# Elementare Stochastik

Sommersemester 2011

Anton Wakolbinger

Webseite der Vorlesung:

http://ismi.math.uni-frankfurt.de/

wakolbinger/teaching/Elesto11/

Webseite der Vorlesung:

http://ismi.math.uni-frankfurt.de/
wakolbinger/teaching/Elesto11/

oder:

google
$\rightarrow$ Wakolbinger
$\rightarrow$ SS 2011 Elementare Stochastik

Anmeldung zu den Übungen:

http://www.math.uni-frankfurt.de/anmeldung/

Abschlussklausur:

Freitag, 15. Juli 2011

10:15 - 11:45

# Vorlesung 1a

# Vom gerechten Aufteilen eines Spieleinsatzes

Vom gerechten Aufteilen eines Spieleinsatzes

Die Lösungen von Fermat und Pascal

1654

# Vom gerechten Aufteilen eines Spieleinsatzes

## Die Lösungen von Fermat und Pascal

## 1654

([KW] Seite 103/104)

Pierre de Fermat (1601-1665)

Blaise Pascal (1623-1662)

A und B spielen ein faires Spiel.

In jeder Runde gewinnt entweder A oder B

(neue Runde, neues Glück).

Derjenige gewinnt den gesamten Einsatz,

der als erster 4 Runden gewonnen hat.

A und B spielen ein faires Spiel.

In jeder Runde gewinnt entweder A oder B

(neue Runde, neues Glück).

Derjenige gewinnt den gesamten Einsatz,

der als erster 4 Runden gewonnen hat.

Nachdem A zwei und B eine Runde gewonnen hat,

muss das Spiel abgebrochen werden.

Wie ist der Einsatz gerecht aufzuteilen?

Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Beschreibung des Spielverlaufs durch einen “Nordostpfad”:

Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Beschreibung des Spielverlaufs durch einen “Nordostpfad”:

A gewinnt eine Runde:  ein Schritt nach Osten

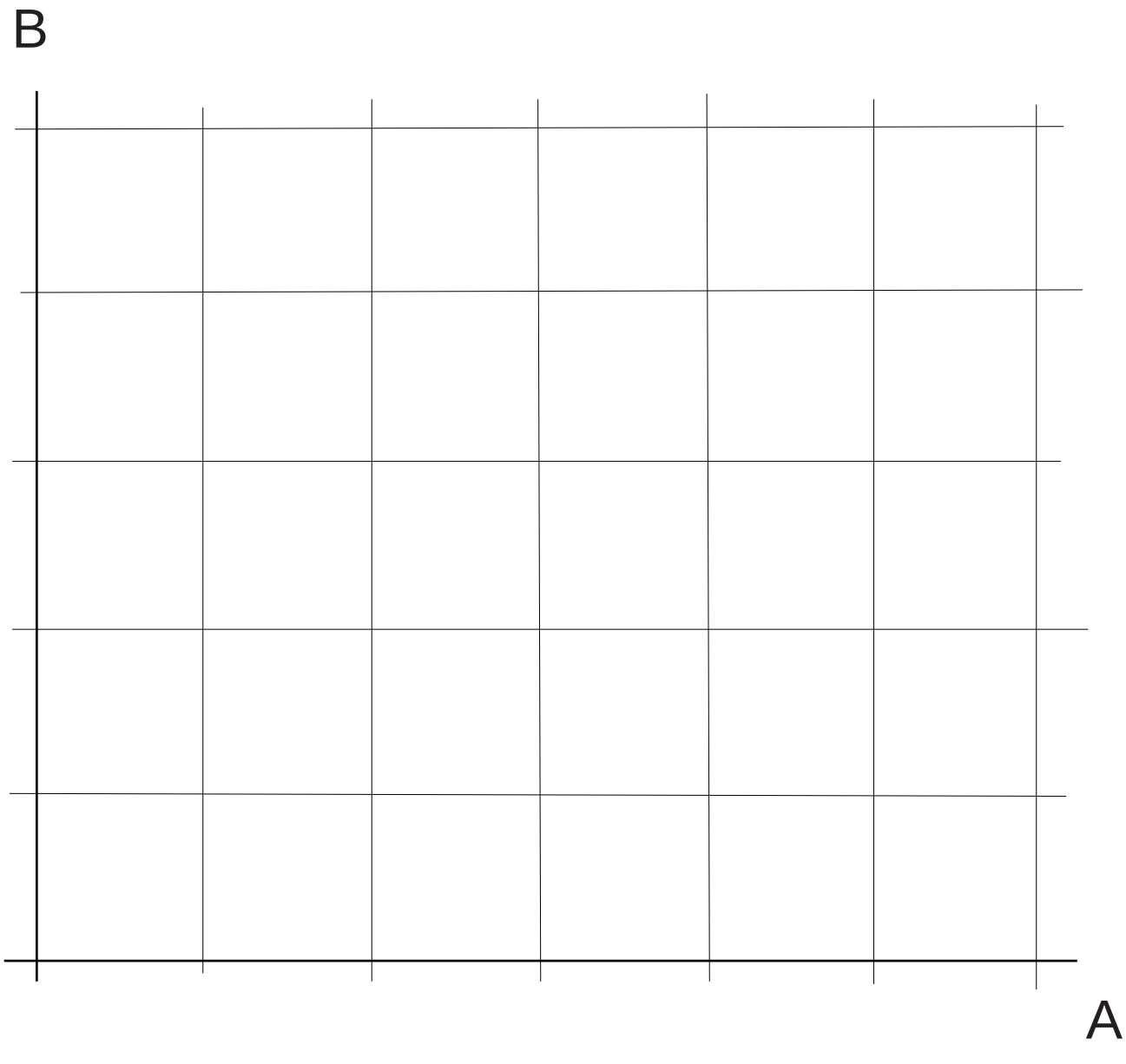
Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Beschreibung des Spielverlaufs durch einen “Nordostpfad”:

A gewinnt eine Runde:  ein Schritt nach Osten

B gewinnt eine Runde: ein Schritt nach Norden


B
A

Jede Runde geht mit W’kt 1/2 an A

und mit W’kt 1/2 an B.

Jede Runde geht mit W’kt 1/2 an A

und mit W’kt 1/2 an B.

