Vorlesung 2a

Vorlesung 2a

Diskret uniform verteilte Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable X heißt *diskret uniform verteilt*,

Eine Zufallsvariable X heißt *diskret uniform verteilt*,

wenn ihr Zielbereich S endlich ist und

Eine Zufallsvariable X heißt *diskret uniform verteilt*,

wenn ihr Zielbereich S endlich ist und

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } a \in S.$$

Eine Zufallsvariable X heißt *diskret uniform verteilt*,

wenn ihr Zielbereich S endlich ist und

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } a \in S.$$

Man sagt dafür kurz:

Eine Zufallsvariable X heißt *diskret uniform verteilt*,

wenn ihr Zielbereich S endlich ist und

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } a \in S.$$

Man sagt dafür kurz:

X ist uniform verteilt auf S

Eine Zufallsvariable X heißt *diskret uniform verteilt*,

wenn ihr Zielbereich S endlich ist und

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } a \in S.$$

Man sagt dafür kurz:

X ist uniform verteilt auf S

oder

Eine Zufallsvariable X heißt *diskret uniform verteilt*,

wenn ihr Zielbereich S endlich ist und

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } a \in S.$$

Man sagt dafür kurz:

X ist uniform verteilt auf S

oder

X ist ein *rein zufälliges Element* von S.

Später werden wir auch mit Zufallsvariablen arbeiten,

die uniform verteilt sind

auf einem *kontinuierlichen* Zielbereich, Später werden wir auch mit Zufallsvariablen arbeiten,

die uniform verteilt sind

auf einem *kontinuierlichen* Zielbereich,

etwa einem Intervall $[\ell, r] \subset \mathbb{R}$.

Wir erinnern an die

rein zufällige N-W-Folge der Länge 4

aus Vorlesung 1a

Wir erinnern an die

rein zufällige N-W-Folge der Länge 4

aus Vorlesung 1a

und an die

rein zufällige $1, \dots, r$ - Folge der Länge n

aus Vorlesung 1b.

Jetzt lernen wir drei weitere Beispiele kennen:

Jetzt lernen wir drei weitere Beispiele kennen:

1. Rein zufällige Permutation

Jetzt lernen wir drei weitere Beispiele kennen:

1. Rein zufällige Permutation

2. Rein zufällige k-elementige Teilmenge

Jetzt lernen wir drei weitere Beispiele kennen:

1. Rein zufällige Permutation

2. Rein zufällige k-elementige Teilmenge

3. Uniform verteilte Besetzung

Jetzt lernen wir drei weitere Beispiele kennen:

1. Rein zufällige Permutation

2. Rein zufällige k-elementige Teilmenge

3. Uniform verteilte Besetzung

Bei der Gelegenheit erarbeiten wir auch

einige *Hilfen fürs Abzählen*.

1. Rein zufällge Permutation

Eine *Permutation* von $1, \ldots, n$

ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \ldots, n\}$ auf sich.

Eine *Permutation* von $1, \ldots, n$

ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \ldots, n\}$ auf sich.

z. B. mit $n = 7$

Eine *Permutation* von $1, \ldots, n$

ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \ldots, n\}$ auf sich.

z. B. mit $n = 7$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Wieviele Permutationen von $1, \ldots, n$ gibt es?

Wieviele Permutationen von $1, \ldots, n$ gibt es?

n Möglichkeiten für das Bild von 1

Wieviele Permutationen von $1, \ldots, n$ gibt es?

n Möglichkeiten für das Bild von 1

mal $(n-1)$ Möglichkeiten für das Bild von 2

Wieviele Permutationen von $1, \ldots, n$ gibt es?

n Möglichkeiten für das Bild von 1

mal $(n-1)$ Möglichkeiten für das Bild von 2

mal $(n-2)$ Möglichkeiten für das Bild von 3

Wieviele Permutationen von $1, \ldots, n$ gibt es?

n Möglichkeiten für das Bild von 1

mal $(n-1)$ Möglichkeiten für das Bild von 2

mal $(n-2)$ Möglichkeiten für das Bild von 3

$$\ldots$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

Wieviele Permutationen von $1, \ldots, n$ gibt es?

n Möglichkeiten für das Bild von 1

mal $(n-1)$ Möglichkeiten für das Bild von 2

mal $(n-2)$ Möglichkeiten für das Bild von 3

$$\ldots$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 =: n!$$

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \ldots, n$,

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, n$,

d.h. eine Zufallsvariable, deren Zielbereich

$S :=$ die Menge aller Permutationen von $1, \dots, n$

ist, und die auf S uniform verteilt ist.

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \ldots, n$,

d.h. eine Zufallsvariable, deren Zielbereich

$S :=$ die Menge aller Permutationen von $1, \ldots, n$

ist, und die auf S uniform verteilt ist.

