

Vorlesung 1b

Kollision von Kennzeichen – Das Geburtstagsproblem:

Kollision von Kennzeichen – Das Geburtstagsproblem:

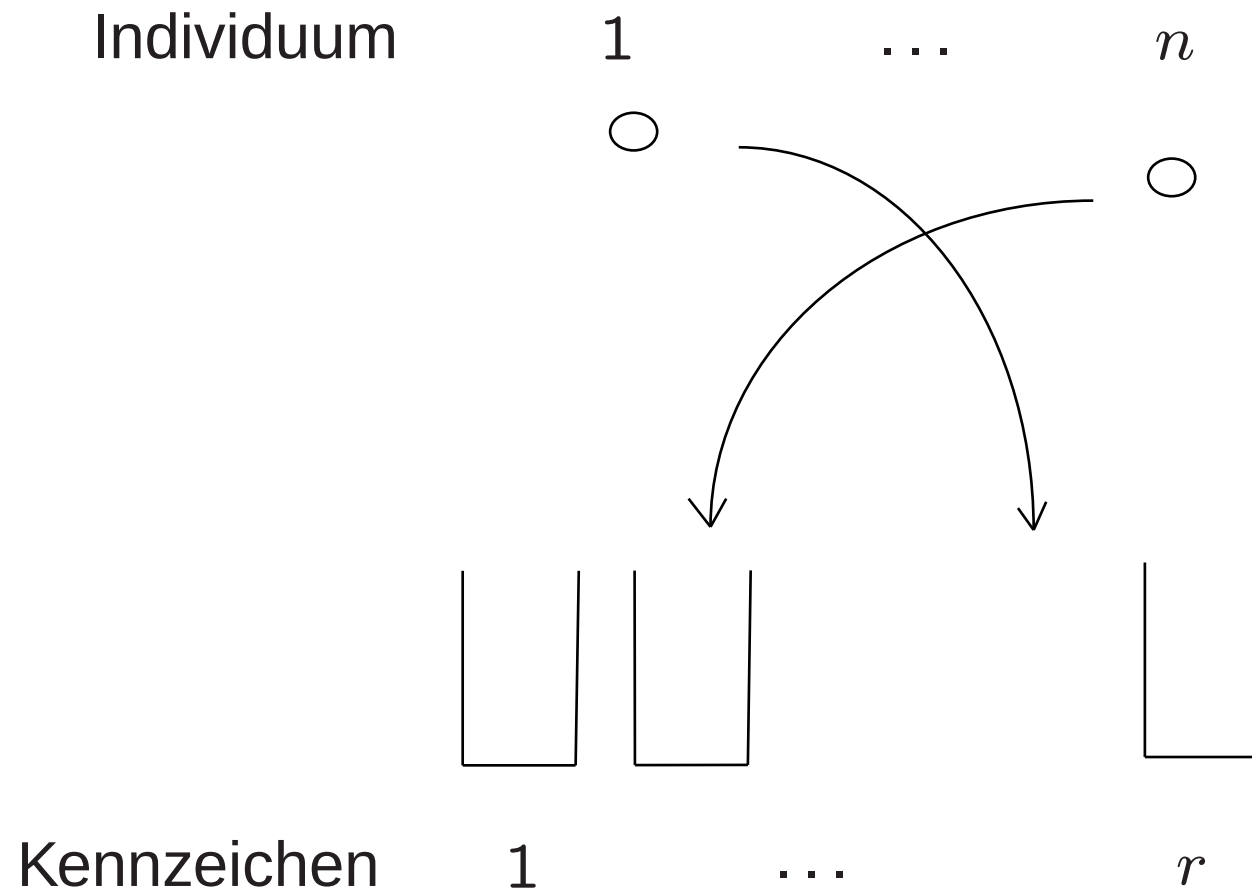
Ein Beispiel zum Bekanntschafmachen
mit den grundlegenden Begriffen

Zufallsvariable, Zielbereich,

Ereignis,

Wahrscheinlichkeit

n Individuen tragen zufällig je eines von r Kennzeichen.



Etwa:

$n = 25$ Leute auf einer Party

Etwa:

$n = 25$ Leute auf einer Party

Kennzeichen ... Geburtstag ($\in \{1, 2, \dots, 365\}$)

Wie stehen die Chancen,
dass es dabei zu keiner Kollision kommt,

Wie stehen die Chancen,
dass es dabei zu keiner Kollision kommt,

dass also keine zwei Individuen gleich gekennzeichnet sind?