Neue Runde, neues Glück.

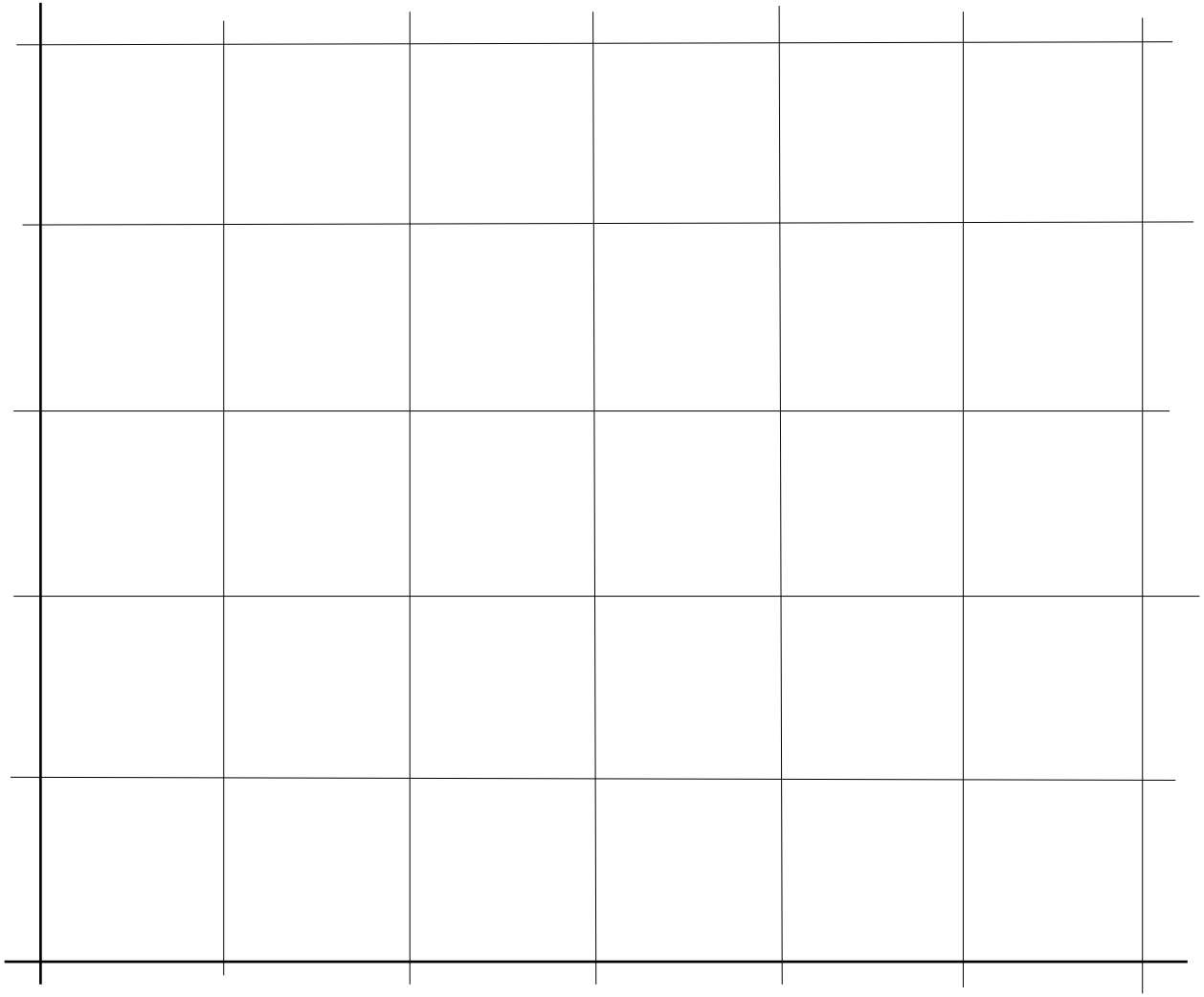
Jede Runde geht mit W’kt 1/2 an A

und mit W’kt 1/2 an B.

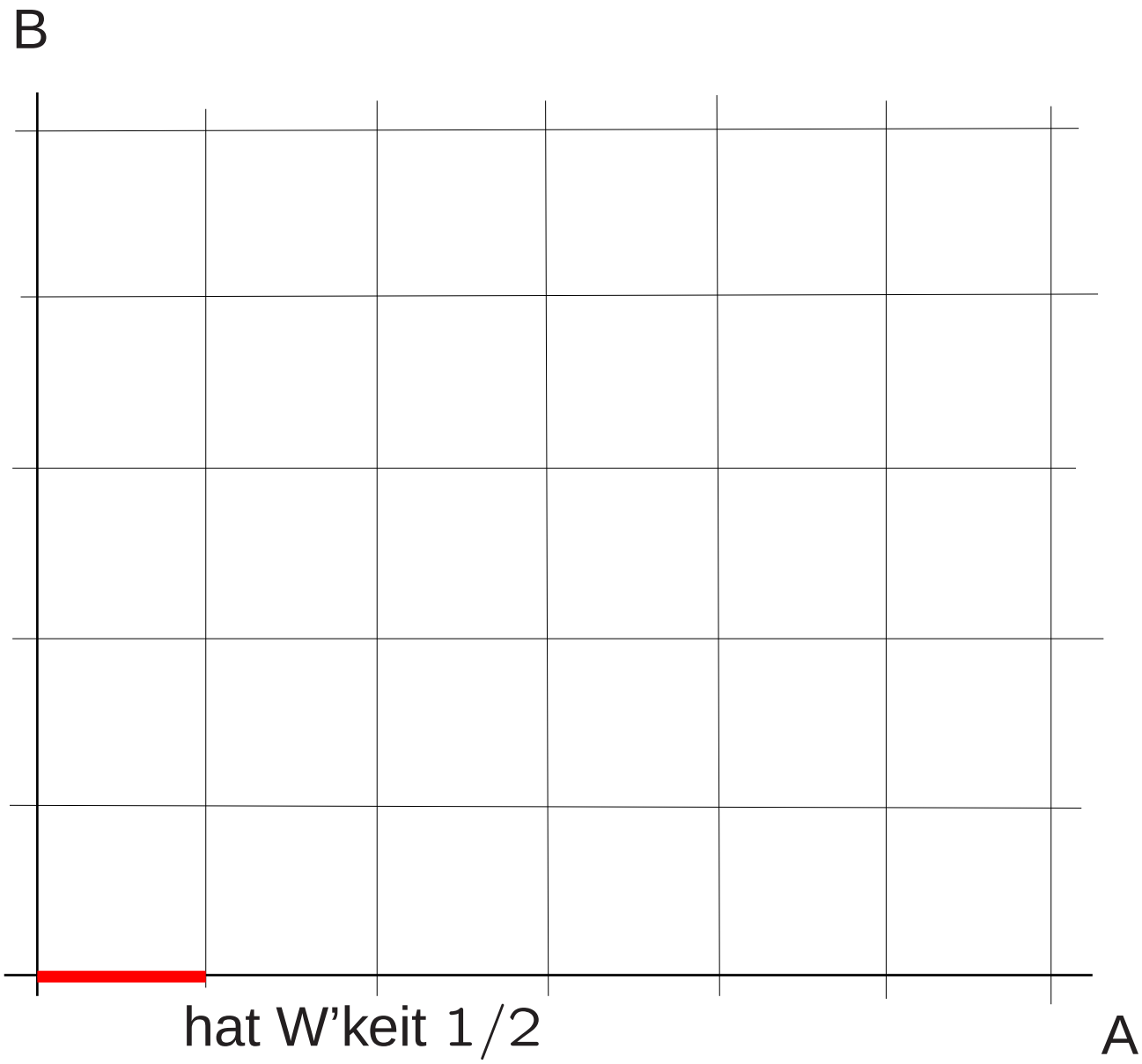
Neue Runde, neues Glück.

