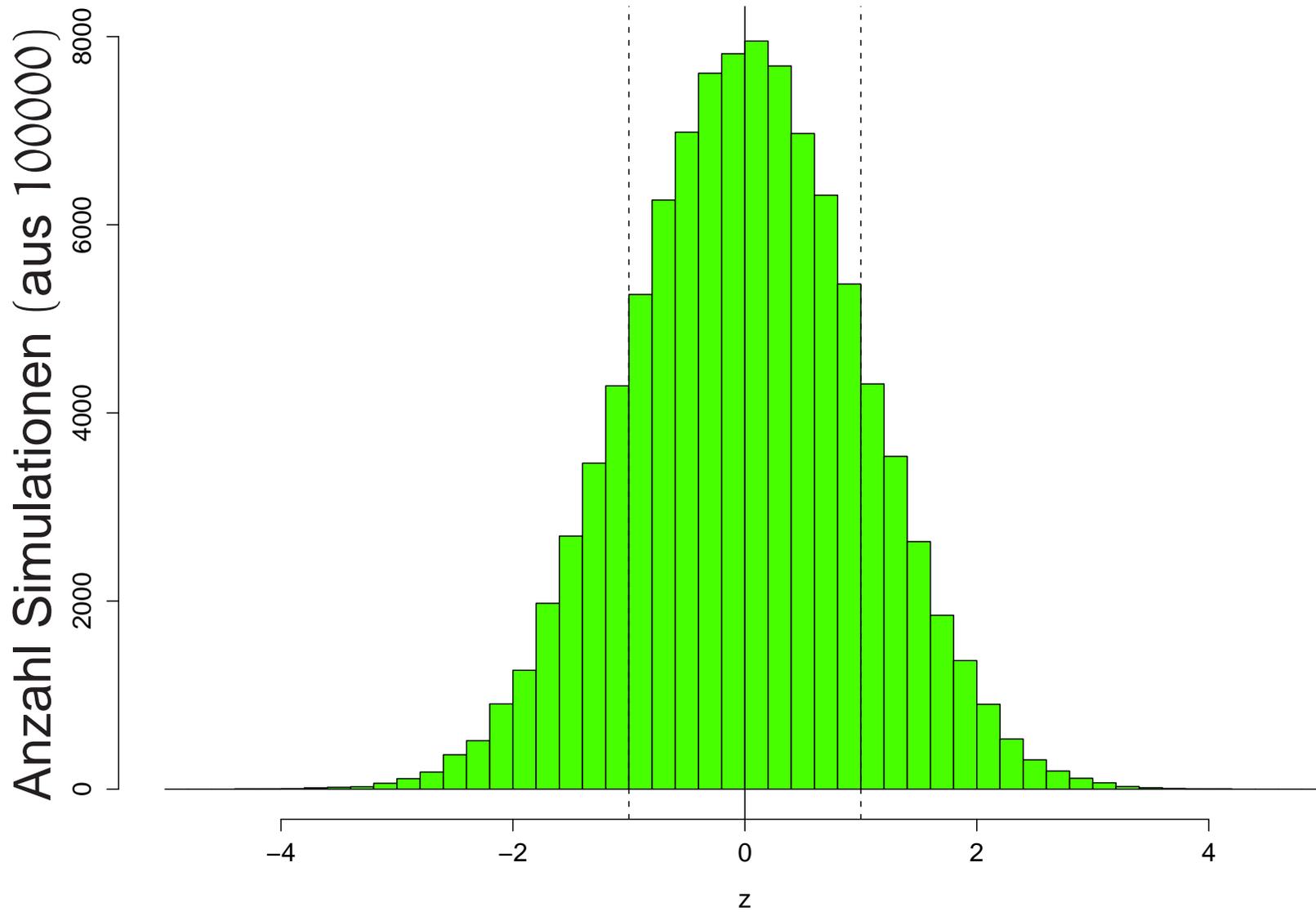
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 30)$$



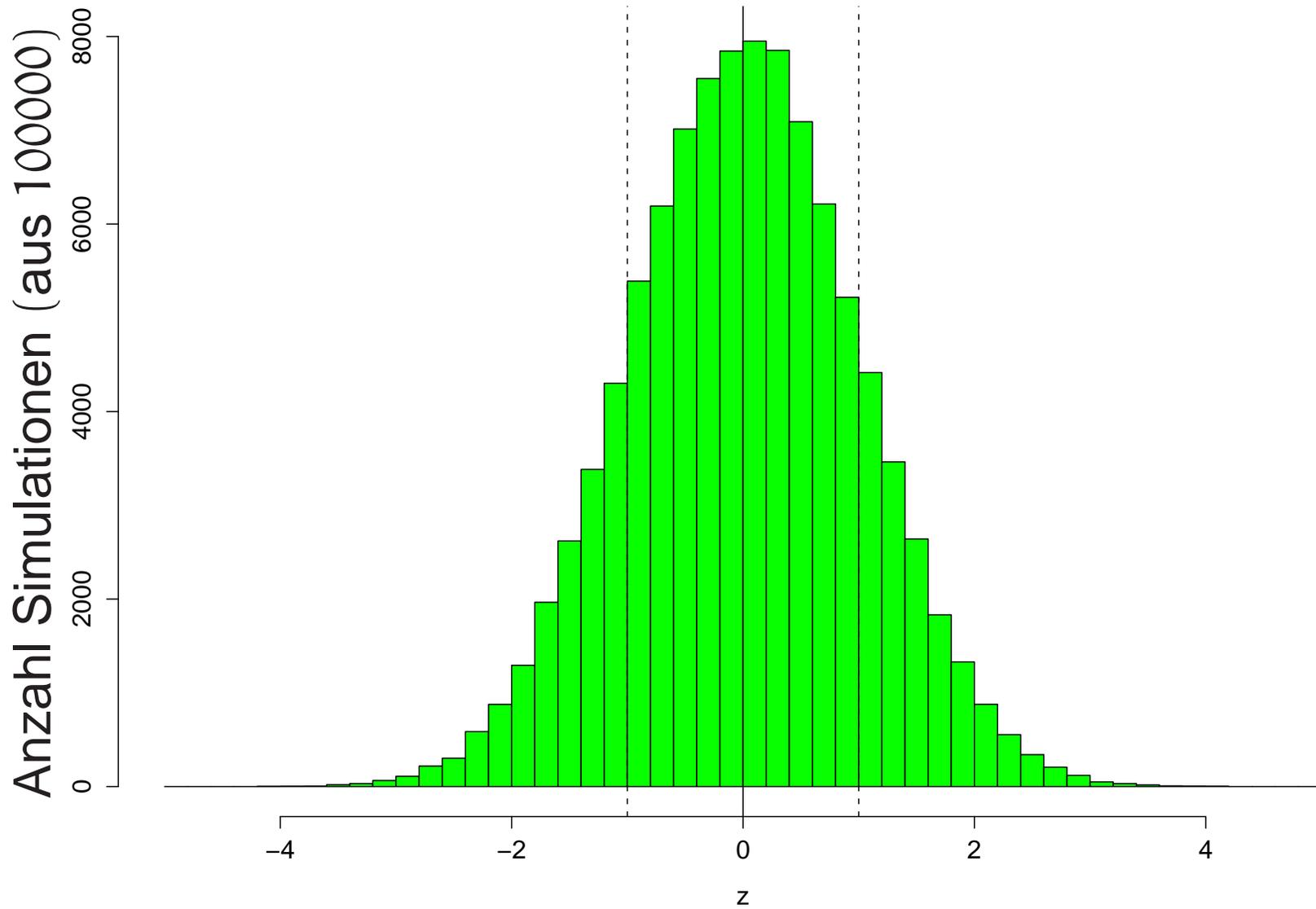
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 35)$$



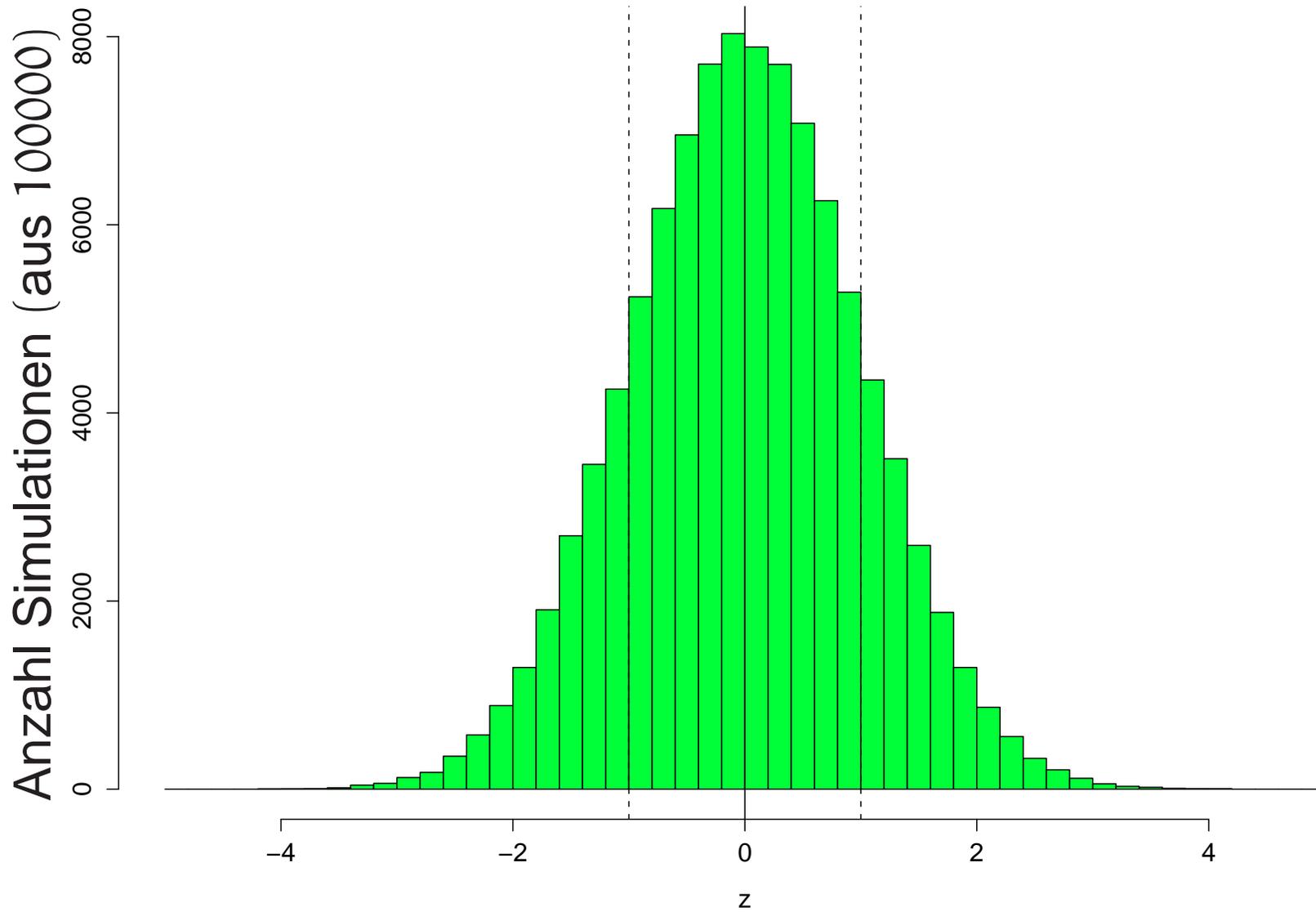
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 40)$$



