Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 1

Uniforme Verteilung,

Exponentialverteilung.

Wiederholung aus Vorlesung 2a:

Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable:

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit endlichem Inhalt $V(S)$.

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich S heißt

uniform verteilt auf S,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Inhalt $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}.$$

(Man beachte die Analogie zu

“Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Fälle”)

Beispiele:

1. $S := [0,1] \subset \mathbb{R}^1$

$A := [\ell, r]$ mit $0 \leq \ell \leq r \leq 1$

$$\mathbf{P}(X \in A) = r - \ell.$$

2. $\quad S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$

$A \subset S$ mit Flächeninhalt $V(A)$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{\ell \cdot b}.$$

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\# S}.$$

Das Analogon dazu ist jetzt:

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück

und rechts als dessen infinitesimaler Inhalt.

Die Gleichung bekommt ihre exakte Bedeutung

“unter dem Integral”:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_A \mathbf{P}(X \in da) = \int_A \frac{da}{V(S)} = \frac{V(A)}{V(S)}$$

Dichten

Wie im Diskreten bleiben wir nicht

bei rein zufälliger Wahl stehen.

Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$

ist jetzt gegeben durch eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}_+$

mit

$$\int_S f(a)\, da = 1.$$

Der wichtigste Fall:

$S \subset \mathbb{R}$ Intervall mit Endpunkten $l,\ r$

(dabei ist $l = -\infty$ oder $r = \infty$ erlaubt)

Sei $f : S \to \mathbb{R}$ nicht-negativ, integrierbar mit

$$\int_l^r f(a)\, da = 1\ .$$

Sei X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S.

Gilt für alle Intervalle $[c, d] \subset S$ die Gleichung

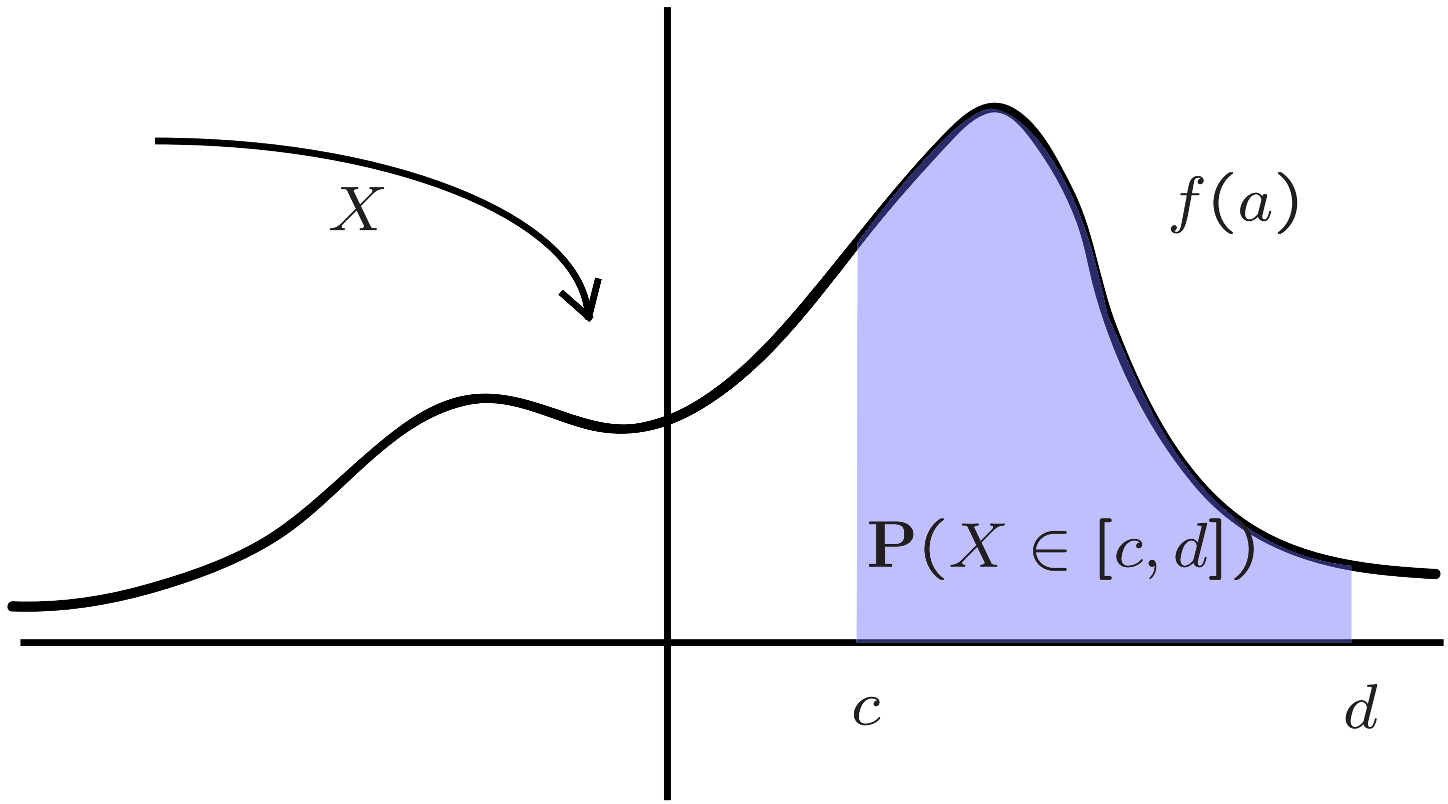
$$\mathbf{P}\Big(X \in [c, d]\Big) = \int_c^d f(a)\, da \ ,$$