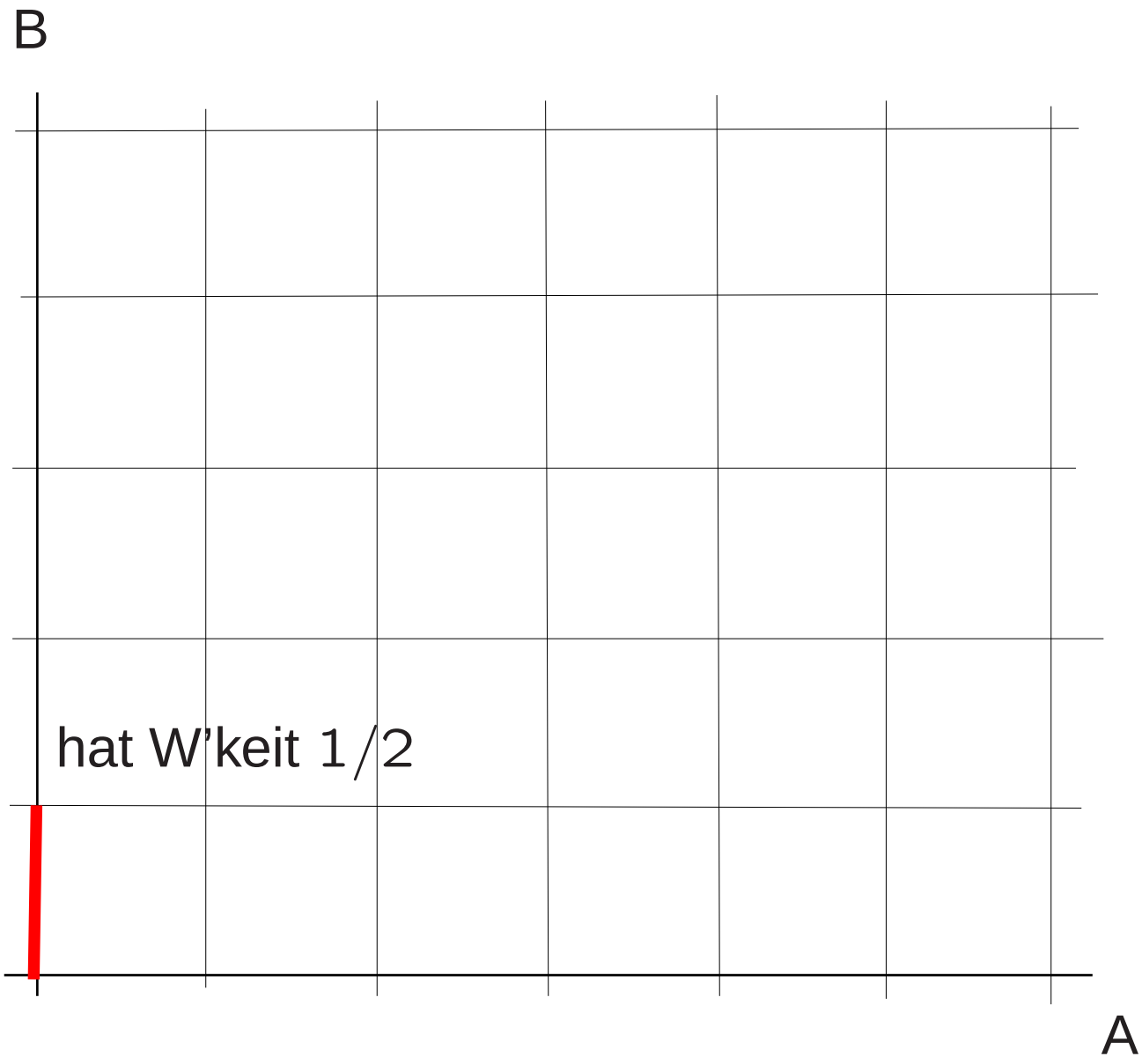
Modell des “fairen Münzwurfs”