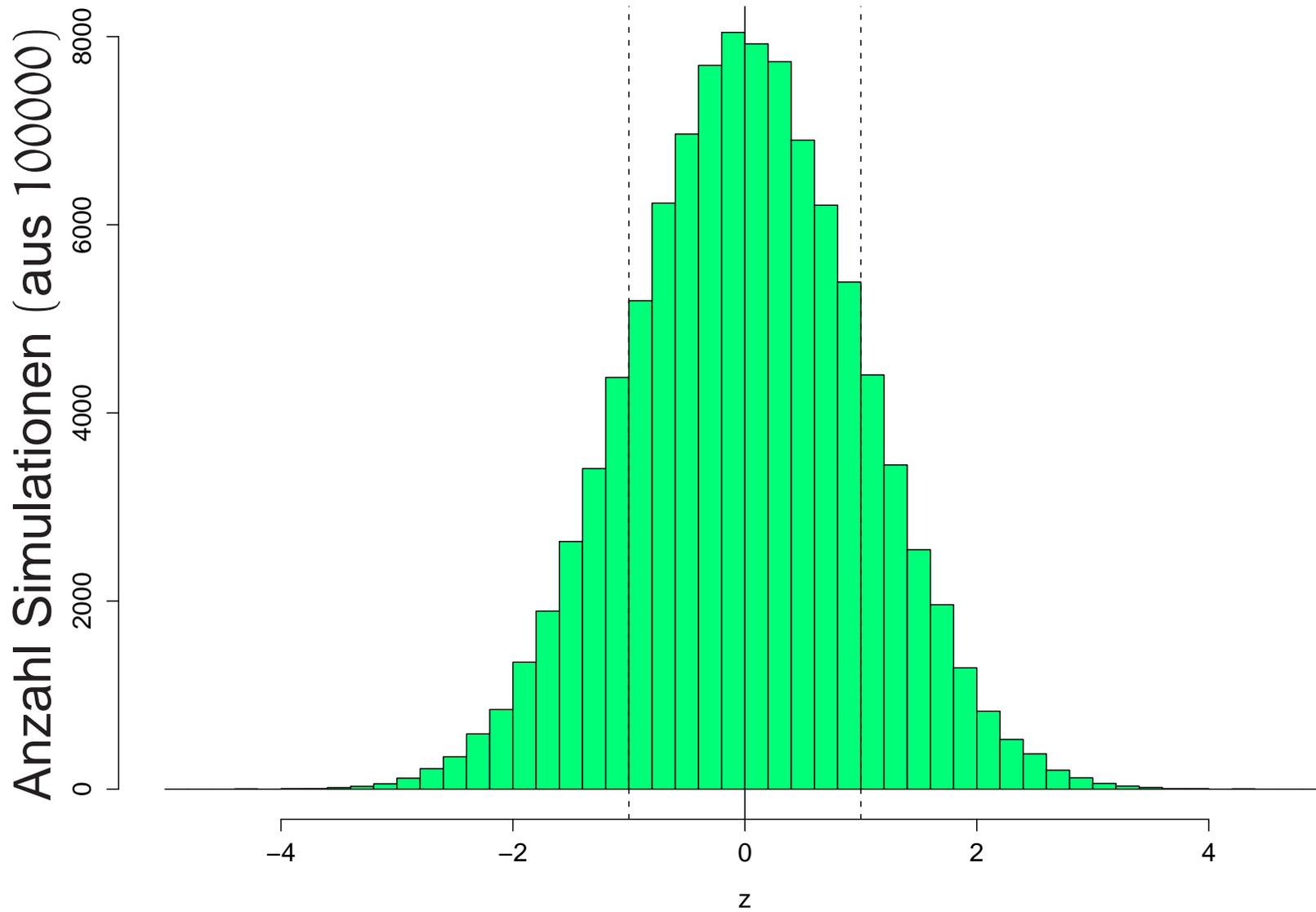
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 45)$$



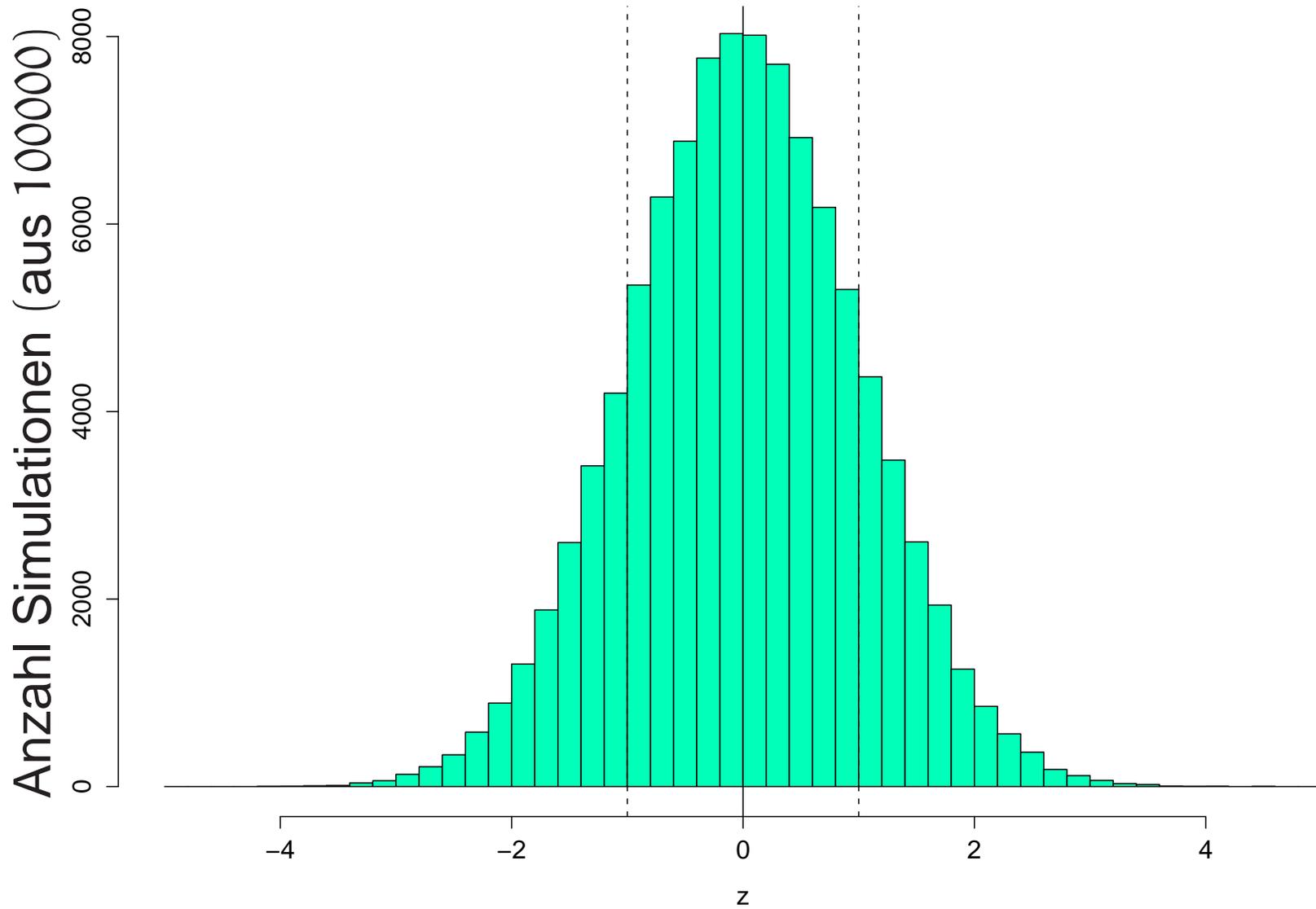
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 50)$$



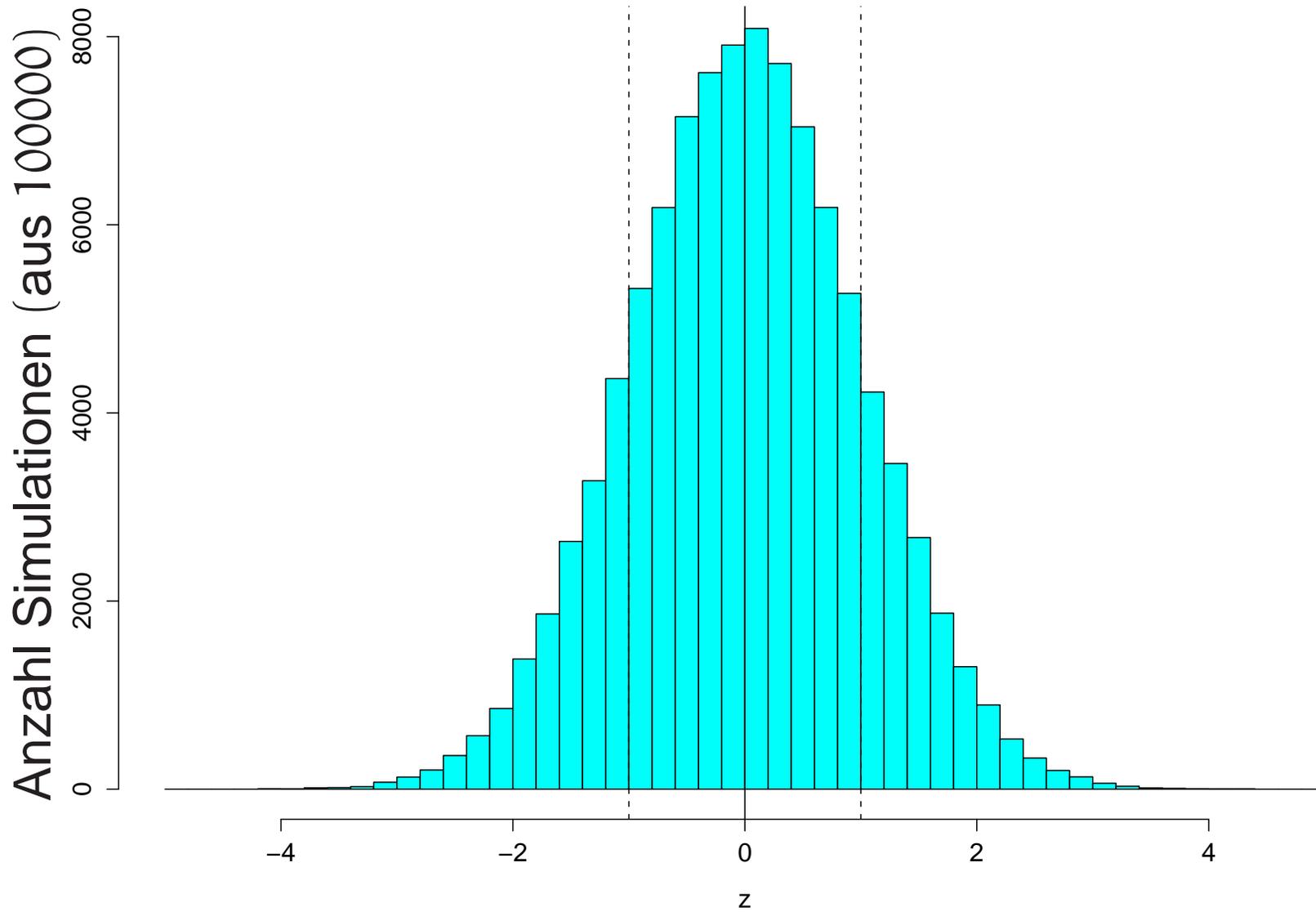
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 55)$$



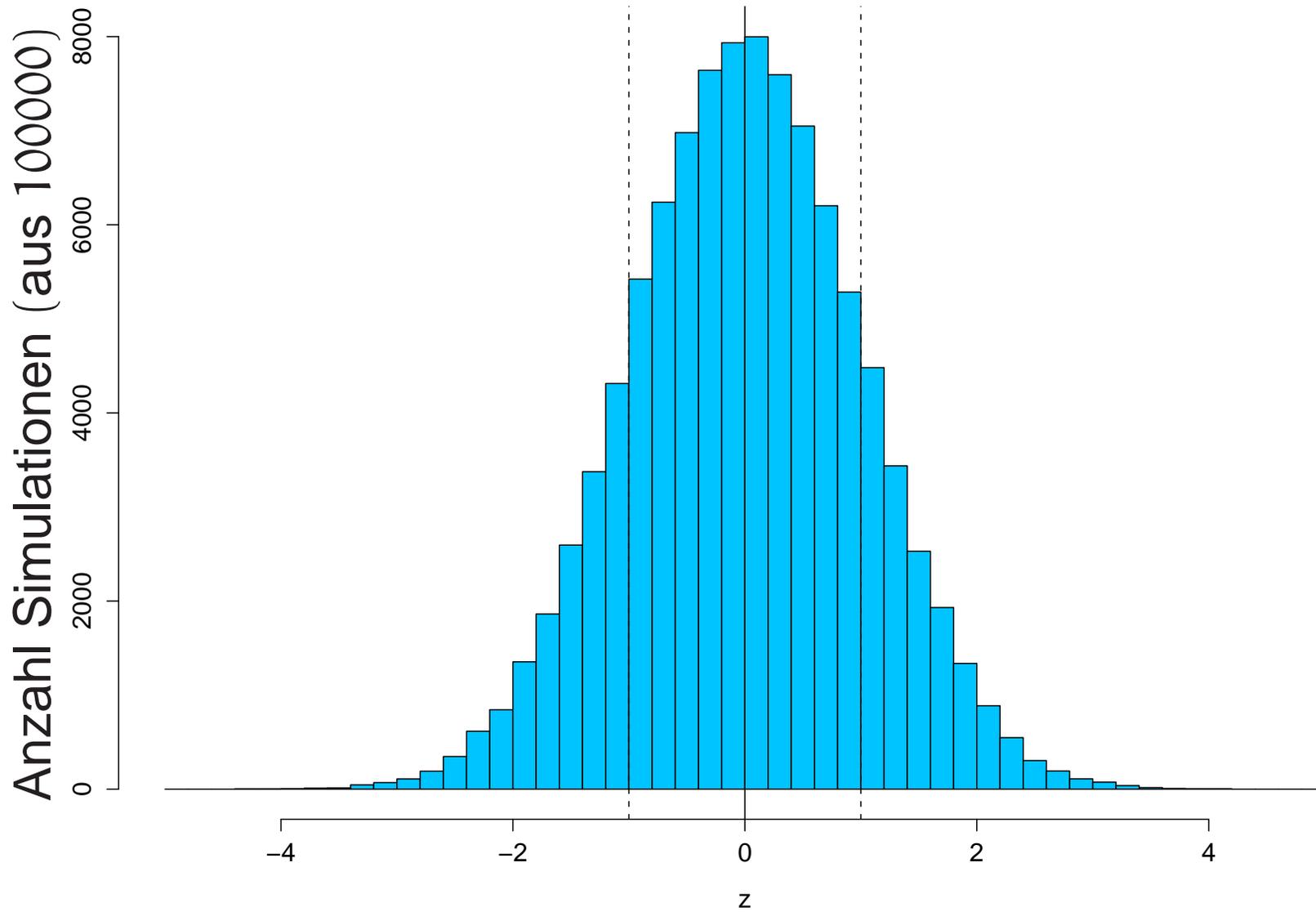
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 60)$$