Fragen zur Orientierung:

Fragen zur Orientierung:

Wie beschreibt man
die möglichen Ausgänge der Kennzeichnung?

Fragen zur Orientierung:

Wie beschreibt man
die möglichen Ausgänge der Kennzeichnung?

Wie fasst man das Ereignis
„Keine zwei Individuen haben dasselbe Kennzeichen“?

Fragen zur Orientierung:

Wie beschreibt man
die möglichen Ausgänge der Kennzeichnung?

Wie fasst man das Ereignis
„Keine zwei Individuen haben dasselbe Kennzeichen“?

Wie kommt man zur Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses?

Fragen zur Orientierung:

Wie beschreibt man
die möglichen Ausgänge der Kennzeichnung?

Wie fasst man das Ereignis
„Keine zwei Individuen haben dasselbe Kennzeichen“?

Wie kommt man zur Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses?

Unter welchen Bedingungen kommt es
mit merklicher Wahrscheinlichkeit zu Kollisionen?

Die Individuen denken wir uns mit 1 bis n
und die Kennzeichen mit 1 bis r nummeriert.

Ein Ausgang der Kennzeichnung lässt sich beschreiben
durch das n -tupel

$$a = (a_1, \dots, a_n) ,$$

wobei a_i das Kennzeichen des i -ten Individuums bezeichnet

Die Individuen denken wir uns mit 1 bis n
und die Kennzeichen mit 1 bis r nummeriert.

Ein Ausgang der Kennzeichnung lässt sich beschreiben
durch das n -tupel

$$a = (a_1, \dots, a_n) ,$$

wobei a_i das Kennzeichen des i -ten Individuums bezeichnet

$$(1 \leq a_i \leq r).$$

Die Individuen denken wir uns mit 1 bis n
und die Kennzeichen mit 1 bis r nummeriert.

Ein Ausgang der Kennzeichnung lässt sich beschreiben
durch das n -tupel

$$a = (a_1, \dots, a_n) ,$$

wobei a_i das Kennzeichen des i -ten Individuums bezeichnet

$$(1 \leq a_i \leq r).$$

Die Menge der möglichen Ausgänge der Kennzeichnung ist

Die Menge der möglichen Ausgänge der Kennzeichnung ist

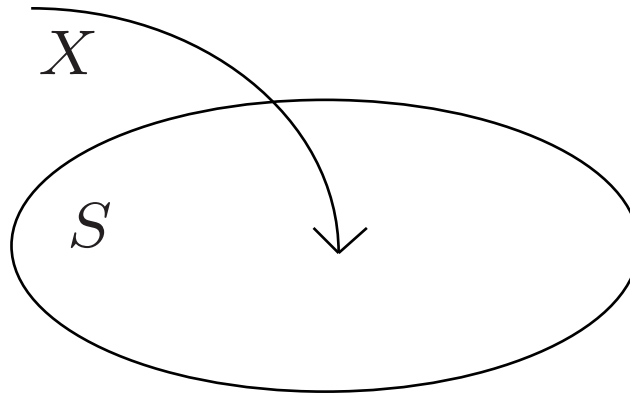
$$S := \{1, \dots, r\}^{\{1, \dots, n\}} ,$$

Die Menge der möglichen Ausgänge der Kennzeichnung ist

$$S := \{1, \dots, r\}^{\{1, \dots, n\}},$$

die Menge aller n -tupel $(a_1, \dots, a_n)$ mit $1 \leq a_i \leq r$.

Den zufälligen Ausgang der Kennzeichnung beschreiben wir durch eine *Zufallsvariable* X .



X kommt durch zufällige Wahl eines Elementes aus S zustande.

Die Menge S heißt *Zielbereich* der Zufallsvariable X .

Wie jedes Element $(a_1, \dots, a_n)$ unserer Menge S

Wie jedes Element $(a_1, \dots, a_n)$ unserer Menge S
besteht auch die Zufallsvariable X aus n Komponenten:

Wie jedes Element $(a_1, \dots, a_n)$ unserer Menge S
besteht auch die Zufallsvariable X aus n Komponenten:

$$X = (X_1, \dots, X_n) .$$

Wir interessieren uns für das *Ereignis*,
dass keine zwei Komponenten von X gleich sind.

Wir interessieren uns für das *Ereignis*,
dass keine zwei Komponenten von X gleich sind.