so sagt man, dass

X die *Dichte* $f(a)\, da$ besitzt.

Wir schreiben dann auch kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a)\, da \ , \quad a \in S \ .$$


X
$f(a)$
$\mathbf{P}(X \in [c,d])$
c
d

Die Funktion

$$F(x) := \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(a)\, da \;, \quad x \in \mathbb{R}$$

(mit $f(a) = 0$ für $a \notin S$)

heißt *Verteilungsfunktion* von X.

Beispiele:

1. Eine in einem endlichen Intervall $S = [l, r]$ uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $f(a)\,da$

mit $f(a) := 1/(r-l)$, $a \in S$.

Beispiele:

2. Sei U uniform verteilt auf $[0, 2]$.
Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a)\,da, \quad 0 \le x \le 4.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele:

3. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(-\ln U \le x)$$
$$= \mathbf{P}(U \ge e^{-x}) = 1 - e^{-x} \overset{!}{=} \int_0^x f(a)\,da, \quad x \ge 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz

einer reellwertige Zufallsvariable X mit Dichte $f(a)\,da$:

$$\mu = \mathbf{E}[X] := \int_l^r a\, f(a)\, da$$

und

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] := \int_l^r (a-\mu)^2 f(a)\, da\ ,$$

vorausgesetzt, die Integrale sind wohldefiniert.

Analog zum Diskreten gilt für $h : S \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_l^r h(a) f(a)\, da$$

vorausgesetzt das Integral existiert.

Beispiel:

Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$.

$$X := -\ln U$$

$$\mathbf{E}[-\ln U] = \int_0^1 (-\ln u)\, du$$

$$\mathbf{E}X = \int_0^\infty x e^{-x} dx.$$

Definition:

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $\mathbb{R}_+$ heißt

standard-exponentialverteilt,

falls sie die Dichte

$$\mathbf{P}(X \in dx) = e^{-x}\, dx \,,\, x \geq 0$$

besitzt.

Für standard-exponentialverteiltes X gilt:

$$\mathbf{P}(X \geq t) = \int_t^\infty e^{-x}\,dx = e^{-t},$$

$$\mathbf{P}(X \leq t) = 1 - e^{-t}.$$

Erwartungswert und Varianz einer

standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X:

Mit partieller Integration ergibt sich:

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2\, e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x \cdot e^{-x} dx = 2$$

Also: $\mathbf{E}[X] = 1,\ \mathbf{Var}X = 1.$

Sei X standard-exponentialverteilt, $\lambda > 0$.

Was ist die Dichte von $Y := \frac{1}{\lambda}X$?

Heursistik: X hat Dichte $f(x)\,dx$, Dann gilt:

$$\mathbf{P}(Y \in dy) = \mathbf{P}(X \in d(\lambda y)) = f(\lambda y)\,d(\lambda y)$$

$$= f(\lambda y)\,\lambda\,dy.$$

In der Tat gilt das

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x)\,dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y)\,\lambda\,dy$.

Beweis:

$$\mathbf{P}(c \le Y \le d) = \mathbf{P}(\lambda c \le X \le \lambda d)$$

$$= \int_{\lambda c}^{\lambda d} f(x)\,dx = \int_c^d f(\lambda y)\,\lambda\,dy$$

(mit der Substitution $x = \lambda y$). $\square$

Definition:

Sei $\lambda > 0$.

Eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable Y mit Dichte $e^{-\lambda y} \lambda \, dy$

heißt exponentialverteilt mit Parameter λ.

Ein solches Y ist das $\frac{1}{\lambda}$-fache

eines standard-exponentialverteilten X.

Also gilt :

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{Var}\, Y = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:

(Vorlesung 4a, Buch Seite 42):

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt mit $\mathbf{E}[X_n] \to \infty$ für $n \to \infty$, dann gilt:

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,

dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to \mathbf{P}(X \geq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Man sagt dafür auch:

Die Folge der Zufallsvariablen $X_n/\mathbf{E}[X_n]$

konvergiert in Verteilung

gegen die Zufallsvariable X.