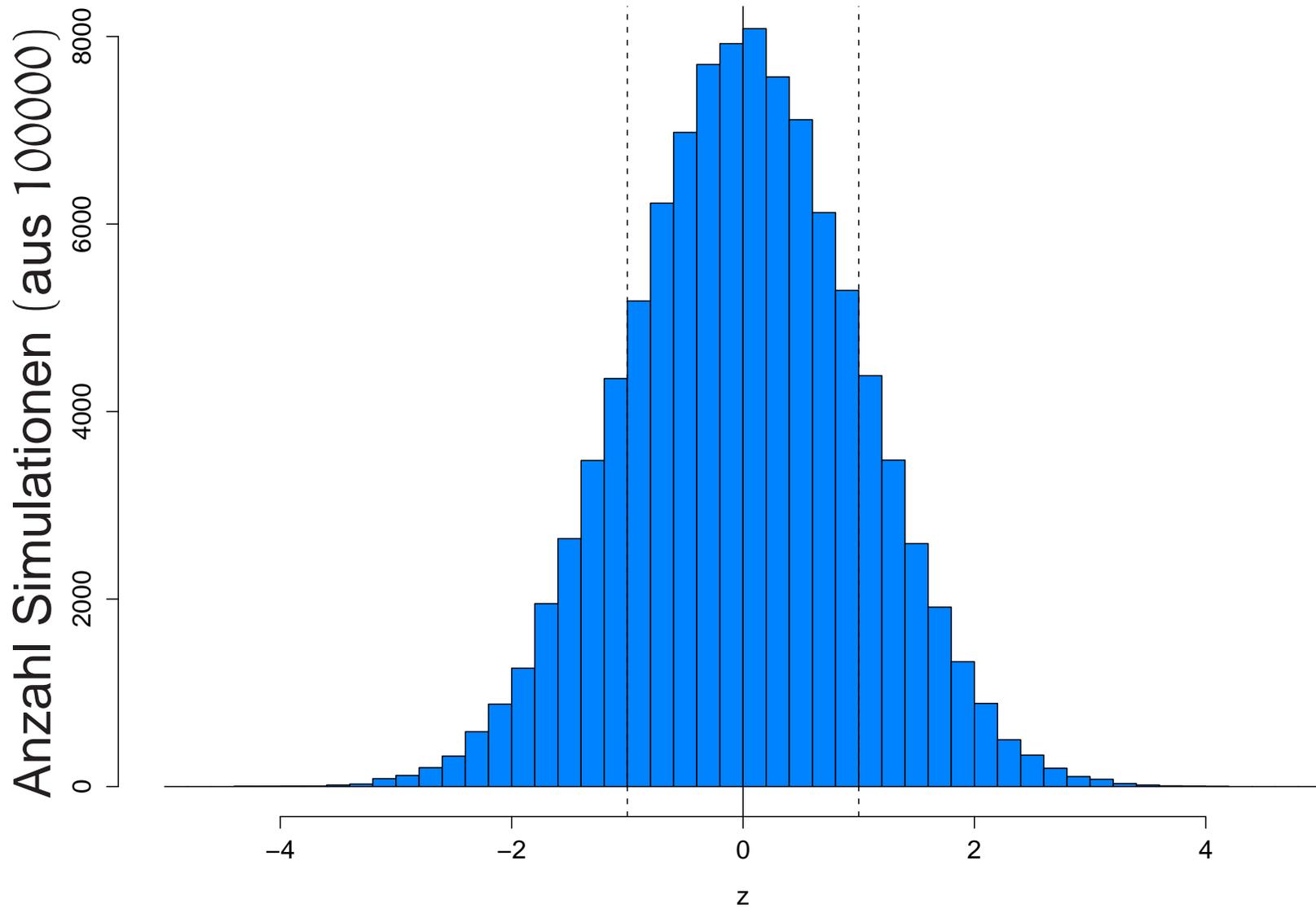
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 65)$$

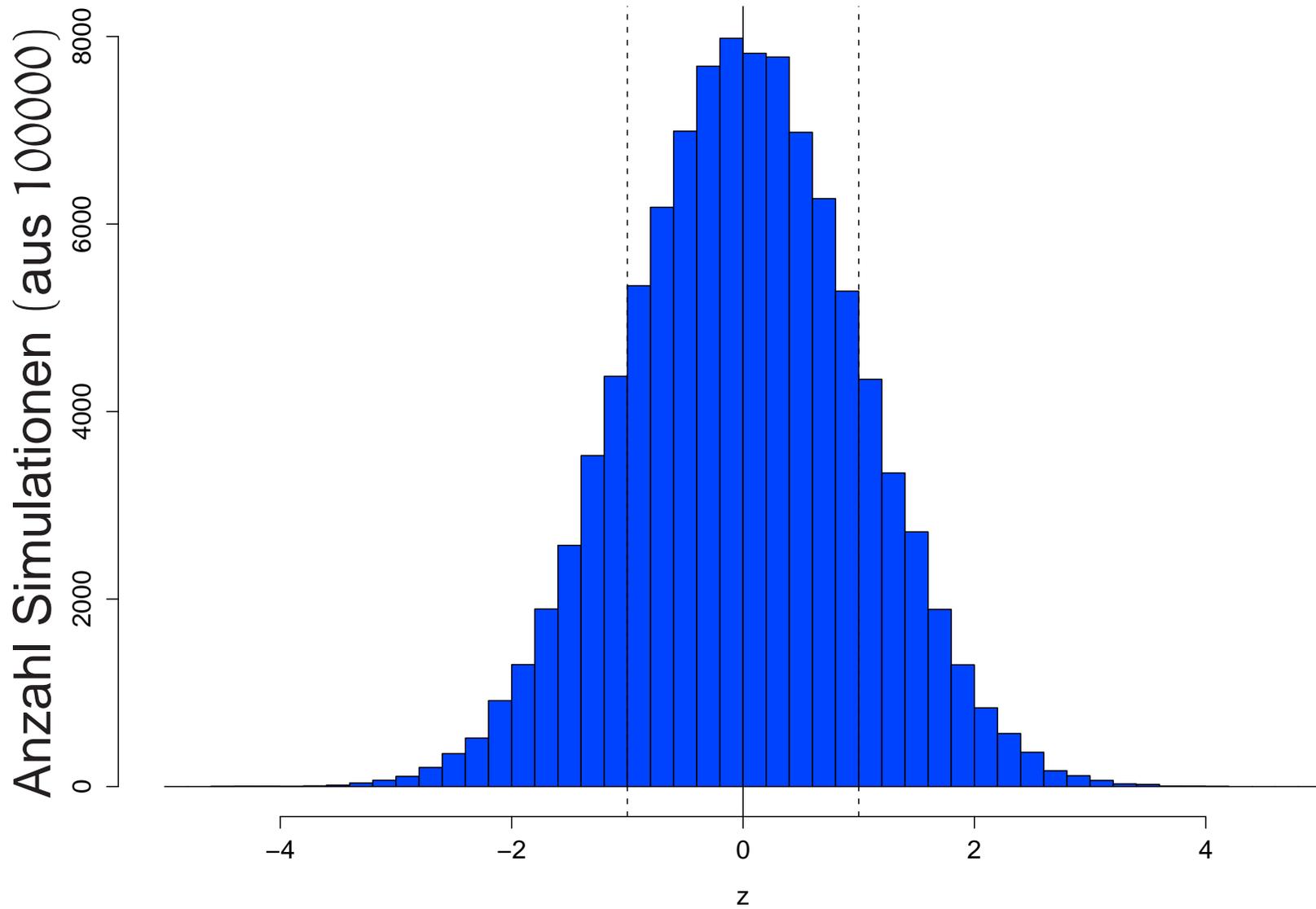


Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 70)$$

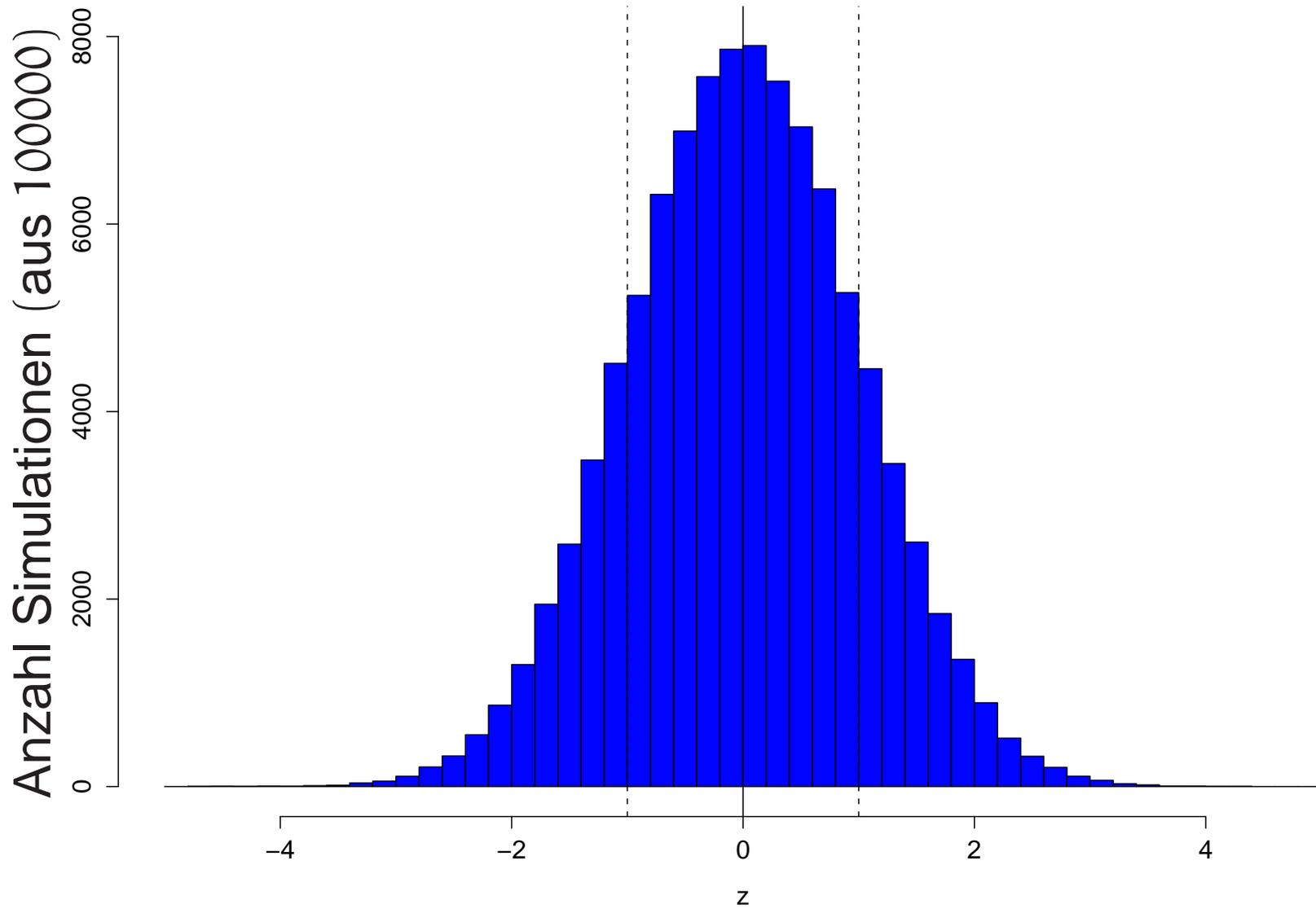


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n}$ ($n = 75$)