Dieses Ereignis schreiben wir als

$$\{X_i \neq X_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

Wir interessieren uns für das *Ereignis*,
dass keine zwei Komponenten von X gleich sind.

Dieses Ereignis schreiben wir als

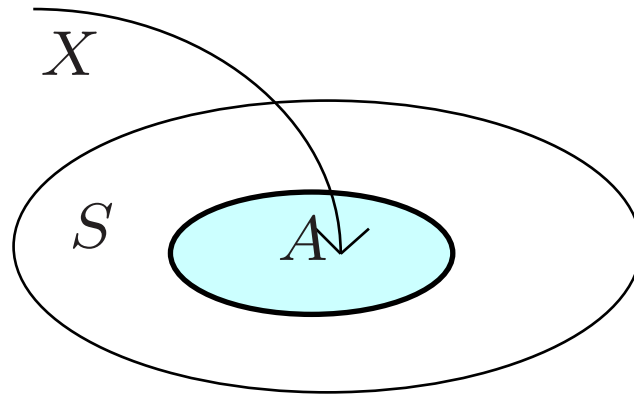
$$\{X_i \neq X_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

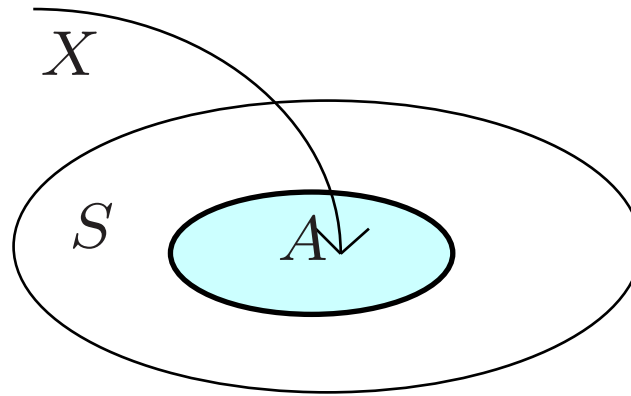
oder auch als

$$\{X \in A\}$$

mit der Teilmenge

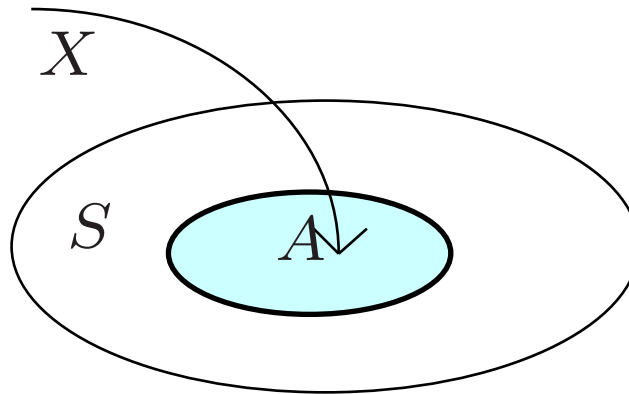
$$A := \{a \in S : a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\} .$$





Ereignisse werden (wie Mengen)
in geschweiften Klammern notiert:

$$\{X \in A\}$$



Ereignisse werden (wie Mengen)
in geschweiften Klammern notiert:

$$\{X \in A\}$$

Lies:

Das Ereignis “ X fällt in A ”.

Zurück zu unseren ersten beiden Fragen:

- (i) Die möglichen Ausgänge des Kennzeichnens beschreiben wir durch die Menge

$$S := \{1, \dots, r\}^{\{1, \dots, n\}}$$

Zurück zu unseren ersten beiden Fragen:

- (i) Die möglichen Ausgänge des Kennzeichnens beschreiben wir durch die Menge

$$S := \{1, \dots, r\}^{\{1, \dots, n\}}$$

- (ii) Das Ereignis

„Keine zwei Individuen haben dasselbe Kennzeichen“
schreiben wir als

$$\{X_i \neq X_j \text{ für alle } i \neq j\},$$

wobei $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine *zufällige Wahl* aus S bezeichnet.

Die weiteren Fragen waren:

- (iii) Wie kommt man zur Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
„Keine zwei Individuen haben dasselbe Kennzeichen“?

Die weiteren Fragen waren:

(iii) Wie kommt man zur Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
„Keine zwei Individuen haben dasselbe Kennzeichen“?

(iv) Unter welchen Bedingungen kommt es
mit merklicher Wahrscheinlichkeit zu Kollisionen?

Bei Frage (iii) kommen *Wahrscheinlichkeiten* ins Spiel.