Für alle Elemente $a \in S$ gilt also:

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \ldots, n$,

d.h. eine Zufallsvariable, deren Zielbereich

$S :=$ die Menge aller Permutationen von $1, \ldots, n$

ist, und die auf S uniform verteilt ist.

Für alle Elemente $a \in S$ gilt also:

$$\mathbf{P}\{X = a\} =$$

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \ldots, n$,

d.h. eine Zufallsvariable, deren Zielbereich

$S :=$ die Menge aller Permutationen von $1, \ldots, n$

ist, und die auf S uniform verteilt ist.

Für alle Elemente $a \in S$ gilt also:

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{n!}$$

Jede Permutation zerfällt in Zyklen

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Jede Permutation zerfällt in Zyklen

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Jede Permutation zerfällt in Zyklen

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Jede Permutation zerfällt in Zyklen

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Jede Permutation zerfällt in Zyklen

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Jede Permutation zerfällt in Zyklen

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Jede Permutation zerfällt in Zyklen

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Jede Permutation zerfällt in Zyklen

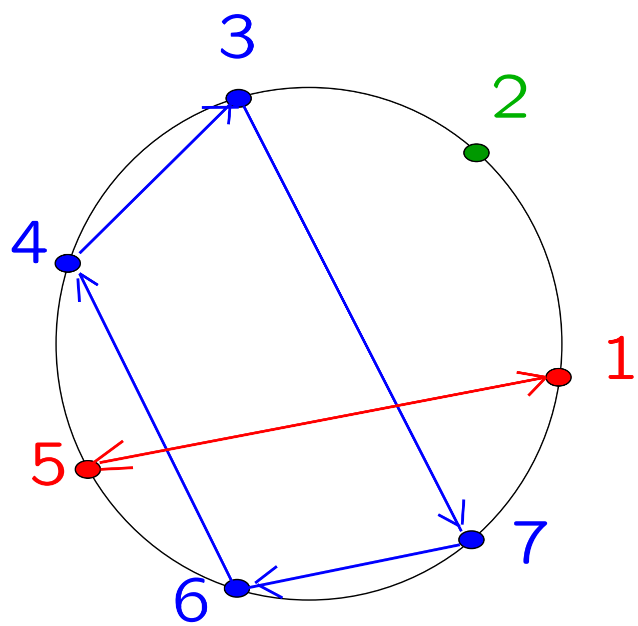
Beispiel:

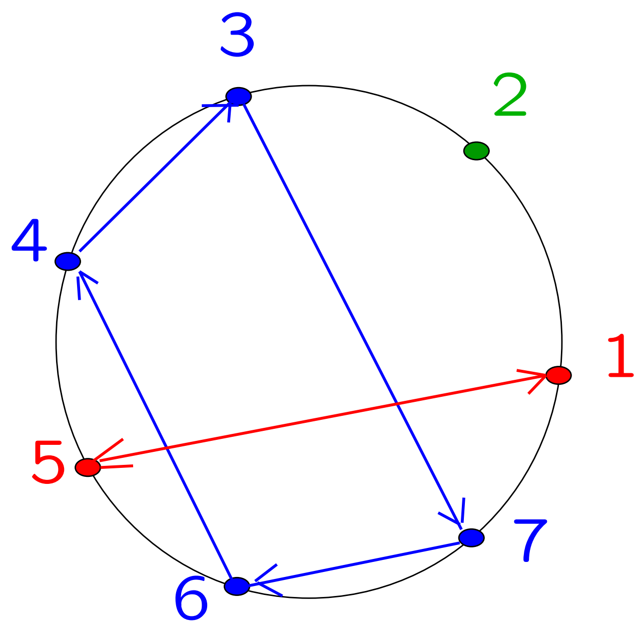
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Jede Permutation zerfällt in Zyklen

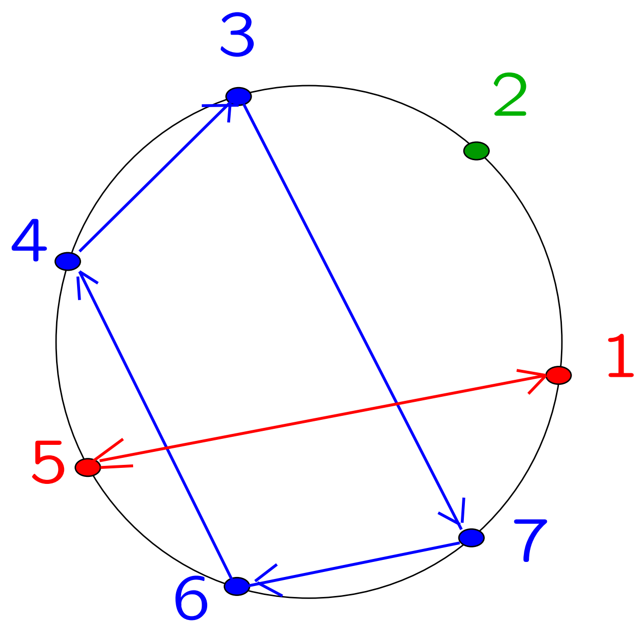
Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$





Die Länge des Zyklus, der die Eins enthält, ist hier



Die Länge des Zyklus, der die Eins enthält, ist hier zwei.