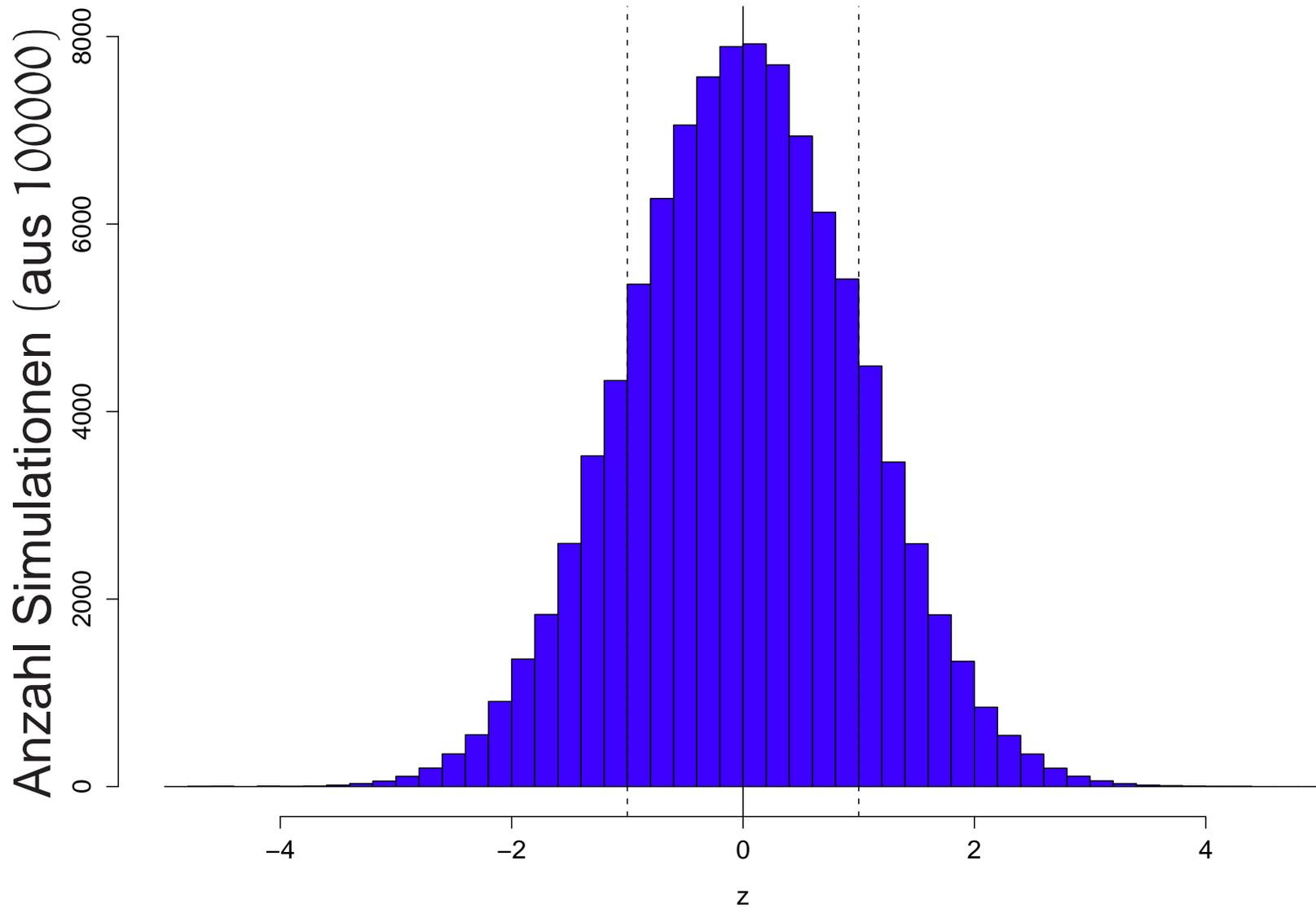
Standardisierung:

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 80)$$

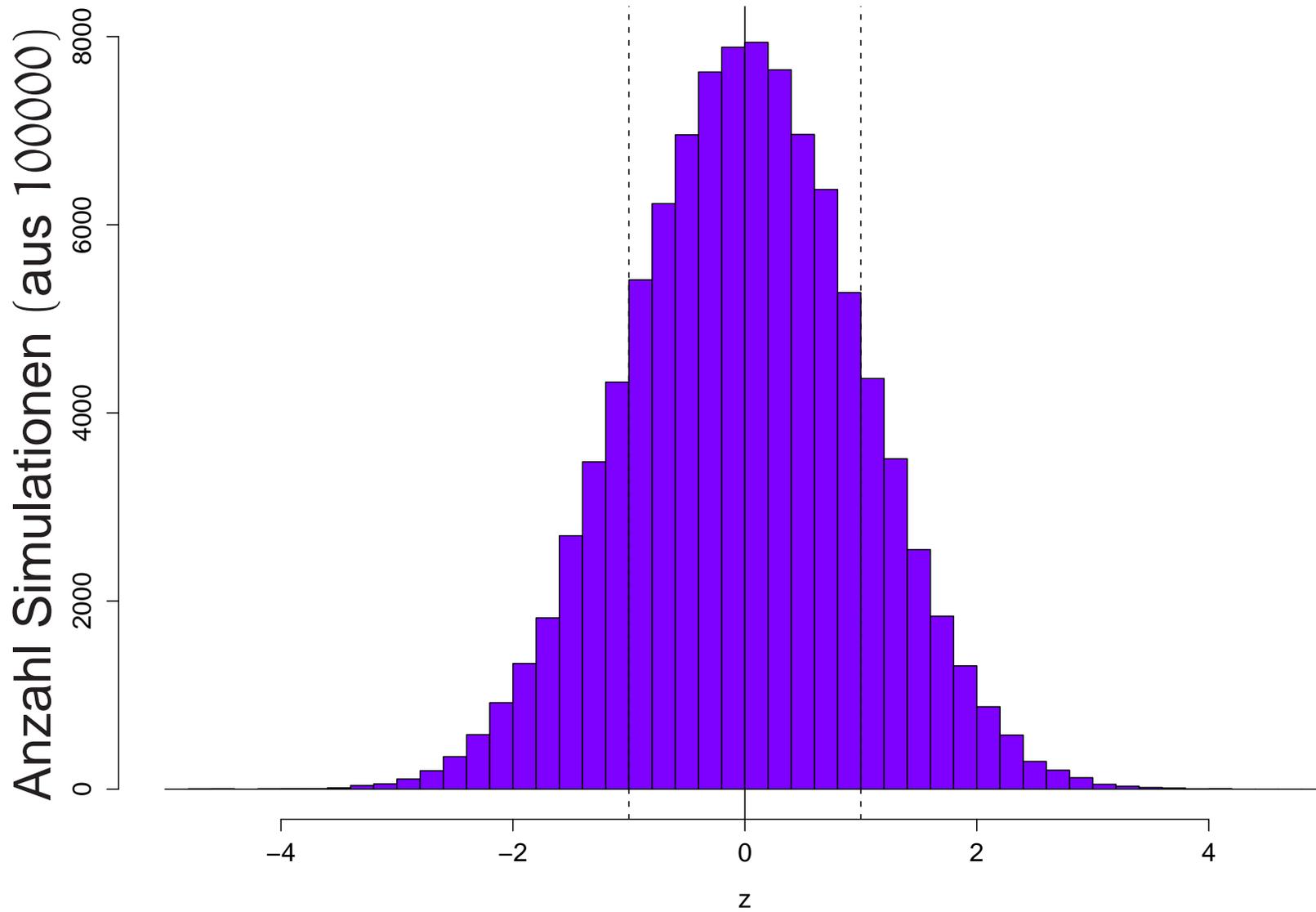


Standardisierung:

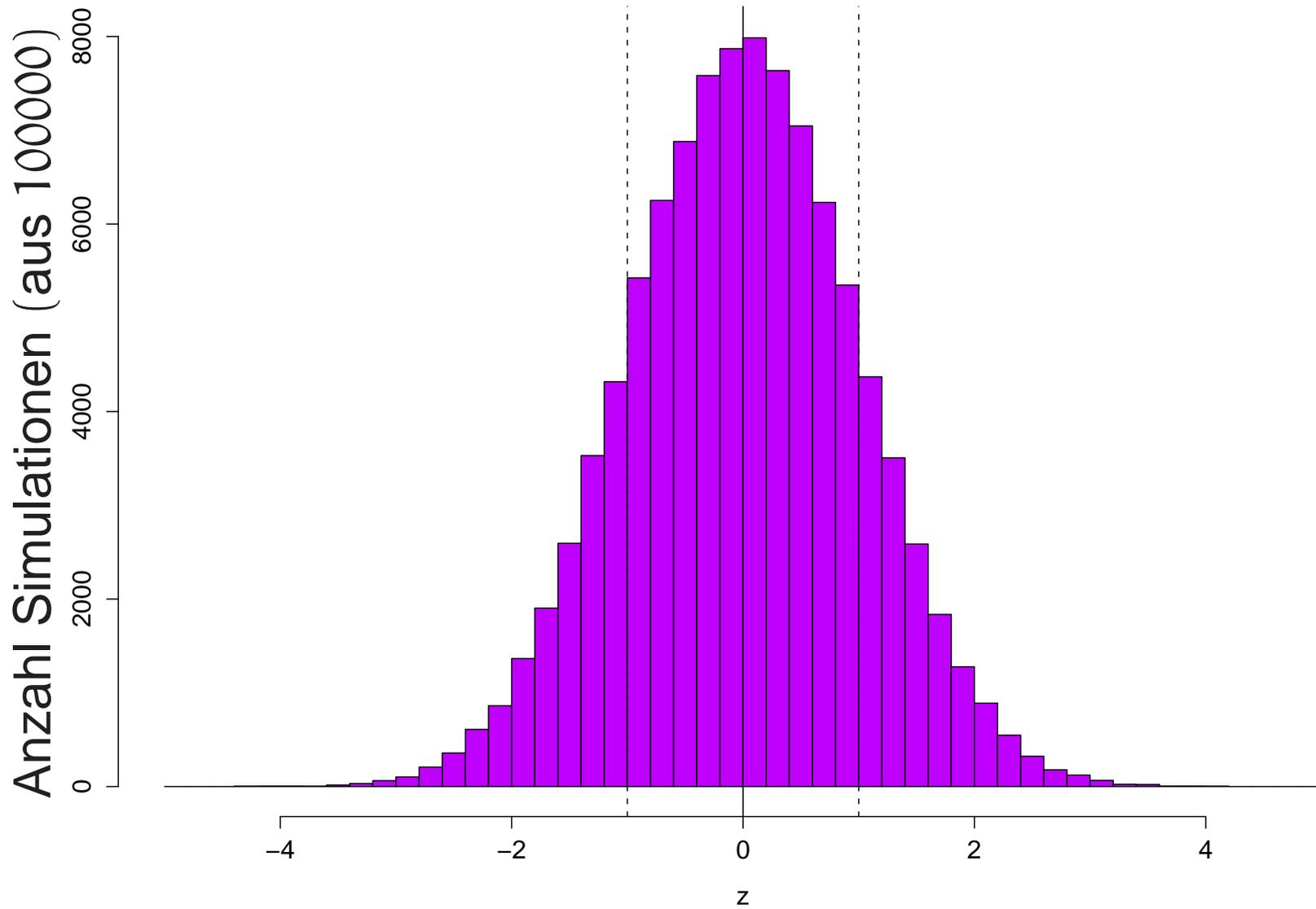
$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) / \sigma_{S_n} \quad (n = 85)$$



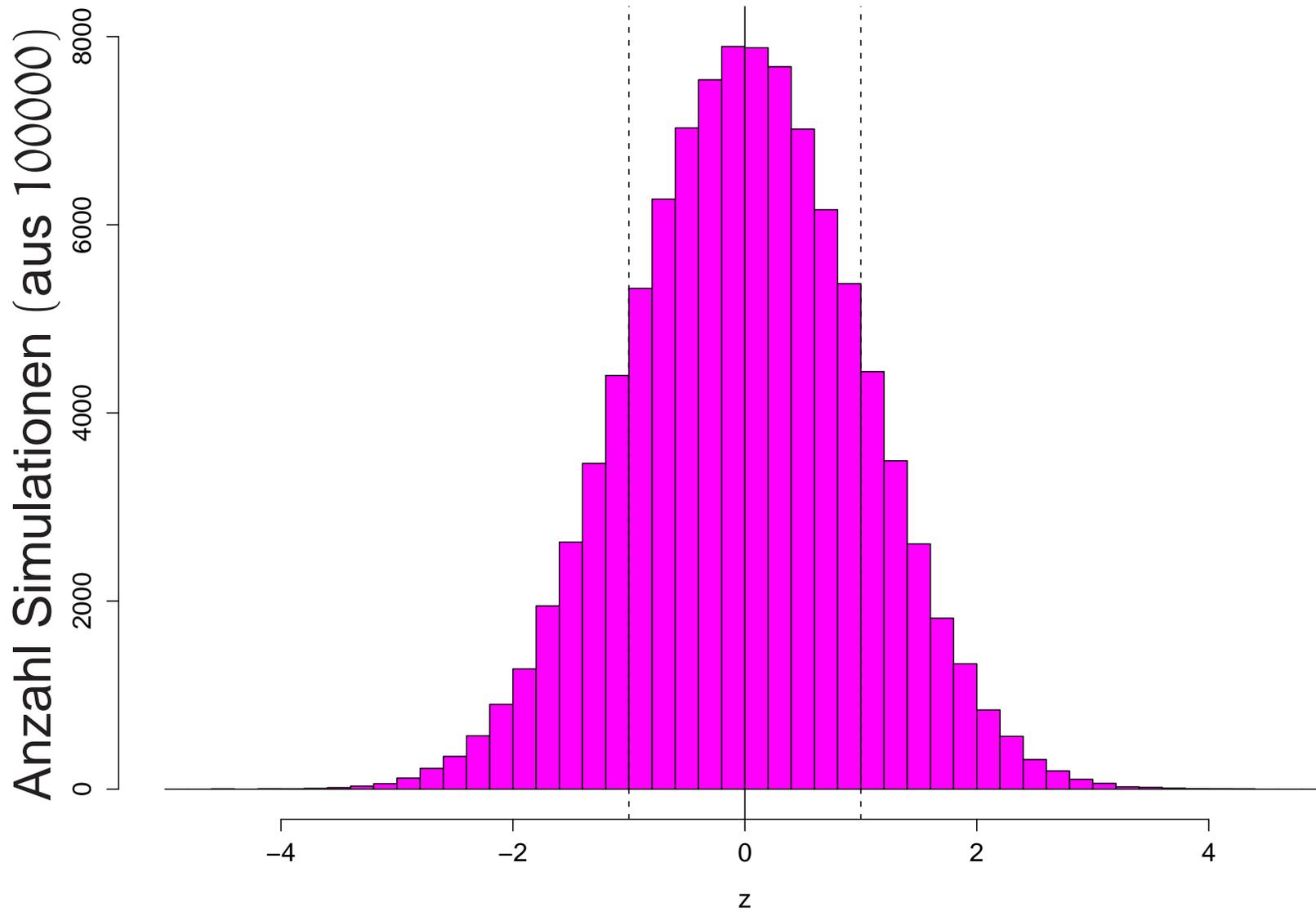
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n}$ ($n = 90$)



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n}$ ($n = 95$)



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n}$ ($n = 100$)



Die Verteilung von Z_n
scheint zu konvergieren.