Bei Frage (iii) kommen *Wahrscheinlichkeiten* ins Spiel.

Sie gehören zu Ereignissen

Bei Frage (iii) kommen *Wahrscheinlichkeiten* ins Spiel.

Sie gehören zu Ereignissen
und messen deren Chance einzutreten

Bei Frage (iii) kommen *Wahrscheinlichkeiten* ins Spiel.

Sie gehören zu Ereignissen
und messen deren Chance einzutreten
mit einer Zahl zwischen 0 und 1:

Bei Frage (iii) kommen *Wahrscheinlichkeiten* ins Spiel.

Sie gehören zu Ereignissen
und messen deren Chance einzutreten
mit einer Zahl zwischen 0 und 1:

$$P(X \in A)$$

Zwei einleuchtende Regeln für das Rechnen mit
Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a) \quad (1)$$

Zwei einleuchtende Regeln für das Rechnen mit
Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a) \quad (1)$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass X in A fällt,

Zwei einleuchtende Regeln für das Rechnen mit
Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a) \quad (1)$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass X in A fällt,
ist die Summe über die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses,

Zwei einleuchtende Regeln für das Rechnen mit
Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a) \quad (1)$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass X in A fällt,
ist die Summe über die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses,
dass X den Ausgang a hat, summiert über $a \in A$.

Zwei einleuchtende Regeln für das Rechnen mit
Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a) \quad (1)$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass X in A fällt,
ist die Summe über die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses,
dass X den Ausgang a hat, summiert über $a \in A$.

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1 . \quad (2)$$

Zwei einleuchtende Regeln für das Rechnen mit
Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a) \quad (1)$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass X in A fällt,
ist die Summe über die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses,
dass X den Ausgang a hat, summiert über $a \in A$.

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1 . \quad (2)$$

d.h. das *sichere Ereignis* $\{X \in S\}$ hat Wahrscheinlichkeit 1.

Um die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(X \in A)$ berechnen zu können,

Um die Wahrscheinlichkeit $P(X \in A)$ berechnen zu können,
muss man eine **Modellannahme** treffen.

Unsere Modellannahme:

Unsere Modellannahme:

rein zufällige Wahl.

Unsere Modellannahme:

rein zufällige Wahl.

Damit ist gemeint, dass für je zwei $a, a' \in S$

$$\mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X = a').$$

Unsere Modellannahme:

rein zufällige Wahl.

Damit ist gemeint, dass für je zwei $a, a' \in S$

$$\mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X = a').$$

Das heißt: kein Ausgang ist bevorzugt.

Aus

$$\mathbf{P}(X \in S) = \sum_{a \in S} \mathbf{P}(X = a) = 1$$

und der Gleichheit aller $\mathbf{P}(X = a)$ folgt

$$P(X = a) = \frac{1}{\#S}, \quad a \in S.$$

Aus

$$\mathbf{P}(X \in S) = \sum_{a \in S} \mathbf{P}(X = a) = 1$$

und der Gleichheit aller $\mathbf{P}(X = a)$ folgt

$$P(X = a) = \frac{1}{\#S}, \quad a \in S.$$

Also:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a) = \sum_{a \in A} \frac{1}{\#S} = \frac{\#A}{\#S}.$$

Aus

$$\mathbf{P}(X \in S) = \sum_{a \in S} \mathbf{P}(X = a) = 1$$

und der Gleichheit aller $\mathbf{P}(X = a)$ folgt

$$P(X = a) = \frac{1}{\#S}, \quad a \in S.$$

Also:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a) = \sum_{a \in A} \frac{1}{\#S} = \frac{\#A}{\#S}.$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\#A}{\#S}.$$

Wir haben nun die Aufgabe des Abzählens der Mengen

$$S := \{1, \dots, r\}^{\{1, \dots, n\}} = \{(a_1, \dots, a_n) : 1 \leq a_i \leq r\}$$

Wir haben nun die Aufgabe des Abzählens der Mengen

$$S := \{1, \dots, r\}^{\{1, \dots, n\}} = \{(a_1, \dots, a_n) : 1 \leq a_i \leq r\}$$

und

$$A := \{a \in S : a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

Wir haben nun die Aufgabe des Abzählens der Mengen

$$S := \{1, \dots, r\}^{\{1, \dots, n\}} = \{(a_1, \dots, a_n) : 1 \leq a_i \leq r\}$$

und

$$A := \{a \in S : a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

$$\#S = r^n$$

$$S = \{(a_1, \dots, a_n) : 1 \leq a_i \leq r\}$$

$$A := \{a \in S : a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

$$\#A = ?$$

$$S = \{(a_1, \dots, a_n) : 1 \leq a_i \leq r\}$$

$$A := \{a \in S : a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

$$\#A = ?$$

Für a_1 gibt es r mögliche Werte, für a_2 dann noch $r - 1$, usw.