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \ldots, n$,

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, n$,

und b eine Zahl zwischen 1 und n.

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, n$,

und b eine Zahl zwischen 1 und n.

Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
“ der Zyklus von X, der die Eins enthält, hat die Länge b ”.

Für eine Permutation $a \in S$ bezeichne

$$h(a)$$

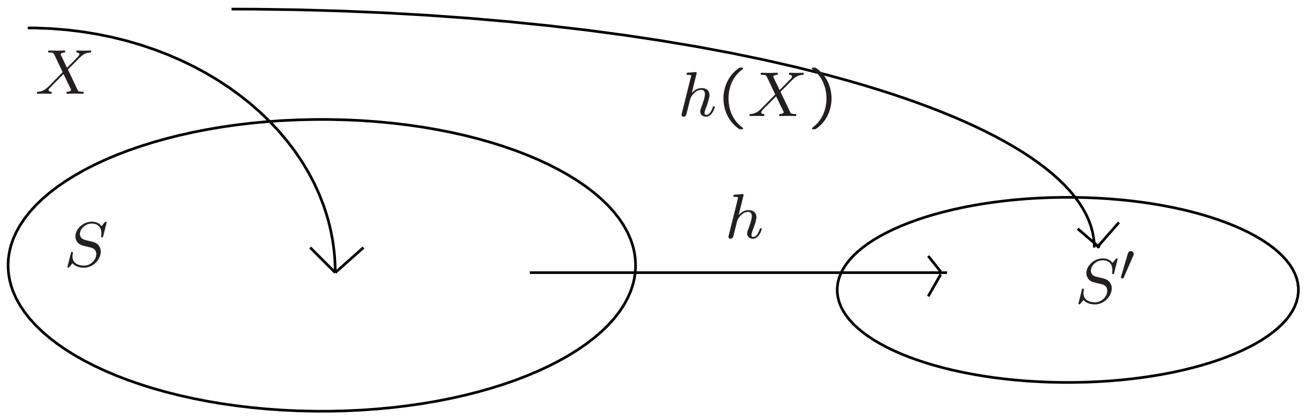
die Länge des Zyklus von a, der die Eins enthält.

Für eine Permutation $a \in S$ bezeichne

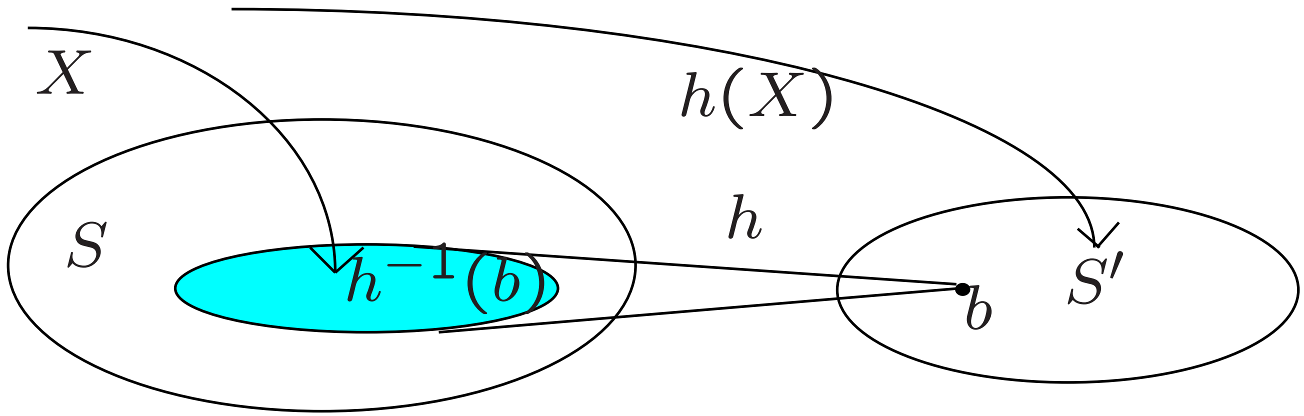
$$h(a)$$

die Länge des Zyklus von a, der die Eins enthält.