Die Verteilung von Z_n
scheint zu konvergieren.

Welche Form
hat die Grenzverteilung?

Die Verteilung von

Z_{100}

ist glockenförmig.

Die Verteilung von

Z_{100}

ist glockenförmig.

Welche Glocke?

Glücklicher Einfall:

Glücklicher Einfall:

Zwei unabhängige Kopien

$$(U, V) = (Z_{100}, Z'_{100})$$

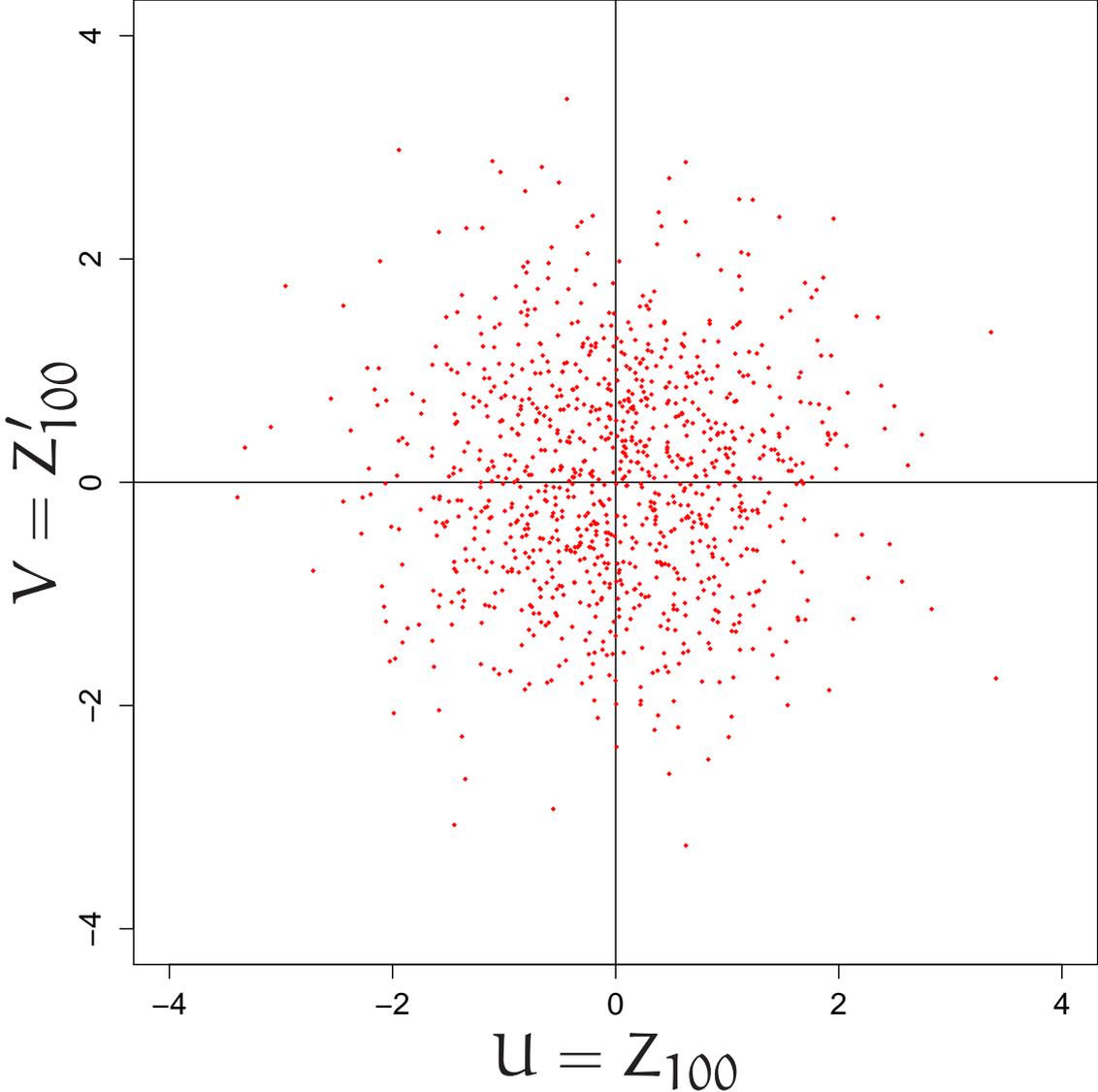
Glücklicher Einfall:

Zwei unabhängige Kopien

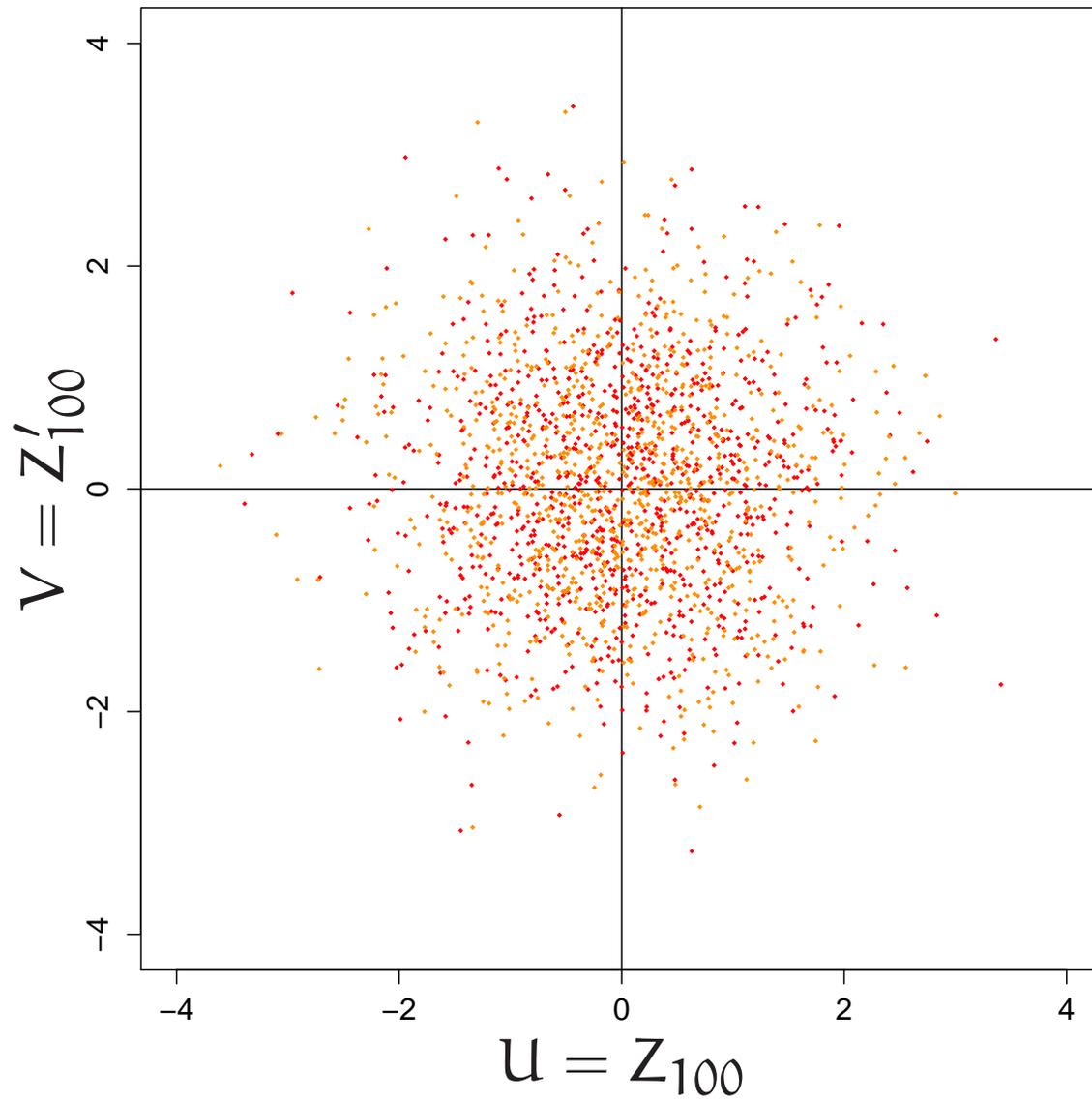
$$(U, V) = (Z_{100}, Z'_{100})$$

Wie sieht die gemeinsame Verteilung
von U und V aus?