Also:

$$S = \{(a_1, \dots, a_n) : 1 \leq a_i \leq r\}$$

$$A := \{a \in S : a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

$$\#A = ?$$

Für a_1 gibt es r mögliche Werte, für a_2 dann noch $r - 1$, usw.

Also:

$$\#A = r(r - 1) \cdots (r - (n - 1))$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(X \in A) &= \frac{r(r-1) \cdots (r-(n-1))}{r^n} \\
 &= \frac{r-1}{r} \frac{r-2}{r} \cdots \frac{r-(n-1)}{r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(X \in A) &= \frac{r(r-1) \cdots (r-(n-1))}{r^n} \\
 &= \frac{r-1}{r} \frac{r-2}{r} \cdots \frac{r-(n-1)}{r}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r} \right) .$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \in A) &= \frac{r(r-1) \cdots (r-(n-1))}{r^n} \\ &= \frac{r-1}{r} \frac{r-2}{r} \cdots \frac{r-(n-1)}{r} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right) .$$

Wie groß ist das z.B. für $n = 25$ und $r = 365$?

Abschätzung nach oben: $1 - t \leq e^{-t}$

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right) \leq \prod_{i=1}^{n-1} \exp\left(-\frac{i}{r}\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{r}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2r}\right).$$

Abschätzung nach oben: $1 - t \leq e^{-t}$

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right) \leq \prod_{i=1}^{n-1} \exp\left(-\frac{i}{r}\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{r}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2r}\right).$$

$$\mathbf{P}(X \in A) \leq \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2r}\right).$$

Für eine Abschätzung von $\mathbf{P}(X \in A)$ nach unten betrachten wir die Komplementärmenge von A ,

$$A^c = \{a \in S : a_i = a_j \text{ für mindestens ein Paar } i \neq j\} .$$

Für eine Abschätzung von $\mathbf{P}(X \in A)$ nach unten betrachten wir die Komplementärmenge von A ,

$$A^c = \{a \in S : a_i = a_j \text{ für mindestens ein Paar } i \neq j\} .$$

$$\#A^c \leq ?$$

$$A^c = \{a \in S : a_i = a_j \text{ für mindestens ein Paar } i \neq j\} .$$

$$\#A^c \leq ?$$

Es gibt $\frac{n(n-1)}{2}$ zweielementige Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.

Für festes $i \neq j$ gibt es r^{n-1} Elemente a in A^c mit $a_i = a_j$.

Also (wegen Mehrfachzählungen)

$$\#A^c \leq \frac{n(n-1)}{2} r^{n-1}$$

$$\frac{\#A^c}{\#S} \leq \frac{n(n-1)}{2r} , \quad \frac{\#A}{\#S} \geq 1 - \frac{n(n-1)}{2r} .$$

Zusammenfassend gilt

$$1 - \frac{n(n-1)}{2r} \leq \mathbf{P}(X \in A) \leq \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2r}\right).$$

Für $n^2 \ll r$ ist $\mathbf{P}(X \in A) \approx 1$.

Zusammenfassend gilt

$$1 - \frac{n(n-1)}{2r} \leq \mathbf{P}(X \in A) \leq \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2r}\right).$$

Für $n^2 \ll r$ ist $\mathbf{P}(X \in A) \approx 1$.

Wenn n^2 ähnlich groß ist wie r , dann kommt es mit merklicher Wahrscheinlichkeit zu Kollisionen.

Zusammenfassend gilt

$$1 - \frac{n(n-1)}{2r} \leq \mathbf{P}(X \in A) \leq \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2r}\right).$$

Für $n^2 \ll r$ ist $\mathbf{P}(X \in A) \approx 1$.

Wenn n^2 ähnlich groß ist wie r , dann kommt es mit merklicher Wahrscheinlichkeit zu Kollisionen.

Und die beiden Schranken in unserer Abschätzung entfernen sich voneinander.

Zusammenfassend gilt

$$1 - \frac{n(n-1)}{2r} \leq \mathbf{P}(X \in A) \leq \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2r}\right).$$

Für $n^2 \ll r$ ist $\mathbf{P}(X \in A) \approx 1$.