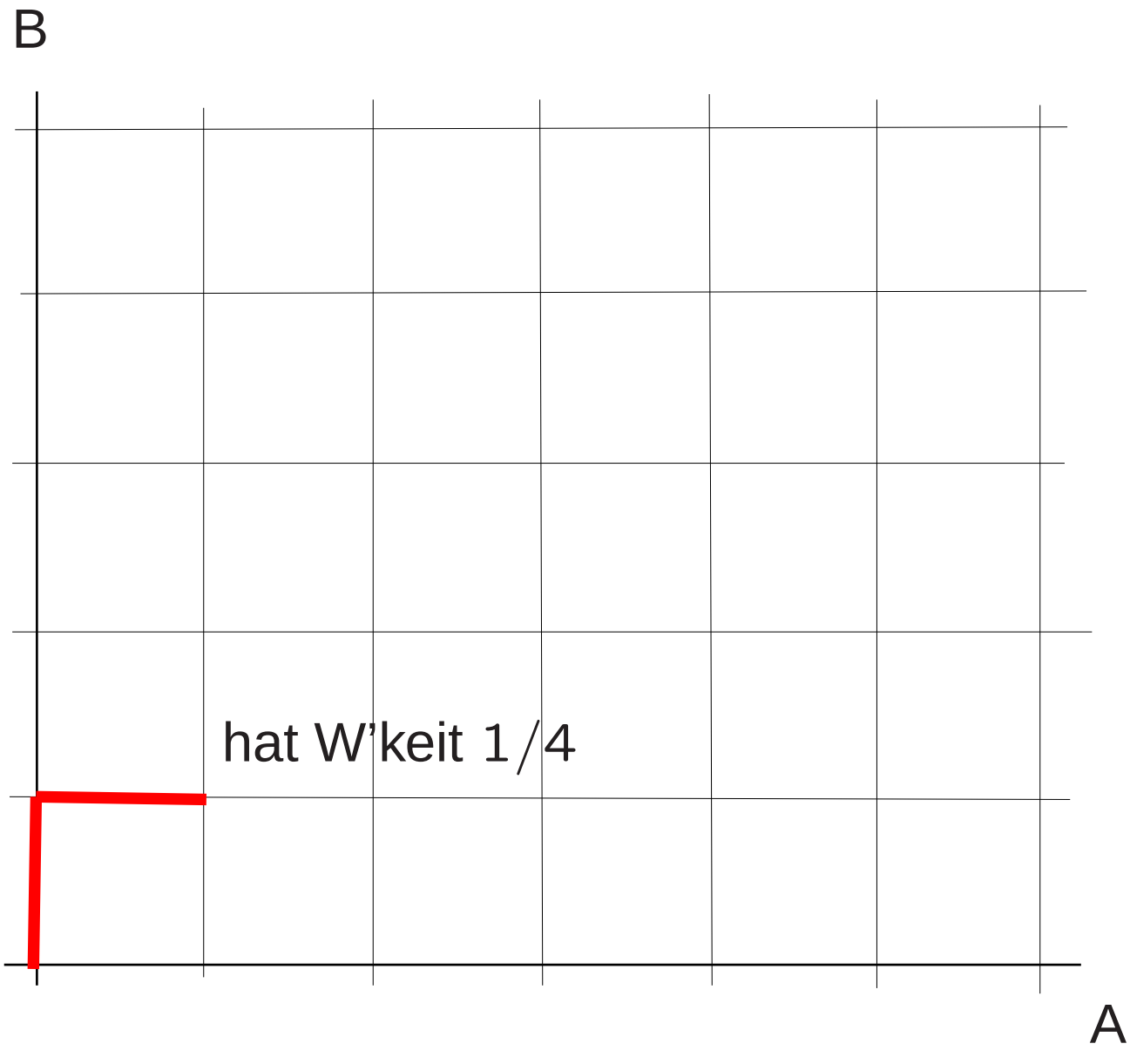
B

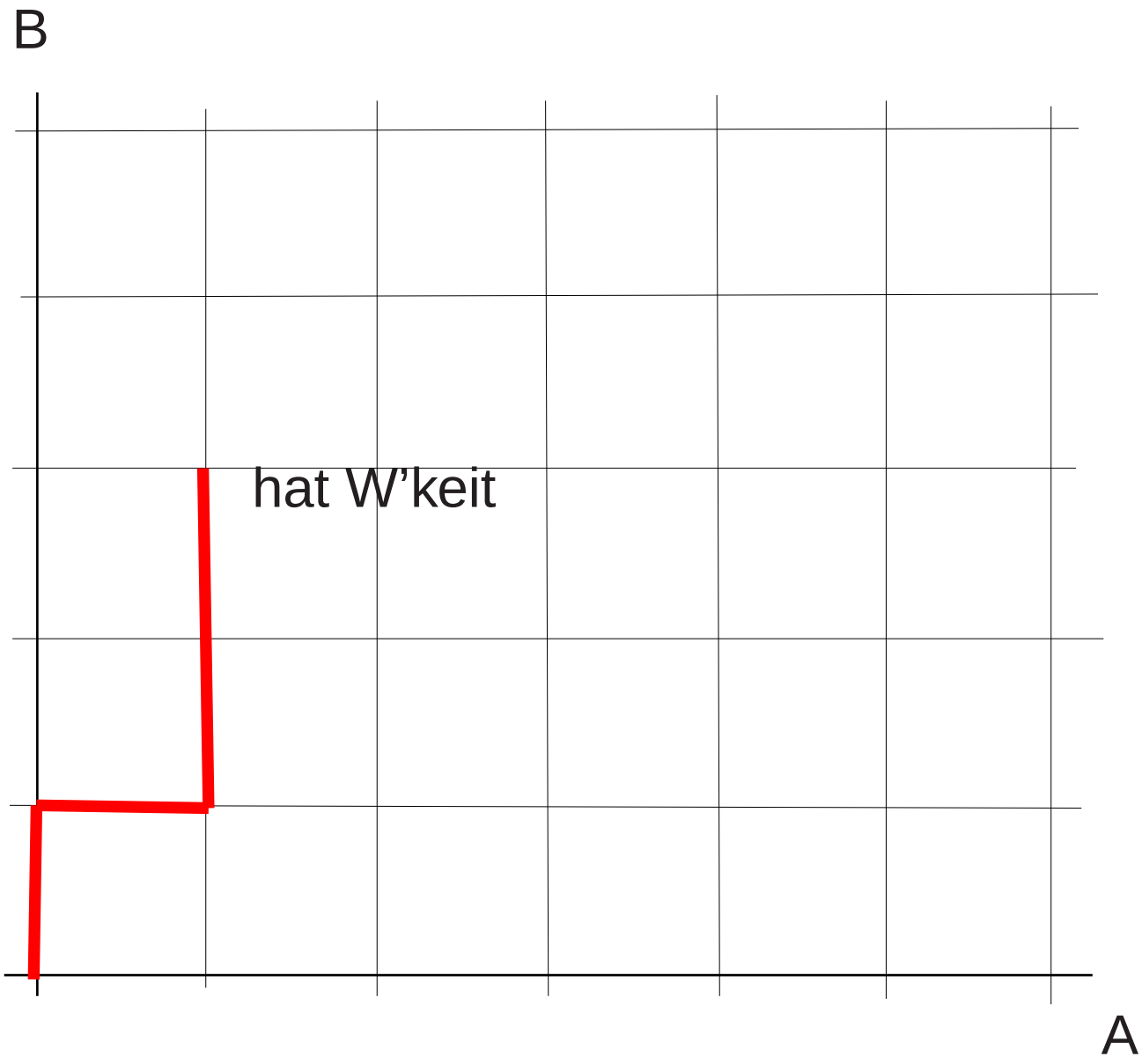


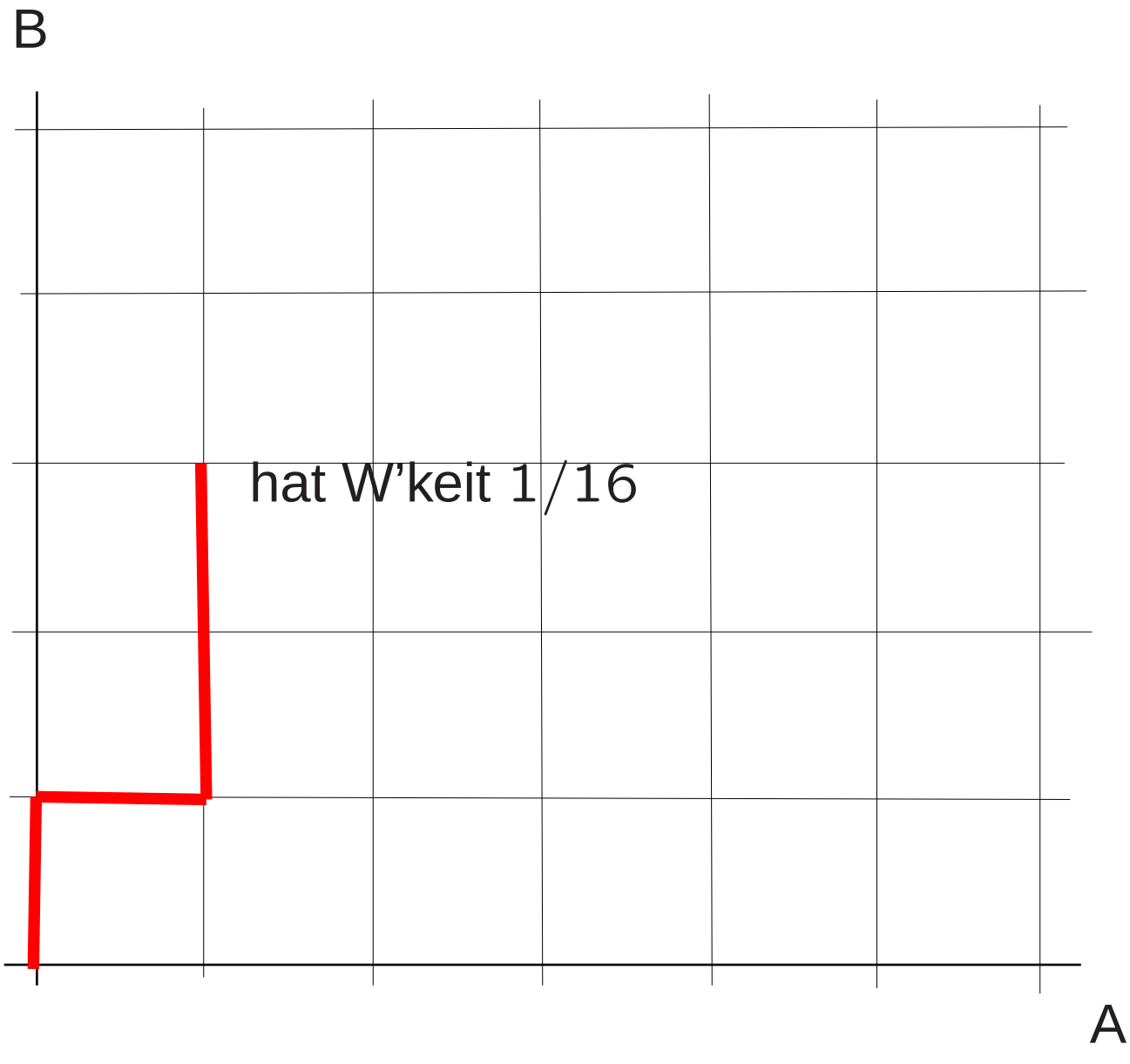
A