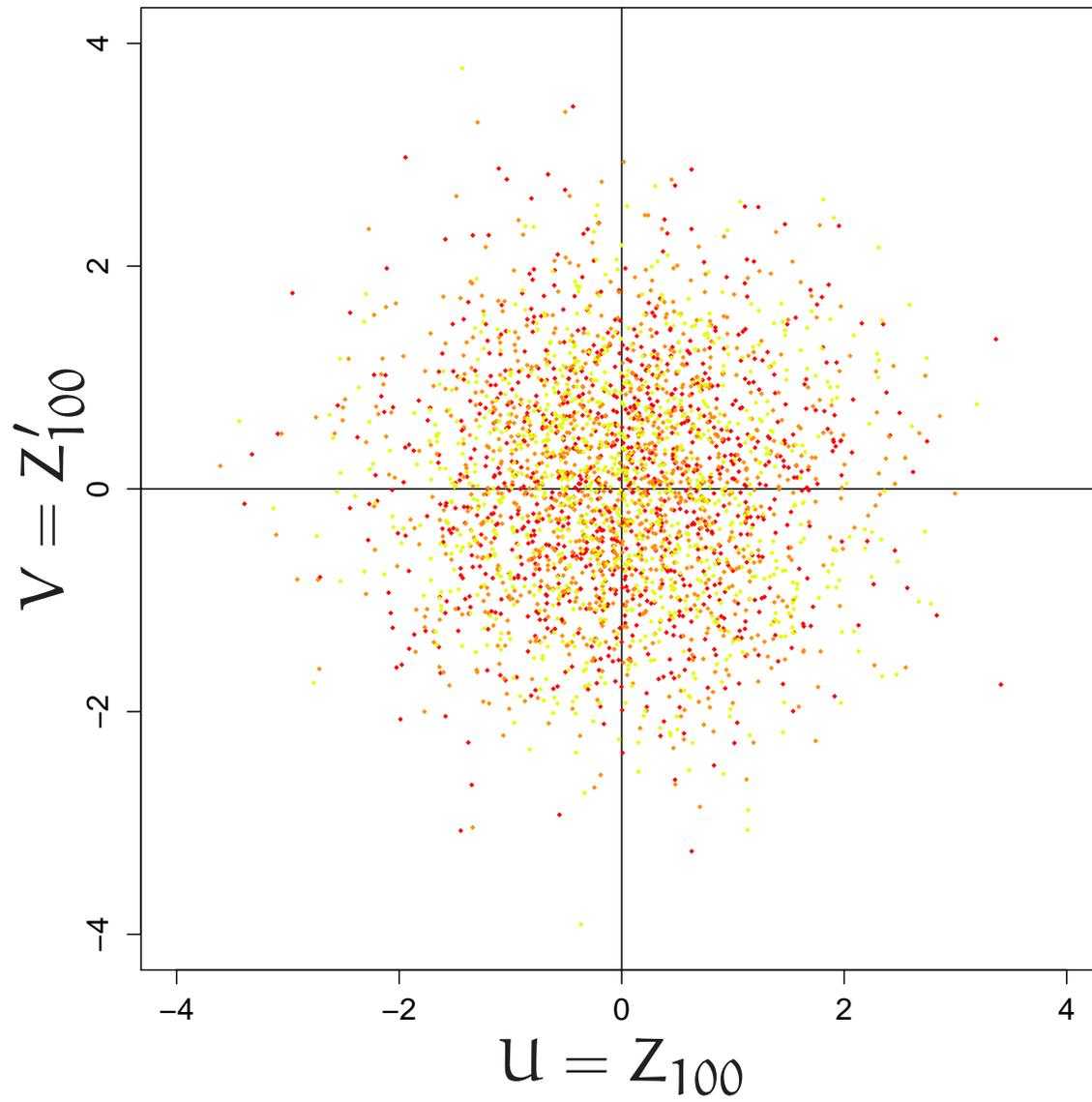
1000 Simulationen



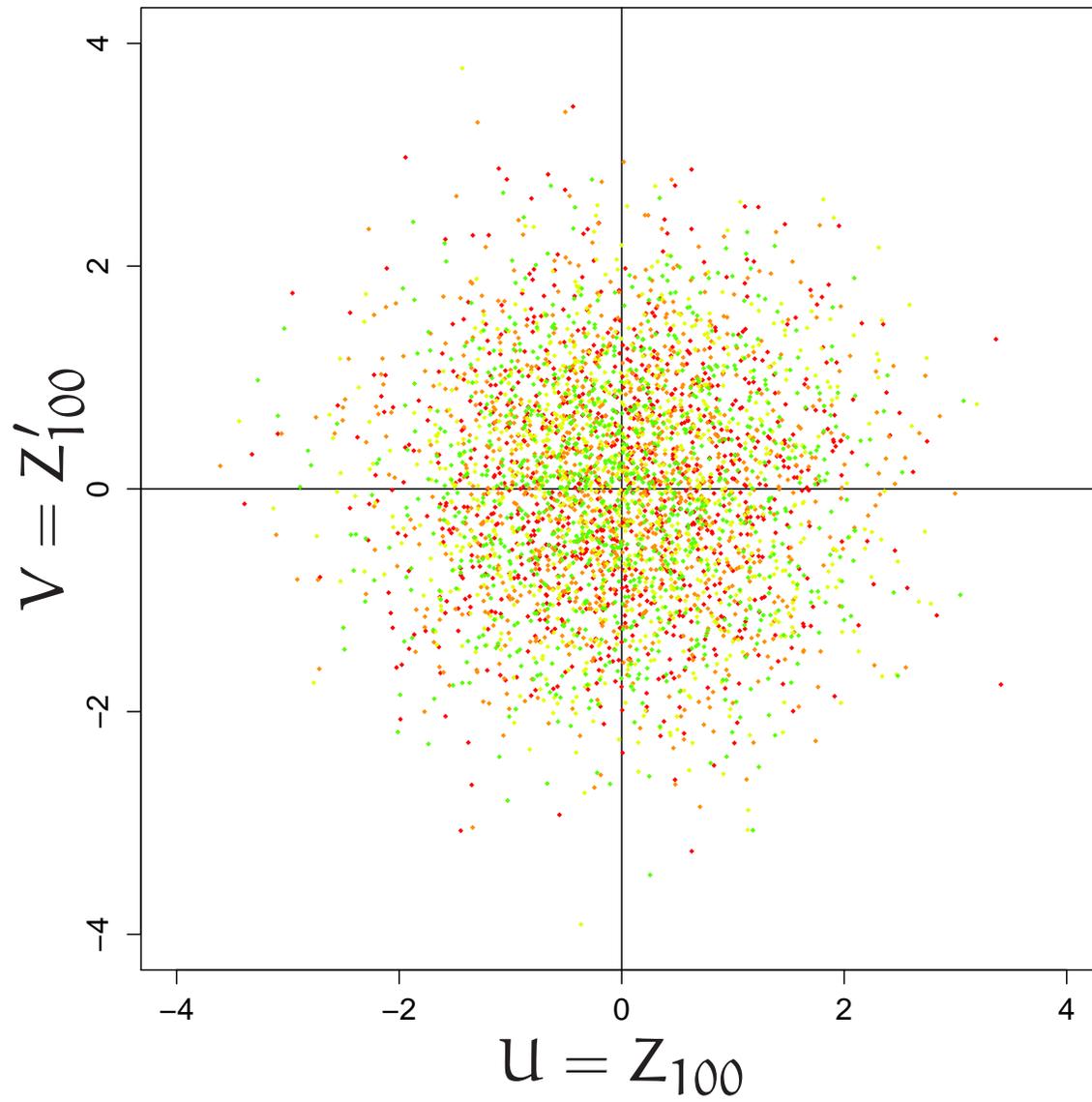
2000 Simulationen



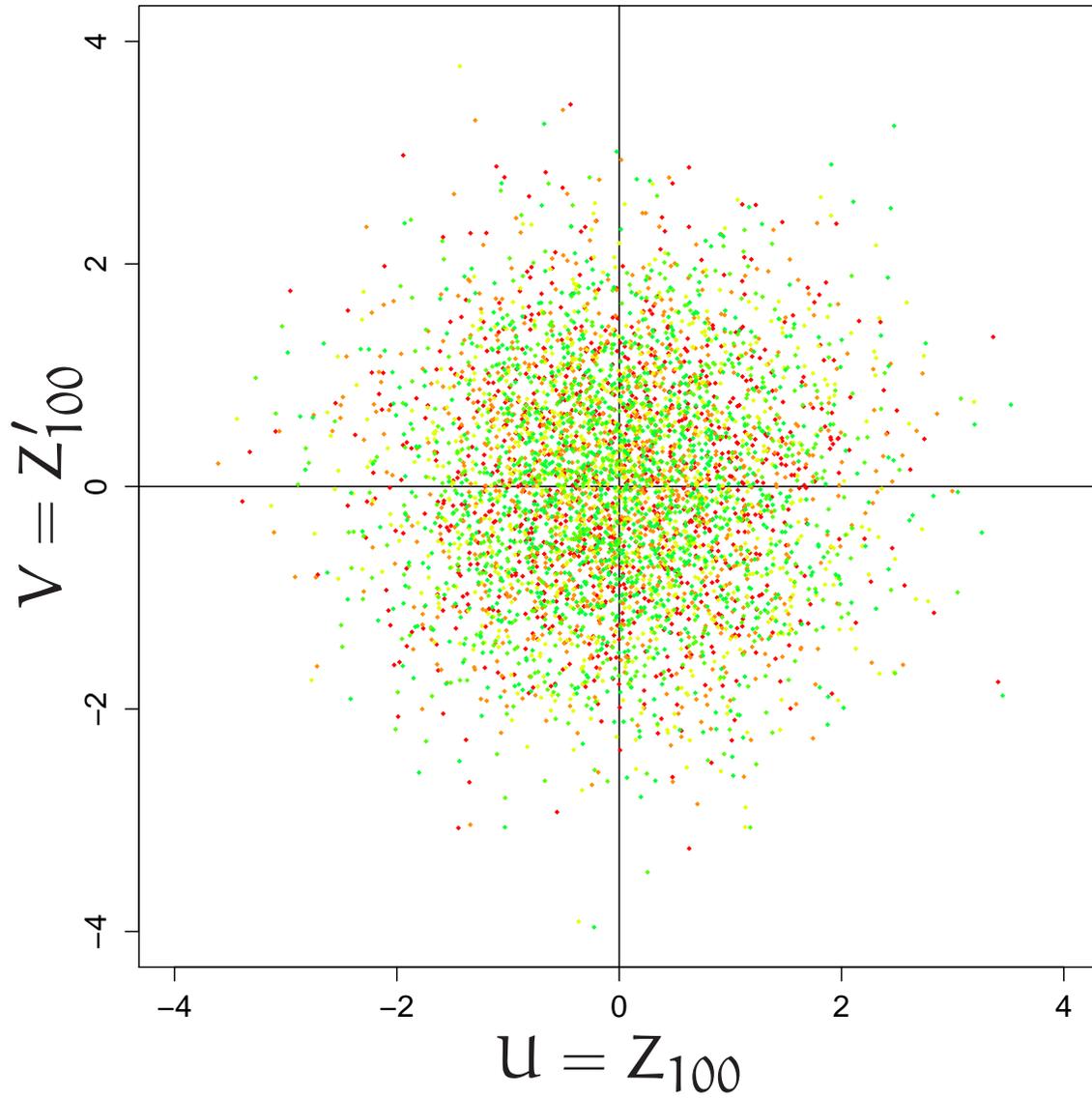
3000 Simulationen



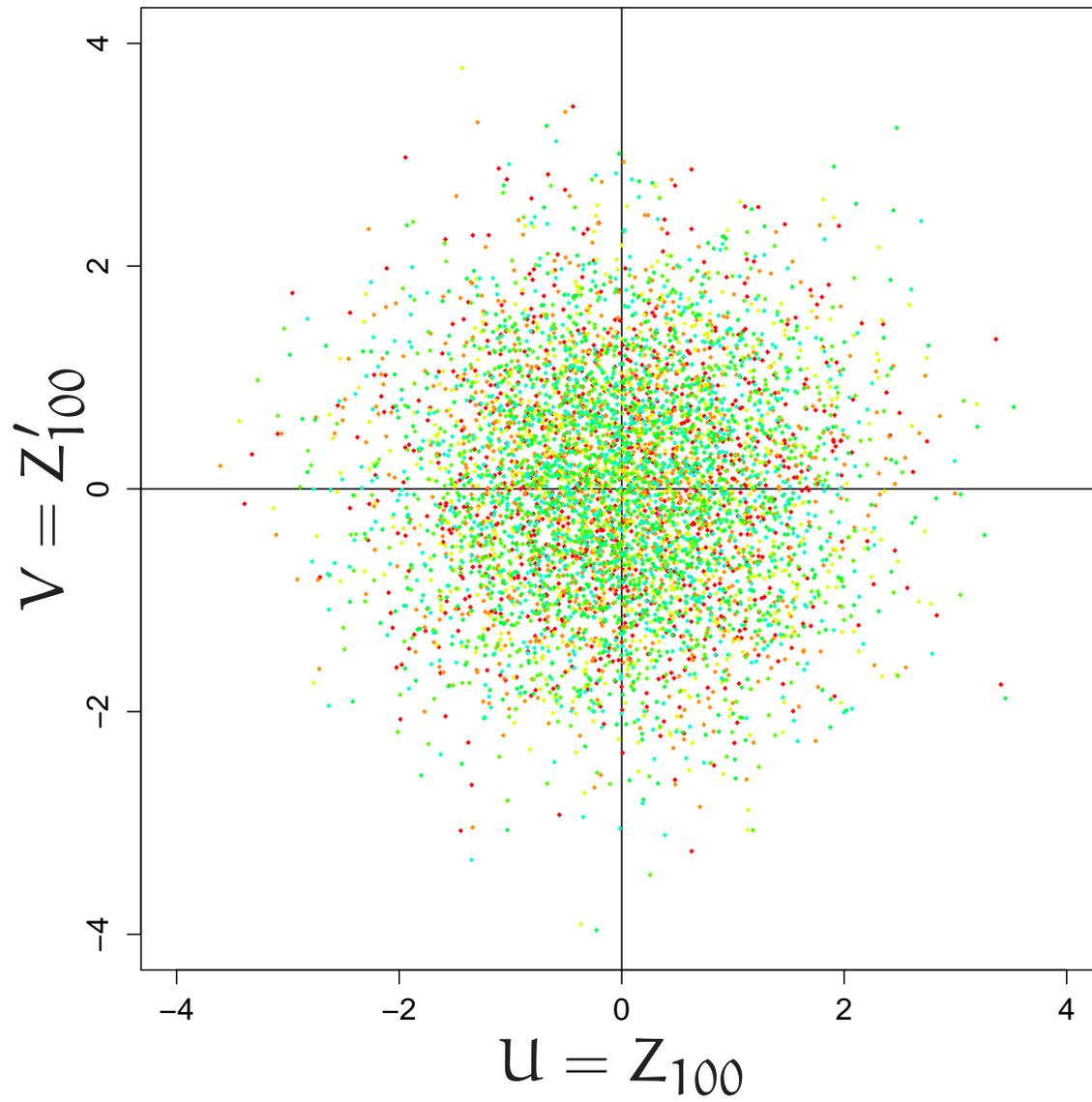
4000 Simulationen



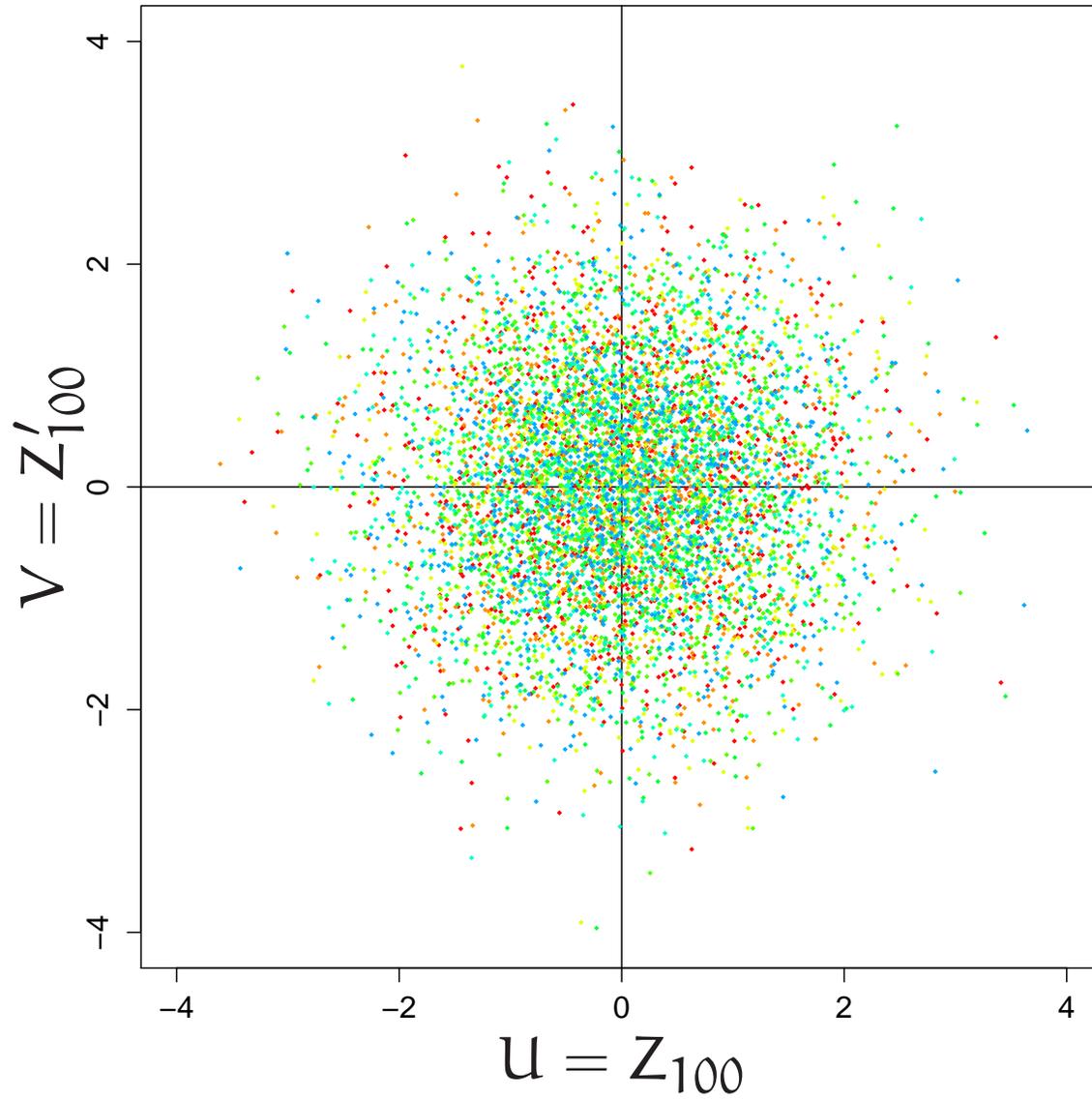
5000 Simulationen



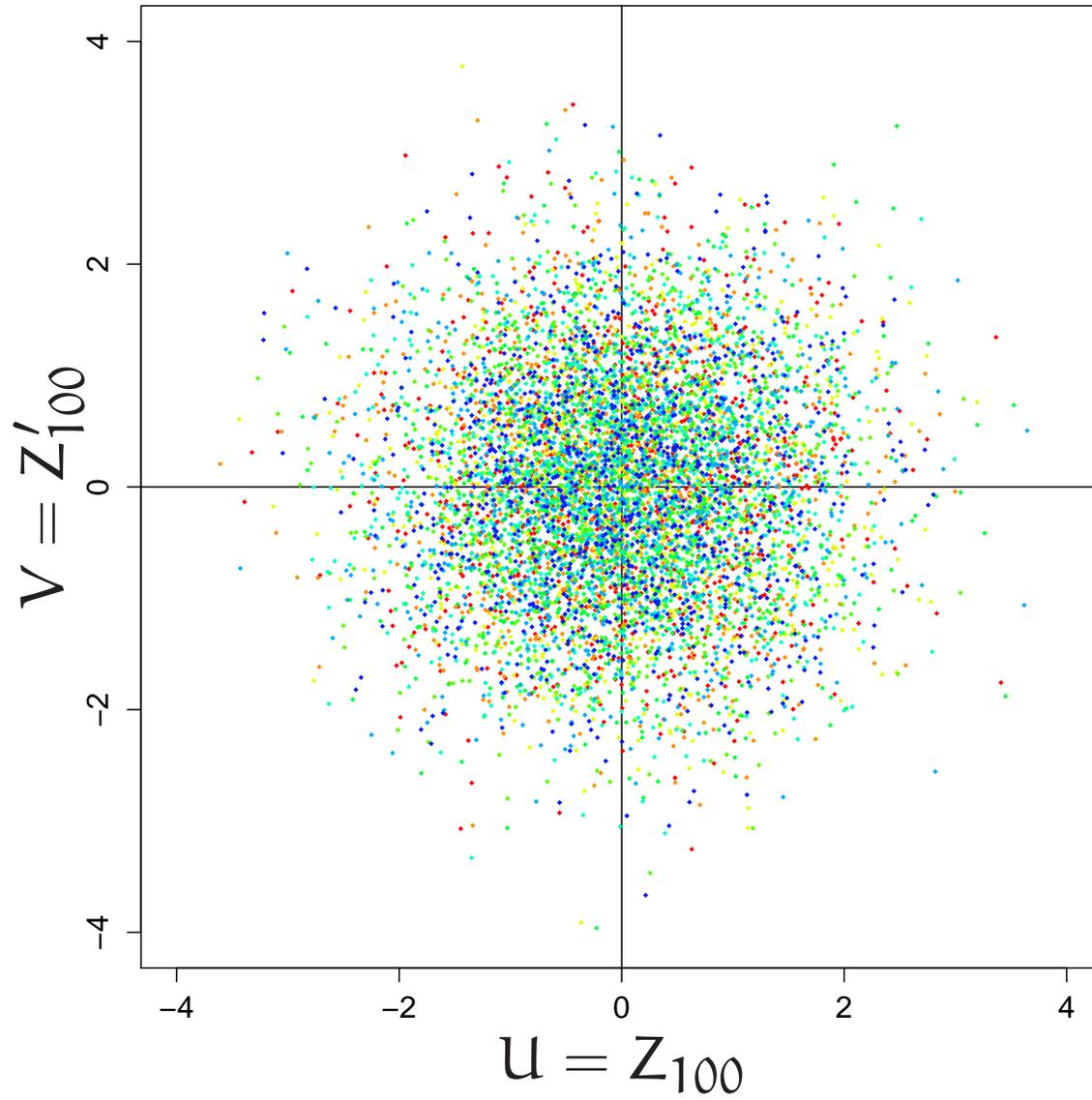
6000 Simulationen



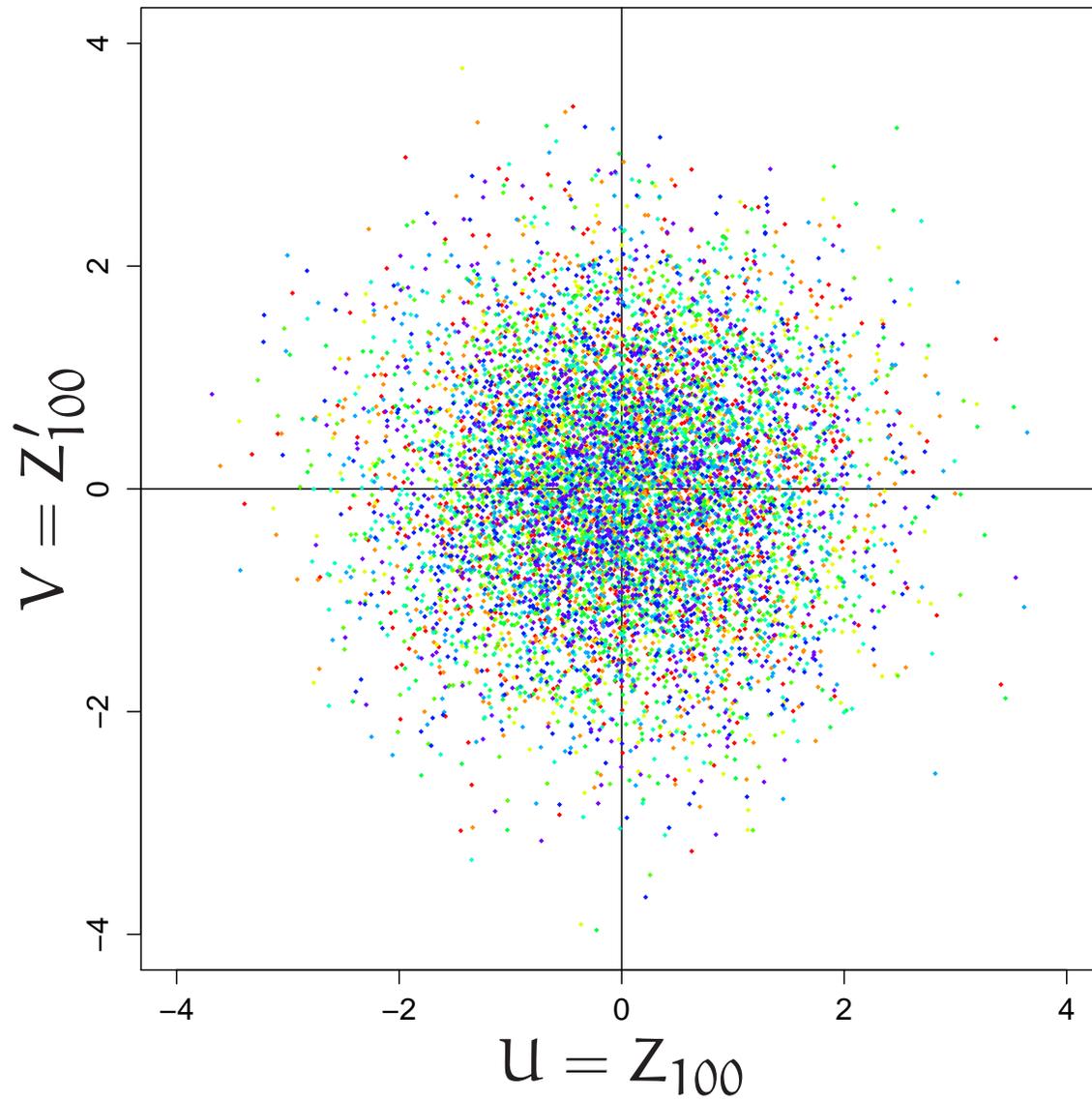
7000 Simulationen



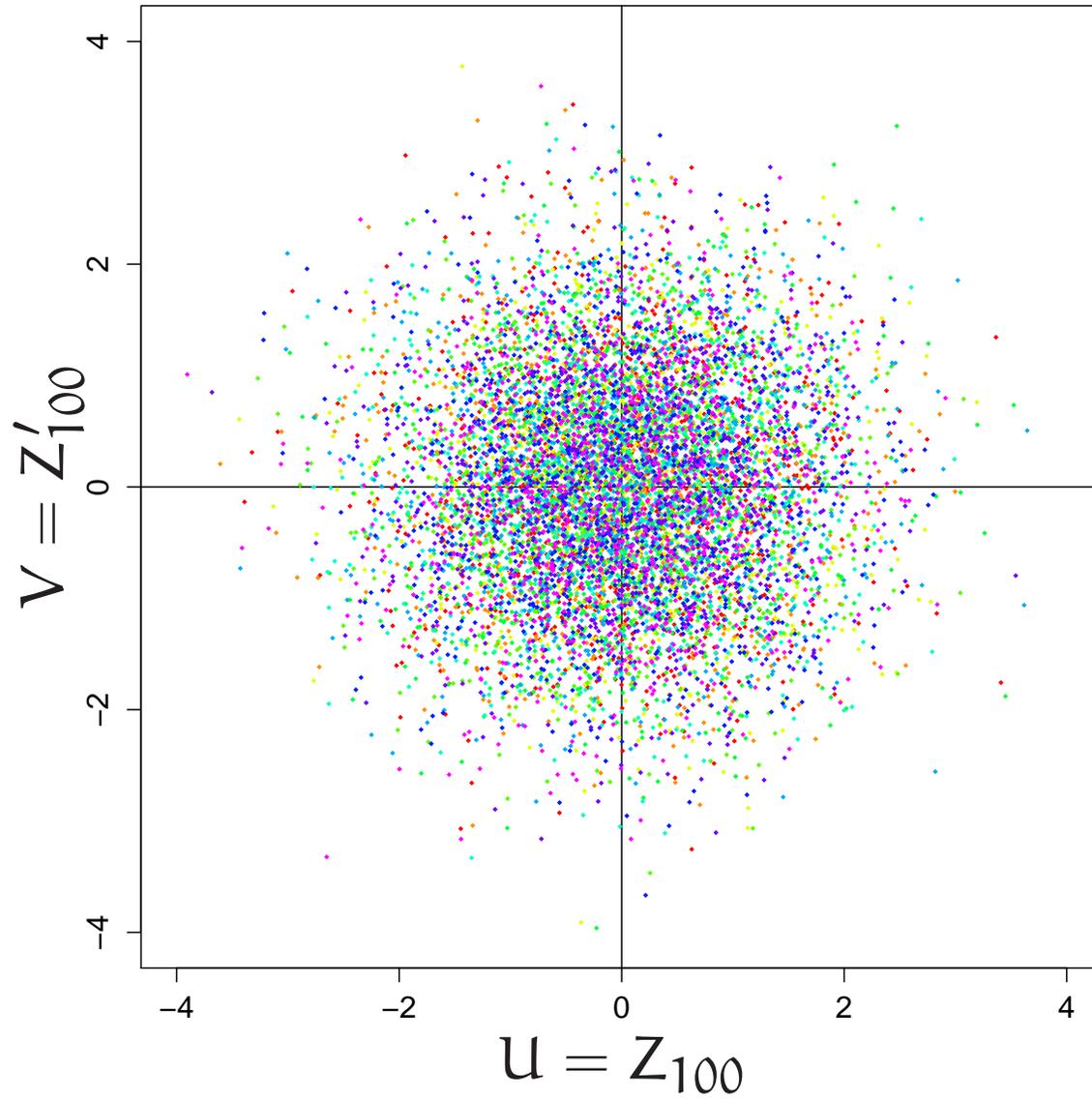
8000 Simulationen



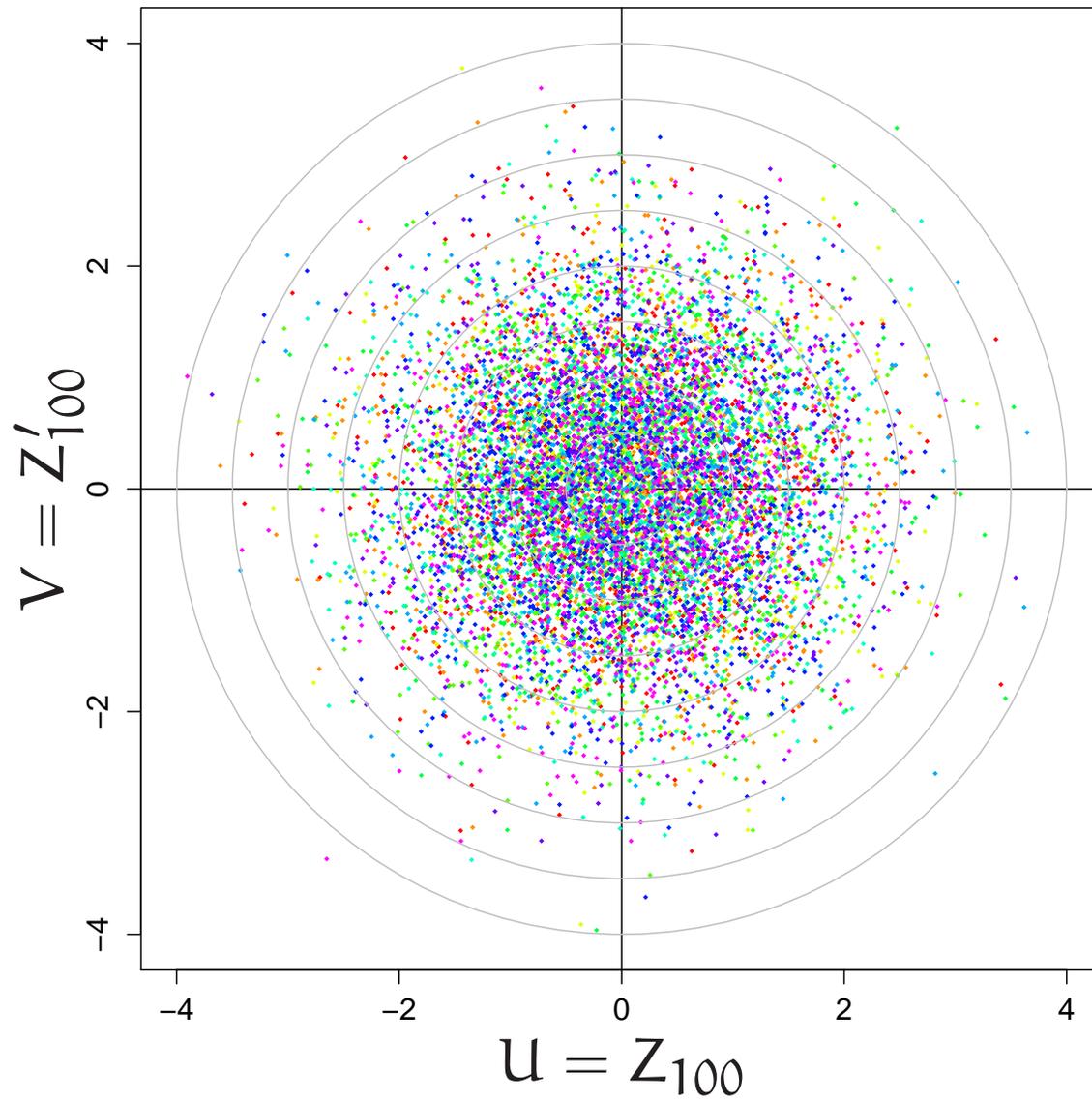
9000 Simulationen



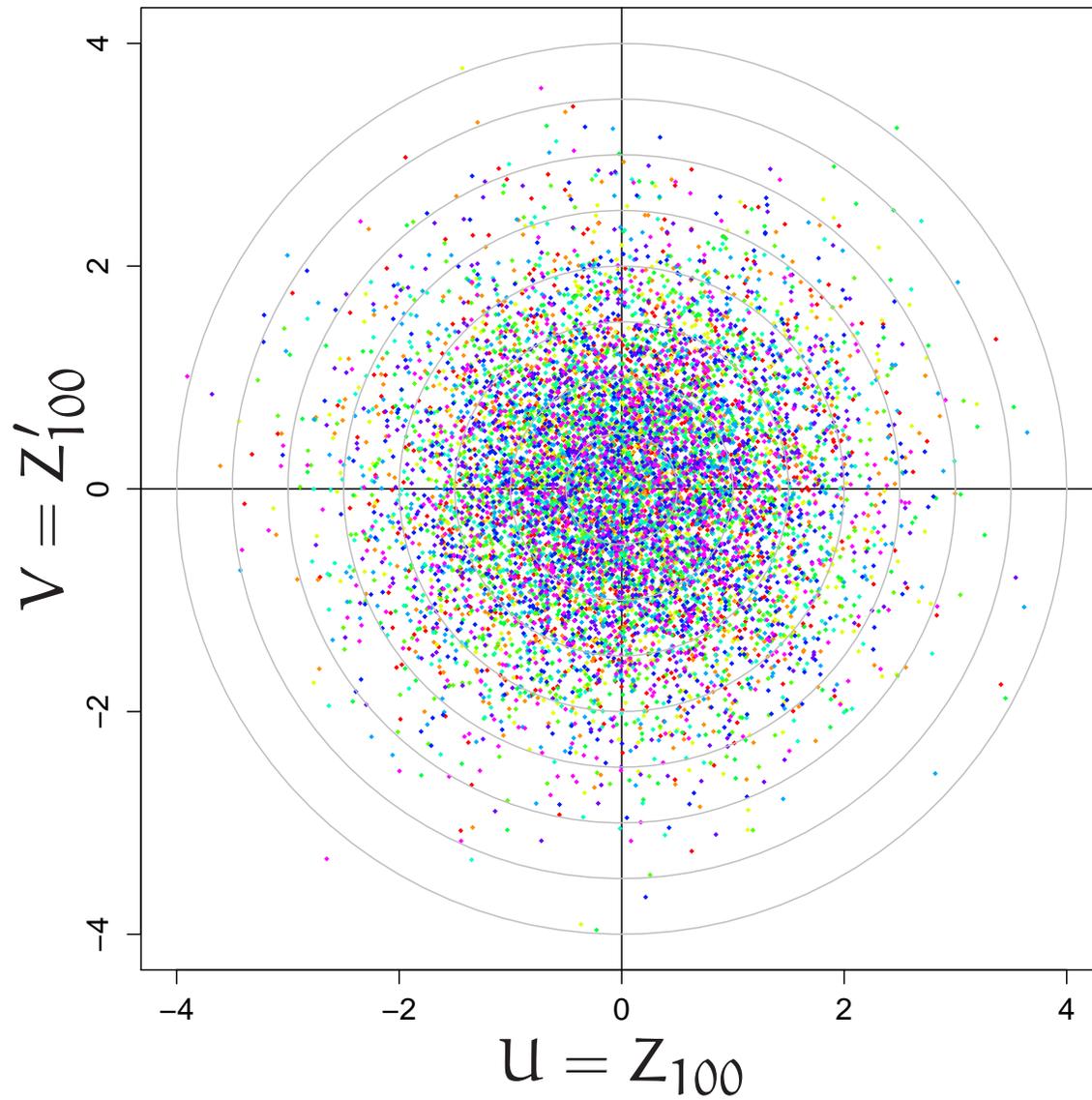
10000 Simulationen



10000 Simulationen



Die Verteilung von (U, V) ist rotationssymmetrisch!



Behauptung:

Aus U und V unabhängig

und

Verteilung von (U, V) rotationssymmetrisch

Behauptung:

Aus U und V unabhängig

und

Verteilung von (U, V) rotationssymmetrisch

folgt,

dass U und V normalverteilt sind:

Behauptung:

Aus U und V unabhängig

und

Verteilung von (U, V) rotationssymmetrisch

folgt,

dass U und V normalverteilt sind:

$$f_U(x) = f_V(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

Denn:

U, V unabhängig bedeutet:

Denn:

U, V unabhängig bedeutet:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a)f_V(b)$$

Denn:

U, V unabhängig bedeutet:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a)f_V(b)$$

$f_{(U,V)}$ *rotationssymmetrisch* heißt: es existiert ein g mit

Denn:

U, V unabhängig bedeutet:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a)f_V(b)$$

$f_{(U,V)}$ *rotationssymmetrisch* heißt: es existiert ein g mit