Wenn n^2 ähnlich groß ist wie r , dann kommt es mit merklicher Wahrscheinlichkeit zu Kollisionen.

Und die beiden Schranken in unserer Abschätzung entfernen sich voneinander.

Welche der beiden Schranken ist die bessere Näherung?

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \in A) &= \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)}{r^n} \\
&= \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)(r-n)(r-n-1) \cdots 2 \cdot 1}{r^n (r-n)(r-n-1) \cdots 2 \cdot 1} \\
&= \frac{r!}{r^n (r-n)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \in A) &= \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)}{r^n} \\
&= \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)(r-n)(r-n-1) \cdots 2 \cdot 1}{r^n (r-n)(r-n-1) \cdots 2 \cdot 1} \\
&= \frac{r!}{r^n (r-n)!}
\end{aligned}$$

mit $k! := 1 \cdot 2 \cdots k$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \in A) &= \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)}{r^n} \\
&= \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)(r-n)(r-n-1) \cdots 2 \cdot 1}{r^n (r-n)(r-n-1) \cdots 2 \cdot 1} \\
&= \frac{r!}{r^n (r-n)!}
\end{aligned}$$

mit $k! := 1 \cdot 2 \cdots k$

Lies: k -Fakultät

Die Stirling-Formel:

Die Stirling-Formel:

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$$



Abraham de Moivre (1667-1754)

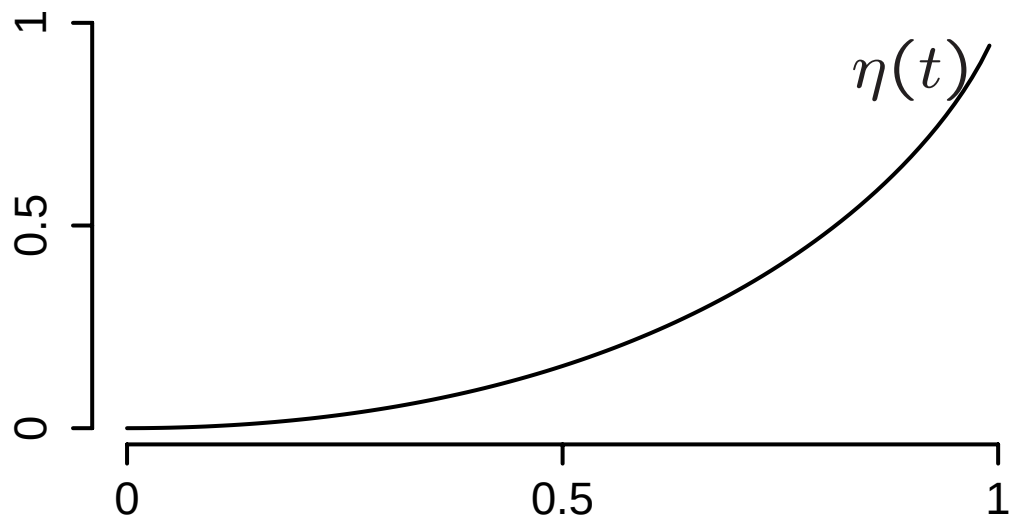
$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

$$\frac{r!}{r^n(r-n)!} \approx \sqrt{\frac{r}{r-n}} \left(\frac{r}{r-n}\right)^{r-n} e^{-n}$$

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{n}{r}\right)^{n-r} e^{-n} &= \exp \left(-n + (n-r) \ln \left(1 - \frac{n}{r}\right) \right) \\
&= \exp \left(-r \left(\frac{n}{r} + \left(1 - \frac{n}{r}\right) \ln \left(1 - \frac{n}{r}\right) \right) \right) \\
&= \exp \left(-r \, \eta \left(\frac{n}{r} \right) \right)
\end{aligned}$$

mit $\eta(t) := t + (1-t) \ln(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1.$

$$\eta(t) := t + (1 - t) \ln(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$



$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta''(0) = 1$$

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{r}}} \exp \left(-r \eta \left(\frac{n}{r} \right) \right)$$

mit

$$\eta(t) = t + (1 - t) \ln(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{r}}} \exp \left(-r \eta \left(\frac{n}{r} \right) \right)$$

mit

$$\eta(t) = t + (1 - t) \ln(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Die obere Schranke für $\mathbf{P}(X \in A)$ war