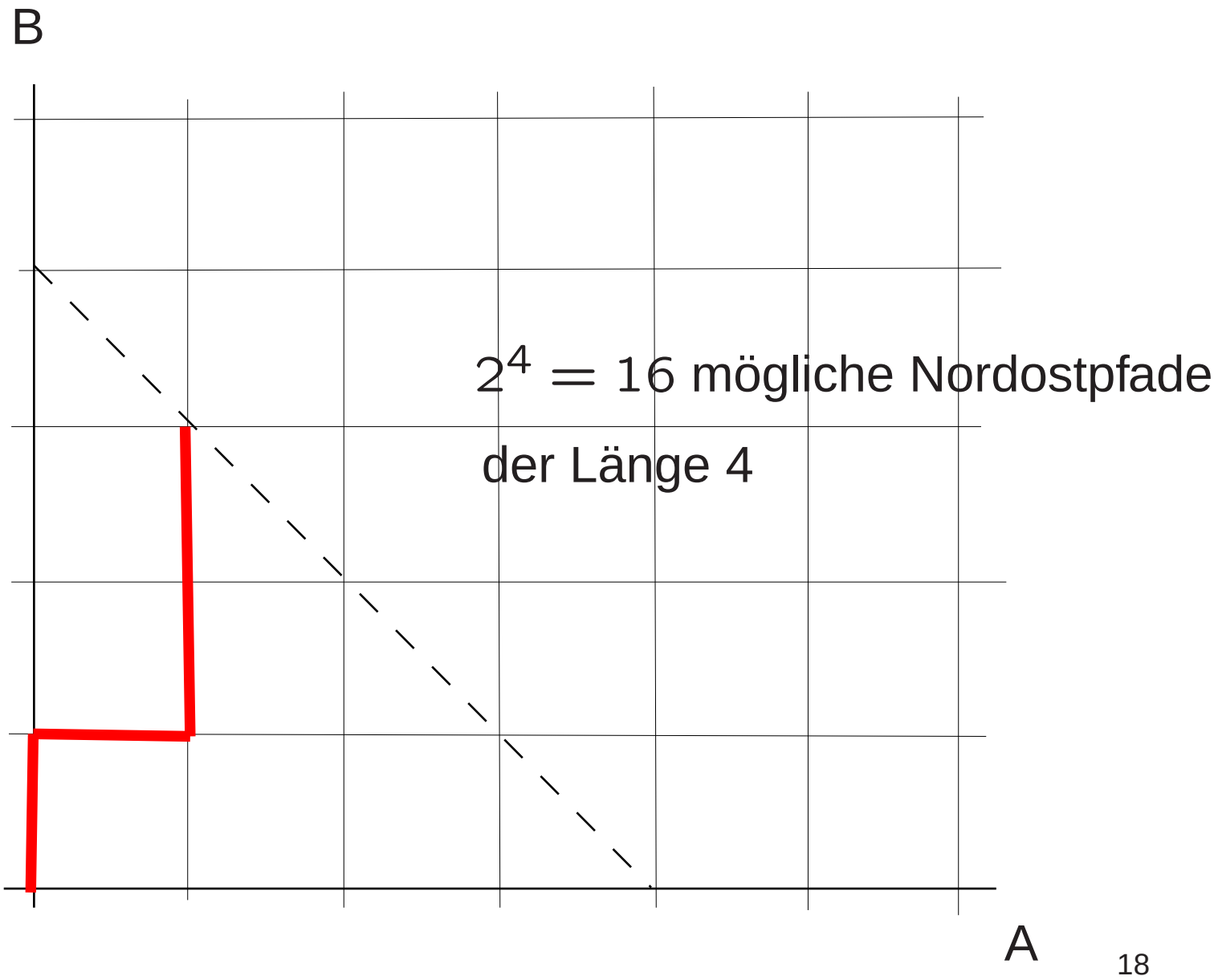

B
hat W'keit 1/2
A


B
hat W'keit 1/2
A


B
hat W'keit 1/4
A


B
hat W'keit
A