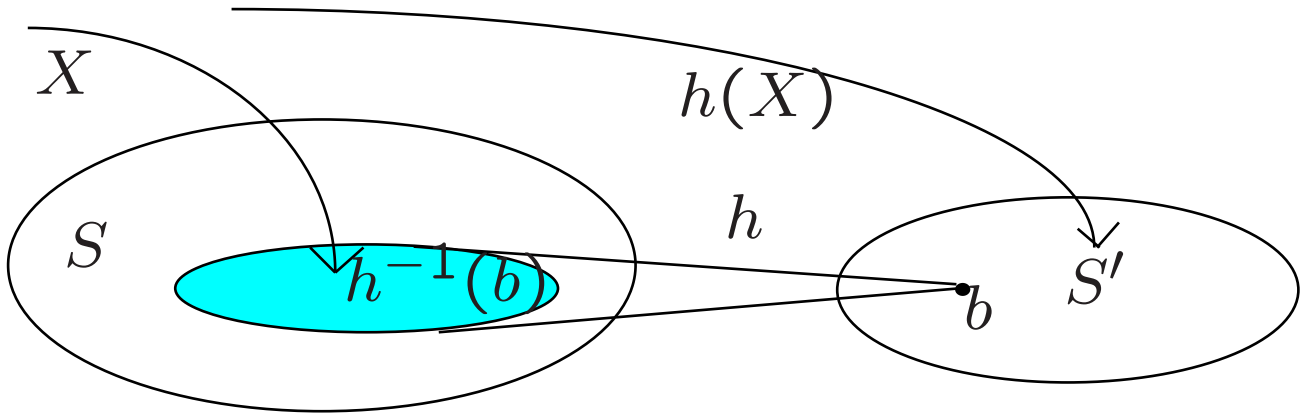
$$\mathbf{P}(h(X) = b) = ?$$



$$S' = \{1, \ldots, n\}$$

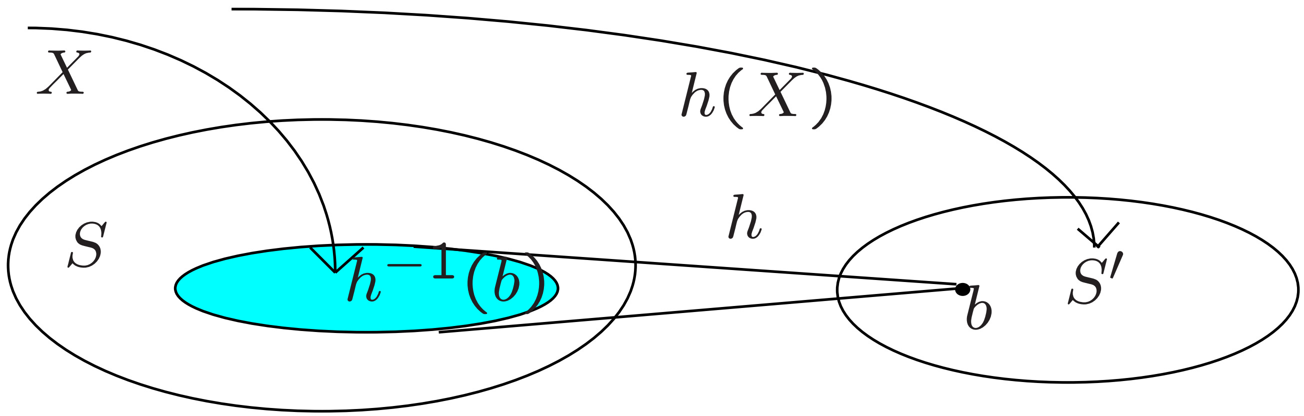


$$S' = \{1, \ldots, n\}$$



$S' = \{1, \ldots, n\}$

Wieviele Permutationen $a \in S$ gibt es mit $h(a) = b$?



$$S' = \{1, \ldots, n\}$$

Wieviele Permutationen $a \in S$ gibt es mit $h(a) = b$?

$$A := \{a \in S : h(a) = b\}$$

$$\#A = ?$$

$$A = \{a \in S : a(1) \neq 1, a^2(1) \neq 1, \ldots, \\ a^{b-1}(1) \neq 1, a^b(1) = 1\}$$

$$\#A = (n-1)(n-2)\cdots(n-b+1)\cdot 1 \cdot (n-b)\cdots 1$$

$$A = \{a \in S : a(1) \neq 1, a^2(1) \neq 1, \ldots, \\ a^{b-1}(1) \neq 1, a^b(1) = 1\}$$

$$\#A = (n-1)(n-2)\cdots(n-b+1) \cdot 1 \cdot (n-b)\cdots 1$$

$$= (n-1)!$$

$$\#A = (n-1)!, \qquad \#S = n!$$

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \frac{\#A}{\#S}$$

$$\#A = (n-1)!, \qquad \#S = n!$$

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \frac{\#A}{\#S}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$\#A = (n-1)!, \qquad \#S = n!$$

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \frac{\#A}{\#S}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n}$$