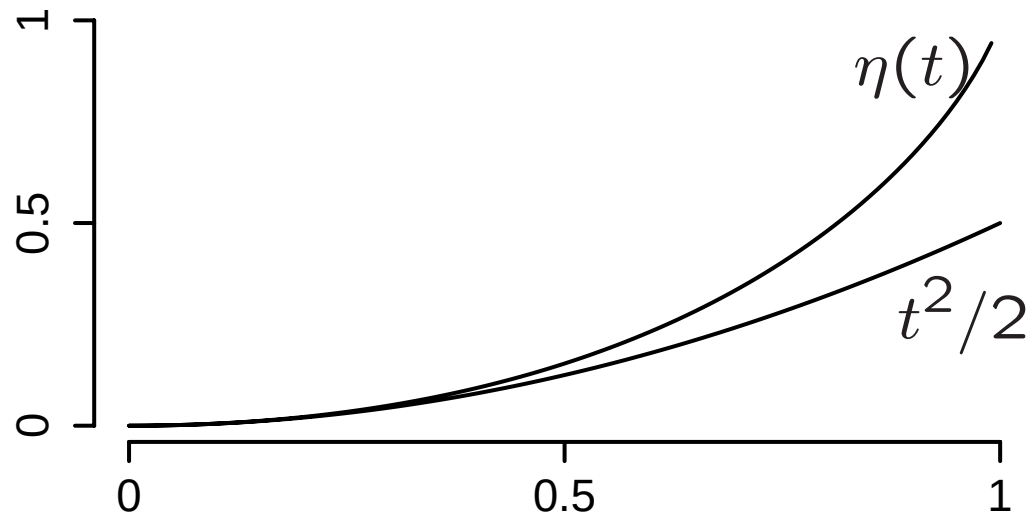
$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{r}}} \exp \left(-r \eta \left(\frac{n}{r} \right) \right)$$

mit

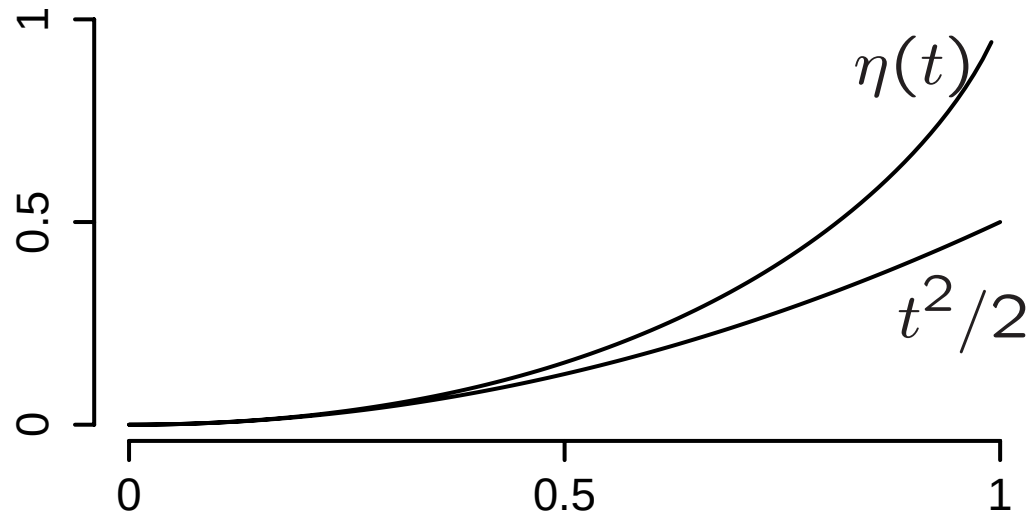
$$\eta(t) = t + (1 - t) \ln(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Die obere Schranke für $\mathbf{P}(X \in A)$ war

$$\exp \left(- \frac{(n - 1)n}{2r} \right) \approx \exp \left(- r \frac{1}{2} \left(\frac{n}{r} \right)^2 \right)$$