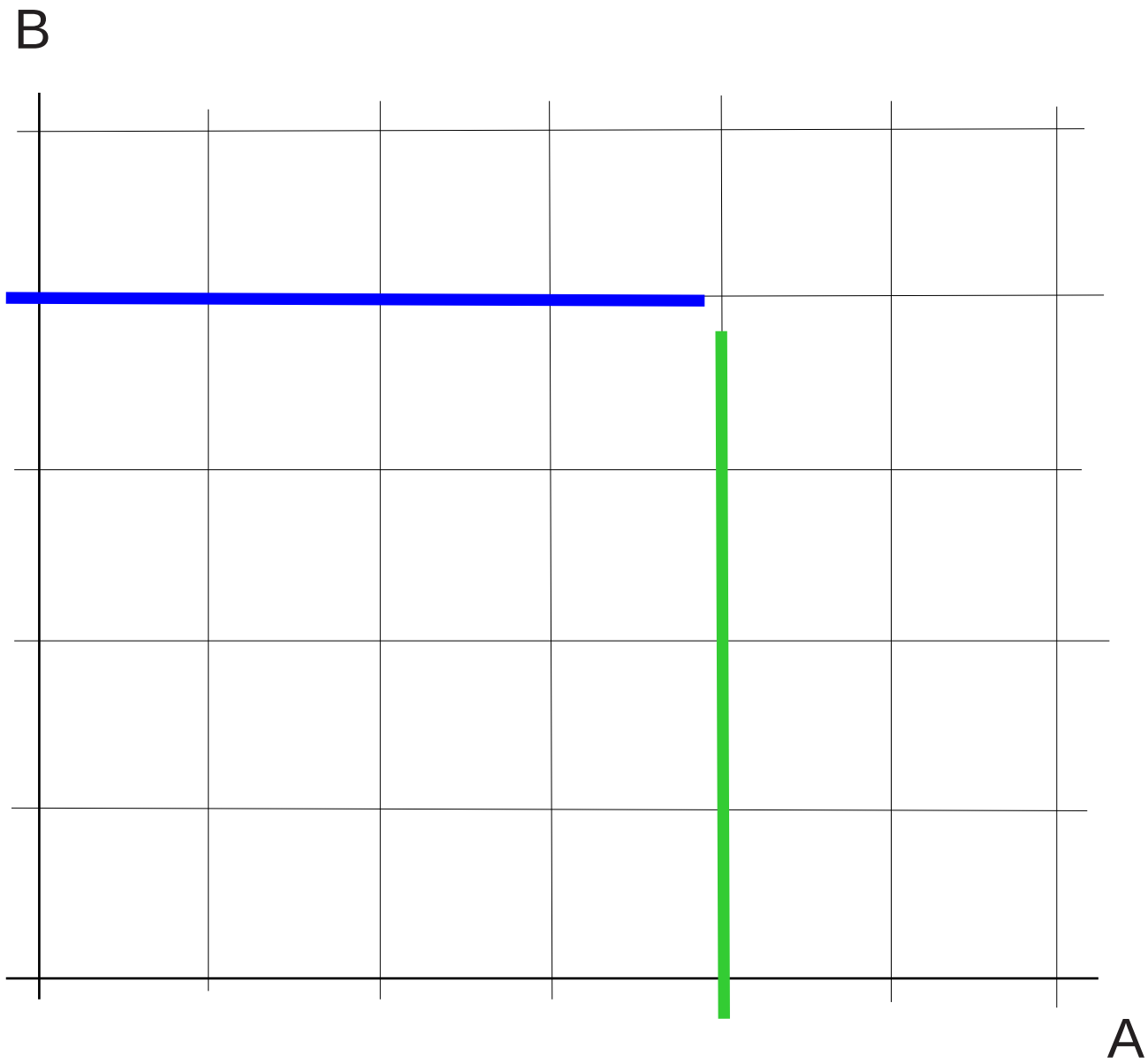

B
hat W'keit 1/16
A


B
A
$2^4 = 16$ mögliche Nordostpfade
der Länge 4

Die Vereinbarung war:

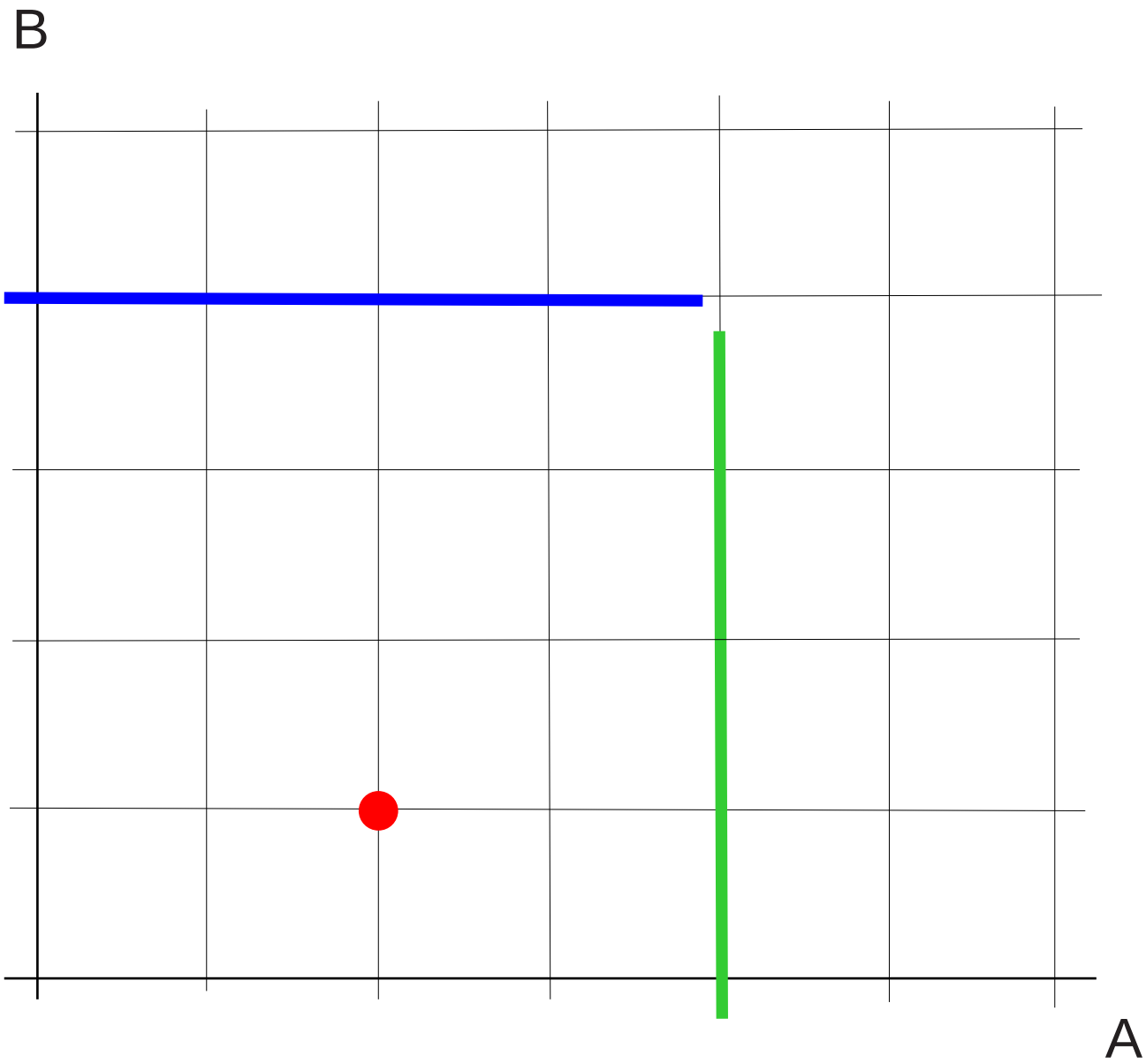
Derjenige Spieler bekommt den ganzen Einsatz,