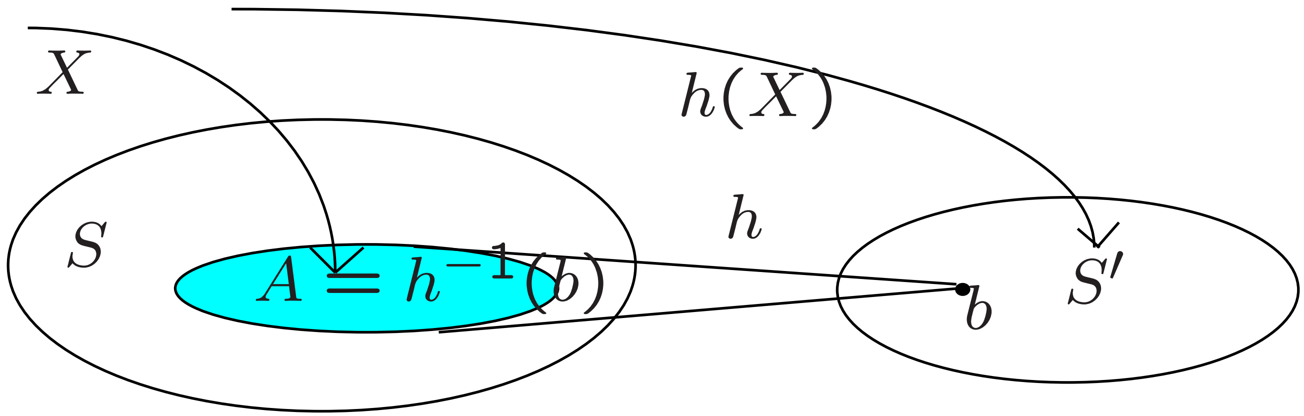
$$\#A = (n-1)!, \qquad \#S = n!$$

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \frac{\#A}{\#S}$$

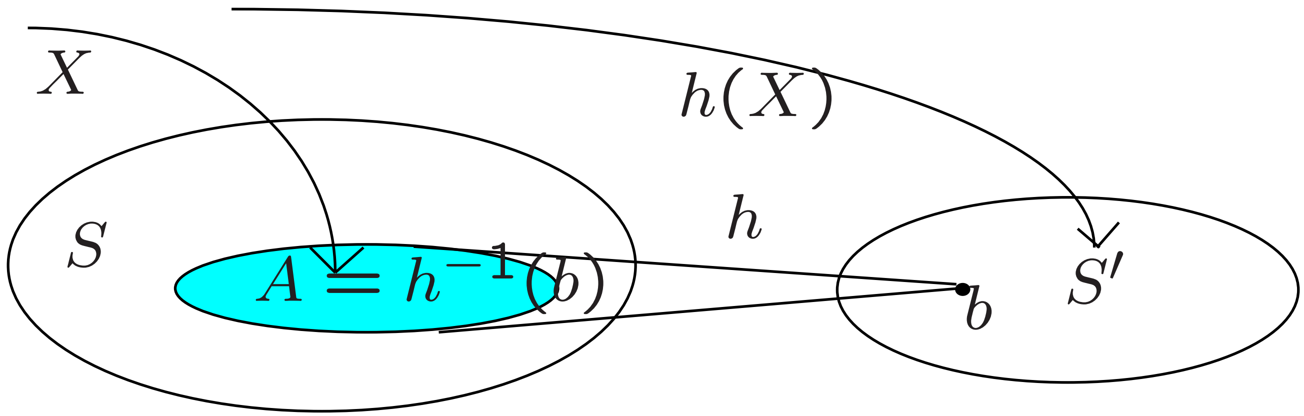
$$= \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{1}{n}$$