$$f_{(U,V)}(a, b) = g(r) \quad r := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Denn:

U, V unabhängig bedeutet:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a)f_V(b)$$

$f_{(U,V)}$ *rotationssymmetrisch* heißt: es existiert ein g mit

$$f_{(U,V)}(a, b) = g(r) \quad r := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Mit $f_U = f_V =: h$ folgt

Denn:

U, V unabhängig bedeutet:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a)f_V(b)$$

$f_{(U,V)}$ *rotationssymmetrisch* heißt: es existiert ein g mit

$$f_{(U,V)}(a, b) = g(r) \quad r := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Mit $f_U = f_V =: h$ folgt

$$g(r) = h(a)h(b)$$

$$g(r) = h(a) h(b)$$

$$g(r) = c \cdot h(r) \quad (c := h(0))$$

$$g(r) = h(a) h(b)$$

$$g(r) = c \cdot h(r) \quad (c := h(0))$$

$$c h(\sqrt{a^2 + b^2}) = h(a) h(b)$$

$$g(r) = h(a) h(b)$$

$$g(r) = c \cdot h(r) \quad (c := h(0))$$

$$c h(\sqrt{a^2 + b^2}) = h(a) h(b)$$

Eine Lösung:

$$g(r) = h(a) h(b)$$

$$g(r) = c \cdot h(r) \quad (c := h(0))$$

$$c h(\sqrt{a^2 + b^2}) = h(a) h(b)$$

Eine Lösung:

$$h(x) = e^{-x^2}$$

$$g(r) = h(a) h(b)$$

$$g(r) = c \cdot h(r) \quad (c := h(0))$$

$$c h(\sqrt{a^2 + b^2}) = h(a) h(b)$$

Eine Lösung:

$$h(x) = e^{-x^2}$$

$$e^{-(a^2+b^2)} = e^{-a^2} e^{-b^2}$$

Allgemeine Lösung
(logarithmieren; nach α ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Allgemeine Lösung
(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Nebenbedingungen:

Allgemeine Lösung
(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Nebenbedingungen:

$$\mathbf{P}(U < \infty) = \int h(x) dx = 1$$

Allgemeine Lösung
(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Nebenbedingungen:

$$\mathbf{P}(U < \infty) = \int h(x) dx = 1$$

$$\sigma_U^2 = \int x^2 h(x) dx = 1$$

Allgemeine Lösung
(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Nebenbedingungen:

$$\mathbf{P}(U < \infty) = \int h(x) dx = 1$$

$$\sigma_U^2 = \int x^2 h(x) dx = 1$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

FAZIT

FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz
lässt sich erraten

FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz

lässt sich erraten

(in konkreten Fällen,

FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz

lässt sich erraten

(in konkreten Fällen,

mit etwas Glück).

Bei unserer Entdeckungsreise zum Zentralen Grenzwertsatz hatten wir die (Beinahe-) Rotationssymmetrie der Verteilung von (Z_n, Z'_n) aus den Simulationen abgelesen.

Diese lässt sich aber auch konzeptionell begründen, wenn man die Existenz (irgend-) einer Grenzverteilung im ZGS unterstellt.

Aufgabe: Entdecken Sie die Rotationssymmetrie der Grenzverteilung von (Z_n, Z'_n) (und damit die Gaußsche Glockenkurve) nochmal, indem Sie (ohne Rückgriff auf den ZGS) Folgendes begründen:

Falls für unabhängige, identisch verteilte X_1, X_2, \dots

$$\text{mit } \mathbf{E}[X_i] = 0, \mathbf{E}[X_i^2] = 1$$

die Folge $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \dots + X_n)$ in Verteilung konvergiert,
dann hat die Grenzverteilung ν die folgende Eigenschaft:

Sind Z und Z' unabhängig mit Verteilung ν ,
und sind α und β positive Zahlen mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$,
dann hat auch $\alpha Z + \beta Z'$ die Verteilung ν .

ENDE