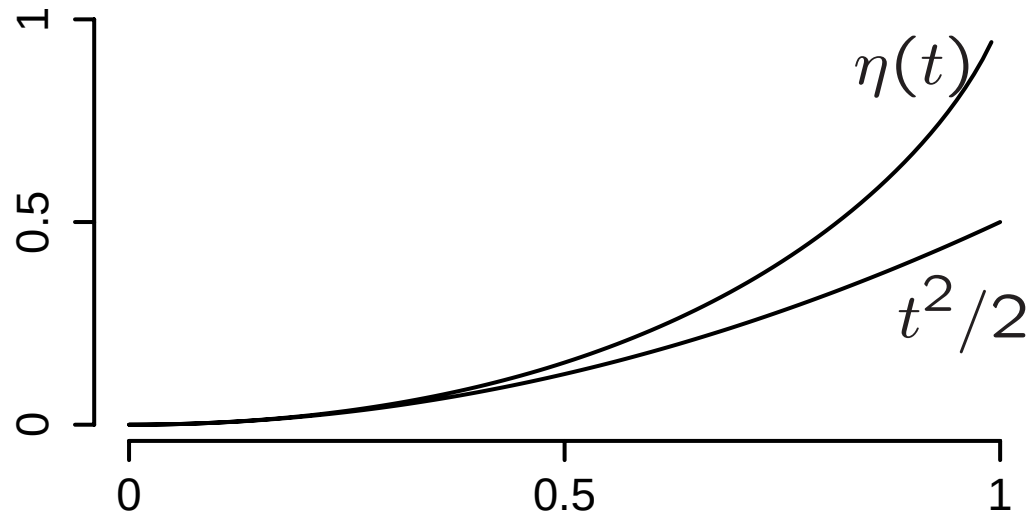
$t^2/2$ ist die quadratische Approximation



$t^2/2$ ist die quadratische Approximation
(Taylor-Approximation der Ordnung 2 von $\eta(t)$ in $t = 0$).

Für $n \ll r$ (wie z. B. für $n = 25$, $r = 365$) ist also

$$\eta\left(\frac{n}{r}\right) \approx \left(\frac{n}{r}\right)^2 / 2.$$



$t^2/2$ ist die quadratische Approximation
(Taylor-Approximation der Ordnung 2 von $\eta(t)$ in $t = 0$).

Für $n \ll r$ (wie z. B. für $n = 25$, $r = 365$) ist also

$$\eta\left(\frac{n}{r}\right) \approx \left(\frac{n}{r}\right)^2 / 2.$$

Fazit:

Fazit:

Für $n < r$ ist $\mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{r}}} \exp \left(-r \eta \left(\frac{n}{r} \right) \right)$

Fazit:

$$\text{Für } n < r \text{ ist } \mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{r}}} \exp \left(-r \eta \left(\frac{n}{r} \right) \right)$$

mit $\eta(t) = t + (1 - t) \ln(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$
(Stirling-Approximation).

Fazit:

$$\text{Für } n < r \text{ ist } \mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{r}}} \exp \left(-r \eta \left(\frac{n}{r} \right) \right)$$

$$\text{mit } \eta(t) = t + (1 - t) \ln(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Stirling-Approximation).

$$\text{Für } n \ll r \text{ ist } \mathbf{P}(X \in A) \approx \exp \left(-\frac{n^2}{2r} \right)$$

Fazit:

$$\text{Für } n < r \text{ ist } \mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{r}}} \exp \left(-r \eta \left(\frac{n}{r} \right) \right)$$

mit $\eta(t) = t + (1 - t) \ln(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$
(Stirling-Approximation).

$$\text{Für } n \ll r \text{ ist } \mathbf{P}(X \in A) \approx \exp \left(-\frac{n^2}{2r} \right)$$

(Stirling+Taylor-Approximation)

Fazit:

$$\text{Für } n < r \text{ ist } \mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{r}}} \exp \left(-r \eta \left(\frac{n}{r} \right) \right)$$

$$\text{mit } \eta(t) = t + (1 - t) \ln(1 - t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Stirling-Approximation).

$$\text{Für } n \ll r \text{ ist } \mathbf{P}(X \in A) \approx \exp \left(-\frac{n^2}{2r} \right)$$

(Stirling+Taylor-Approximation)

$$\text{Für } n^2 \ll r \text{ ist } \mathbf{P}(X \in A) \approx 1.$$

Beispiel: $n = 25, r = 365$:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)}{r^n} = 0.431300$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{r}}} \exp \left(-r \eta \left(\frac{n}{r} \right) \right) = 0.431308$$

$$\exp \left(-\frac{n^2}{2r} \right) = 0.425$$

Beispiel: $n = 25, r = 365$:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)}{r^n} = 0.431300$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n}{r}}} \exp \left(-r \eta \left(\frac{n}{r} \right) \right) = 0.431308$$

$$\exp \left(-\frac{n^2}{2r} \right) = 0.425$$