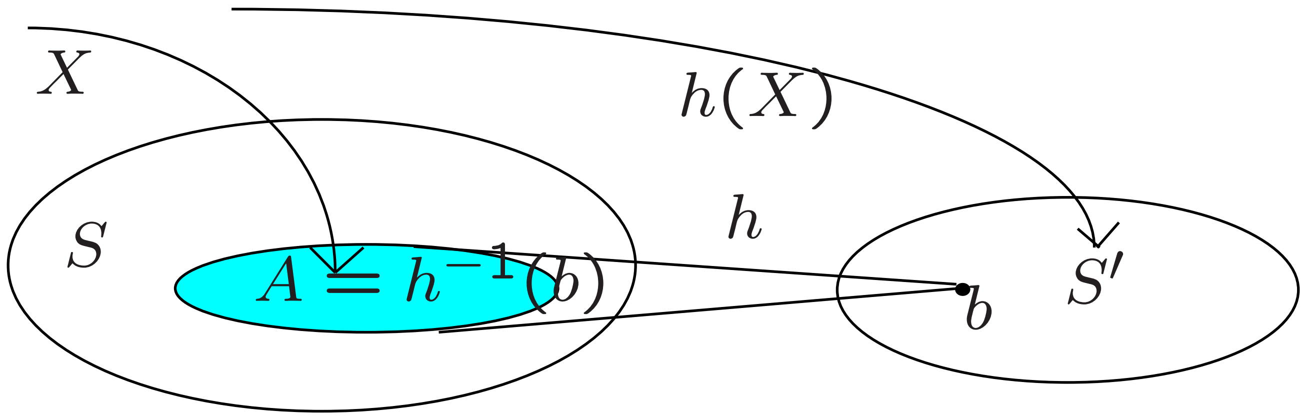


$$S' = \{1, \ldots, n\}$$



$$S' = \{1, \ldots, n\}$$

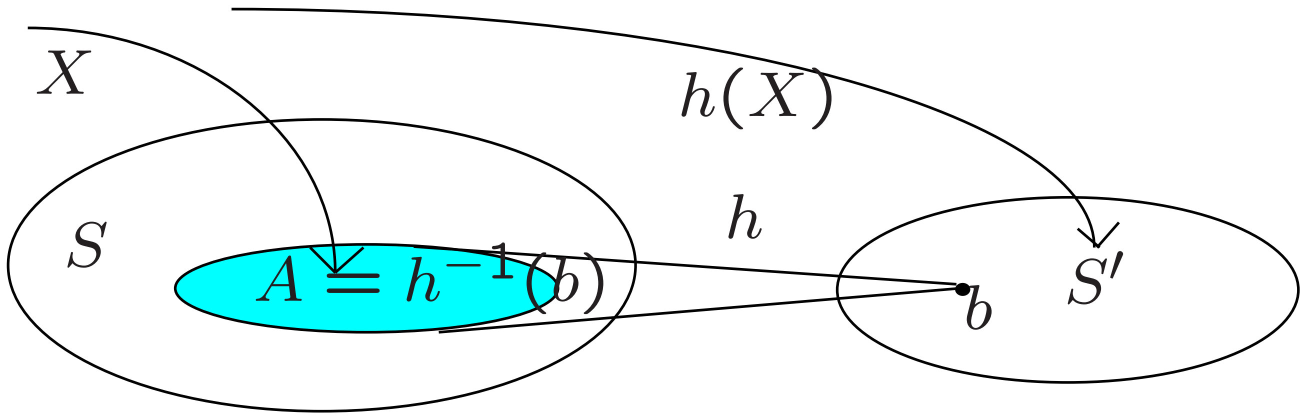
$$A = \{a \in S : h(a) = b\} = h^{-1}(b)$$



$$S' = \{1, \ldots, n\}$$

$$A = \{a \in S : h(a) = b\} = h^{-1}(b)$$

$$\{X \in A\} = \{X \in h^{-1}(b)\} = \{h(X) = b\}$$



$$S' = \{1, \dots, n\}$$

$$A = \{a \in S : h(a) = b\} = h^{-1}(b)$$

$$\{X \in A\} = \{X \in h^{-1}(b)\} = \{h(X) = b\}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}, \quad b = 1, \ldots n.$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}, \quad b = 1, \ldots n.$$

Fazit:

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}, \quad b = 1, \ldots n.$$

Fazit:

Die Länge desjenigen Zyklus

einer rein zufälligen Permutation von $1, \ldots, n$,

der die Eins enthält,

ist uniform verteilt auf $\{1, \ldots, n\}$.

2. Rein zufällige Teilmenge einer festen Größe

Sei $0 \leq k \leq n$

Sei 0 $\leq k \leq n$

und sei Y eine rein zufällige k-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$.

Sei $0 \leq k \leq n$

und sei Y eine rein zufällige k-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$.

Wie wahrscheinlich ist das Ereignis $\{Y = \{1, \ldots, k\}\}$?

Der Zielbereich von Y ist

Der Zielbereich von Y ist

$$S := \{t : t \subset \{1, \ldots, n\}, \#t = k\} \ ,$$

Der Zielbereich von Y ist

$$S := \{t : t \subset \{1, \ldots, n\}, \#t = k\} \ ,$$

die Menge der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$.

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es

$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ mögliche Wahlprotokolle.

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es

$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ mögliche Wahlprotokolle.

Auf die Reihenfolge kommt es nicht an, also führen

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird "nach der Reihe" ausgewählt, dann gibt es

$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ mögliche Wahlprotokolle.

Auf die Reihenfolge kommt es nicht an, also führen

jeweils $k!$ dieser Wahlprotokolle

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es

$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ mögliche Wahlprotokolle.

Auf die Reihenfolge kommt es nicht an, also führen

jeweils $k!$ dieser Wahlprotokolle

auf dieselbe k-elementige Teilmenge.

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Binomialkoeffizient „ n über k “.

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Binomialkoeffizient „ n über k “.

Fazit:

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Binomialkoeffizient „ n über k “.

Fazit:

$$\mathbf{P}(Y = \{1, \ldots, k\}) = \frac{1}{\binom{n}{k}} .$$

$\binom{n}{k}$ ... die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

$\binom{n}{k}$ ... die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmenge aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

$\binom{n}{k}$ $\ldots$ die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmenge aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

k-köpfiges Komitee aus n Leuten...)

$\binom{n}{k}$ ... die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmenge aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

k-köpfiges Komitee aus n Leuten...)

Beispiel: Binomischer Lehrsatz:

$\binom{n}{k}$ $\ldots$ die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmenge aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

k-köpfiges Komitee aus n Leuten...)

Beispiel: Binomischer Lehrsatz:

$$(x + y)^n = (x + y)(x + y) \cdots (x + y)$$

$\binom{n}{k}$ ... die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmenge aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

k-köpfiges Komitee aus n Leuten...)

Beispiel: Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ ... die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmenge aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

k-köpfiges Komitee aus n Leuten...)

Beispiel: Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Die Potenz k gibt an, wie oft der Faktor x zum Zug kommt.

Pascal’sches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdot & & & & & \\
 & & & & & \cdot & & & & &
\end{array}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

.

.

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

$$\vdots$$

Rekursion: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Rekursion: $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten, aus n Männern und einer Frau ein $k+1$ köpfiges Komitee auszuwählen.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdot & & & & & \\
 & & & & & \cdot & & & & &
\end{array}
$$

Rekursion: $\displaystyle \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten, aus n Männern und einer Frau ein $k+1$ köpfiges Komitee auszuwählen.

Entweder die Frau ist nicht dabei... oder sie ist dabei...

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Rekursion: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten, aus n Männern und einer Frau ein $k+1$ köpfiges Komitee auszuwählen.

Entweder die Frau ist nicht dabei. . . oder sie ist dabei. . .

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Rekursion: $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten, aus n Männern und einer Frau ein $k+1$ köpfiges Komitee auszuwählen.

Entweder die Frau ist nicht dabei... oder sie ist dabei...

Eine hilfreiche Vorstellung von

rein zufälligen Permutationen

und rein zufälligen k-elementigen Teilmengen

Eine hilfreiche Vorstellung von

rein zufälligen Permutationen

und rein zufälligen k-elementigen Teilmengen

bietet das

Ziehen ohne Zurücklegen:

Szenario:

eine stets ideal durchmischte Urne

mit anfangs n Kugeln, beschriftet mit den Nummern $1, \dots, n$.

Szenario:

eine stets ideal durchmischte Urne

mit anfangs n Kugeln, beschriftet mit den Nummern $1, \ldots, n$.

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen alle n Kugeln,

Szenario:

eine stets ideal durchmischte Urne

mit anfangs n Kugeln, beschriftet mit den Nummern $1, \dots, n$.

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen alle n Kugeln,

notiere die gezogenen Nummern in Reihenfolge.

Szenario:

eine stets ideal durchmischte Urne

mit anfangs n Kugeln, beschriftet mit den Nummern $1, \ldots, n$.

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen alle n Kugeln,

notiere die gezogenen Nummern in Reihenfolge.

So ergibt sich eine rein zufällige Permutation.

Szenario:

eine stets ideal durchmischte Urne

mit anfangs n Kugeln, beschriftet mit den Nummern $1, \ldots, n$.

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen alle n Kugeln,

notiere die gezogenen Nummern in Reihenfolge.

So ergibt sich eine rein zufällige Permutation.

Die Menge der ersten k gezogenen Nummern

Szenario:

eine stets ideal durchmischte Urne

mit anfangs n Kugeln, beschriftet mit den Nummern $1, \ldots, n$.

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen alle n Kugeln,

notiere die gezogenen Nummern in Reihenfolge.

So ergibt sich eine rein zufällige Permutation.

Die Menge der ersten k gezogenen Nummern

ist eine rein zufällige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer rein zufälligen k-elementigen Teilmenge:

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer rein zufälligen k-elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne

mit k roten und $n - k$ blauen Kugeln.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer rein zufälligen k-elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne

mit k roten und $n-k$ blauen Kugeln.

Notiere die Nummern $X_1, \ldots, X_k$ der Züge,

bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer rein zufälligen k-elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne

mit k roten und $n-k$ blauen Kugeln.

Notiere die Nummern $X_1, \ldots, X_k$ der Züge,

bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Dann ist $\{X_1, \ldots, X_k\}$

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer rein zufälligen k-elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne

mit k roten und $n - k$ blauen Kugeln.

Notiere die Nummern $X_1, \ldots, X_k$ der Züge,

bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Dann ist $\{X_1, \ldots, X_k\}$

eine rein zufällige k-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$.

3. Uniform verteilte Besetzung

3. Uniform verteilte Besetzung

von r Plätzen mit n Objekten:

Der Zielbereich ist

Der Zielbereich ist

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

Der Zielbereich ist

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

k ist das r-tupel der Besetzungszahlen, kurz: die Besetzung.

Der Zielbereich ist

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

k ist das r-tupel der Besetzungszahlen, kurz: die Besetzung.

Sie gibt an, wieviele Objekte auf welchem Platz landen

(und unterscheidet nicht, welche Objekte das sind).

Der Zielbereich ist

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \dots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

k ist das r-tupel der Besetzungszahlen, kurz: die Besetzung.

Sie gibt an, wieviele Objekte auf welchem Platz landen

(und unterscheidet nicht, welche Objekte das sind).

$$\#S_{n,r} = \text{?}$$

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

$$\# S_{n,r} = ?$$

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

$$\#S_{n,r} = ?$$

Fakt:

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

$$\# S_{n,r} = ?$$

Fakt:

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}}\, 0\, \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}}\, 0 \ldots 0\, \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

$$\#S_{n,r} = ?$$

Fakt:

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

ist eine bijektive Abbildung von $S_{n,r}$ nach

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

$$\#S_{n,r} = ?$$

Fakt:

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}}\, 0\, \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}}\, 0 \ldots 0\, \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

ist eine bijektive Abbildung von $S_{n,r}$ nach

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$

mit genau n Einsen

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1\ldots1}_{k_1\text{-mal}}\,0\,\underbrace{1\ldots1}_{k_2\text{-mal}}\,0\ldots0\,\underbrace{1\ldots1}_{k_r\text{-mal}}$$

Die Länge des j-ten Blocks aus Einsen steht für

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1\ldots1}_{k_1\text{-mal}}\,0\,\underbrace{1\ldots1}_{k_2\text{-mal}}\,0\ldots0\,\underbrace{1\ldots1}_{k_r\text{-mal}}$$

Die Länge des j-ten Blocks aus Einsen steht für

die Anzahl der Objekte auf Platz j.

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Die Länge des j-ten Blocks aus Einsen steht für

die Anzahl der Objekte auf Platz j.

Die Blöcke aus Einsen sind durch Nullen getrennt.

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1\ldots1}_{k_1\text{-mal}}\,0\,\underbrace{1\ldots1}_{k_2\text{-mal}}\,0\ldots0\,\underbrace{1\ldots1}_{k_r\text{-mal}}$$

Die Länge des j-ten Blocks aus Einsen steht für die Anzahl der Objekte auf Platz j.

Die Blöcke aus Einsen sind durch Nullen getrennt.

Die Nullen fungieren als “Trennwände” zwischen den r Plätzen, insgesamt gibt es $r-1$ solche Trennwände.

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Beispiel: $n = 5$, $r = 4$:

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1\ldots1}_{k_1\text{-mal}}\,0\,\underbrace{1\ldots1}_{k_2\text{-mal}}\,0\ldots0\,\underbrace{1\ldots1}_{k_r\text{-mal}}$$

Beispiel: $n = 5$, $r = 4$:

$$h(2, 0, 3, 0) = 11001110$$

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1\ldots1}_{k_1\text{-mal}}0\underbrace{1\ldots1}_{k_2\text{-mal}}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{k_r\text{-mal}}$$

Beispiel: $n = 5$, $r = 4$:

$$h(2, 0, 3, 0) = 11001110$$

Der zweite und der vierte Block aus Einsen sind hier leer.

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$
mit genau n Einsen

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$
mit genau n Einsen

$$\#S = ?$$

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$

mit genau n Einsen

$$\#S = ?$$

$$\#S = \binom{n + r - 1}{n}$$

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$

mit genau n Einsen

$$\#S = ?$$

$$\#S = \binom{n + r - 1}{n}$$

Also (wegen der Bijektion h) auch:

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$

mit genau n Einsen

$$\#S = ?$$

$$\#S = \binom{n + r - 1}{n}$$

Also (wegen der Bijektion h) auch:

$$\#S_{n,r} = \binom{n + r - 1}{n}$$

Eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer uniform verteilten Besetzung:

Eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit n weißen und $r-1$ schwarzen

Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit n weißen und $r-1$ schwarzen

Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Notiere 0 beim Zug einer schwarzen

und 1 beim Zug einer weißen Kugel.

Eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit n weißen und $r-1$ schwarzen

Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Notiere 0 beim Zug einer schwarzen

und 1 beim Zug einer weißen Kugel.

Erzeuge so ein rein zufälliges Element aus S.

Eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit n weißen und $r-1$ schwarzen

Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Notiere 0 beim Zug einer schwarzen

und 1 beim Zug einer weißen Kugel.

Erzeuge so ein rein zufälliges Element aus S.

Übersetze dieses (mit der Umkehrung von h)

in eine rein zufällige Besetzung.