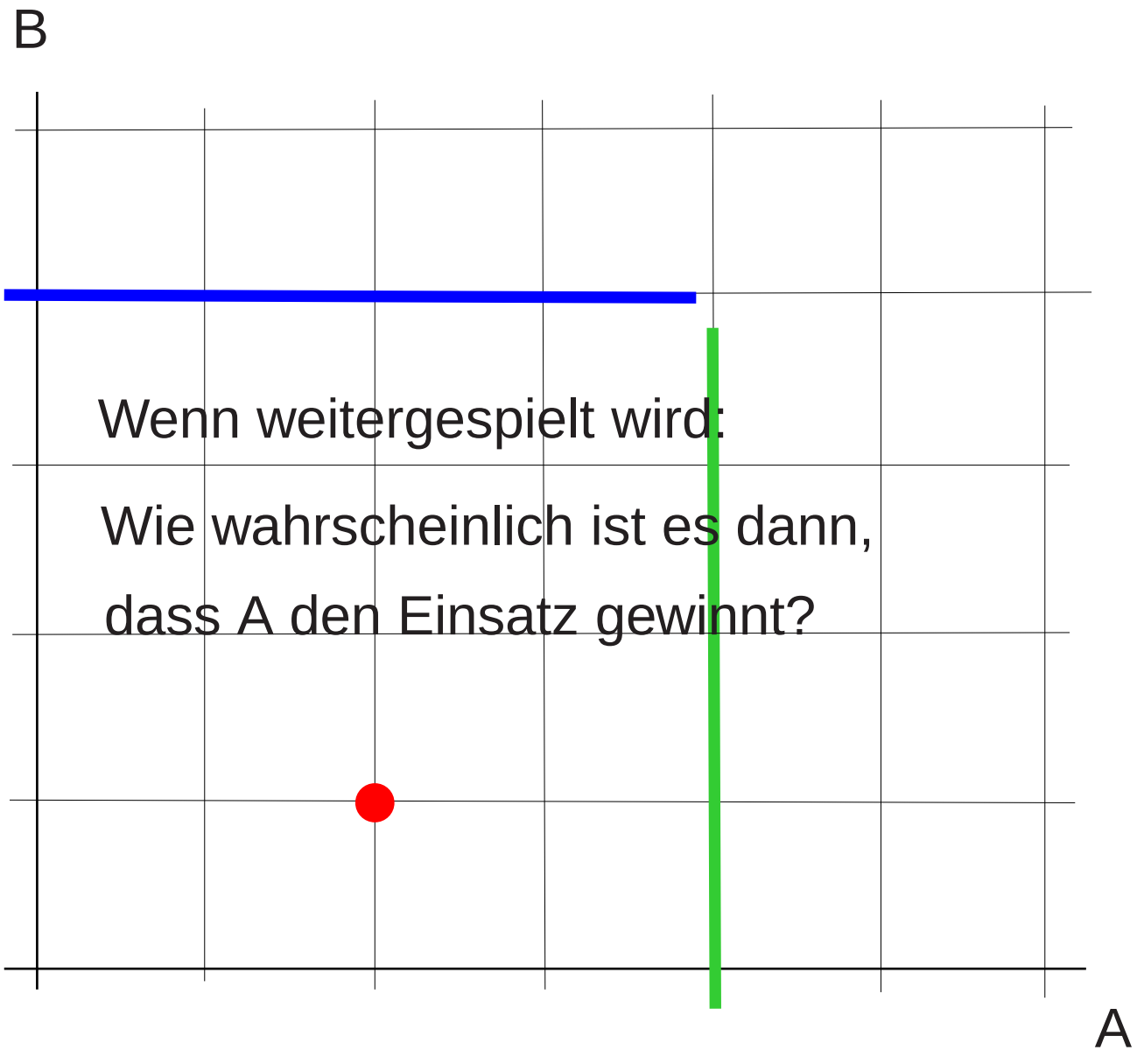
der als erster 4 Runden gewonnen hat.


B
A

Der aktuelle Spielstand ist

2:1 für A.


B
A




Wenn weitergespielt wird:

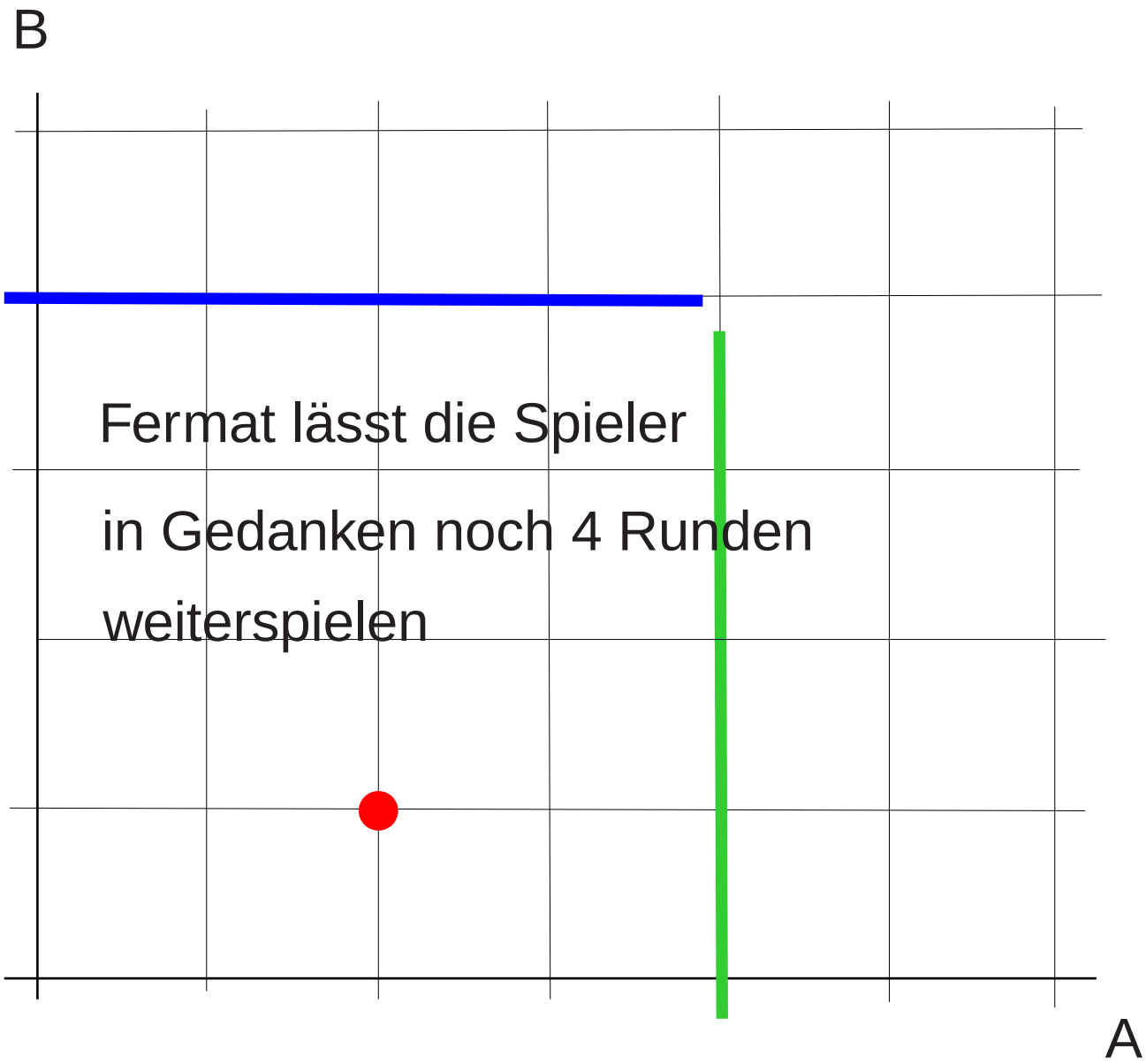
Wie wahrscheinlich ist es dann,

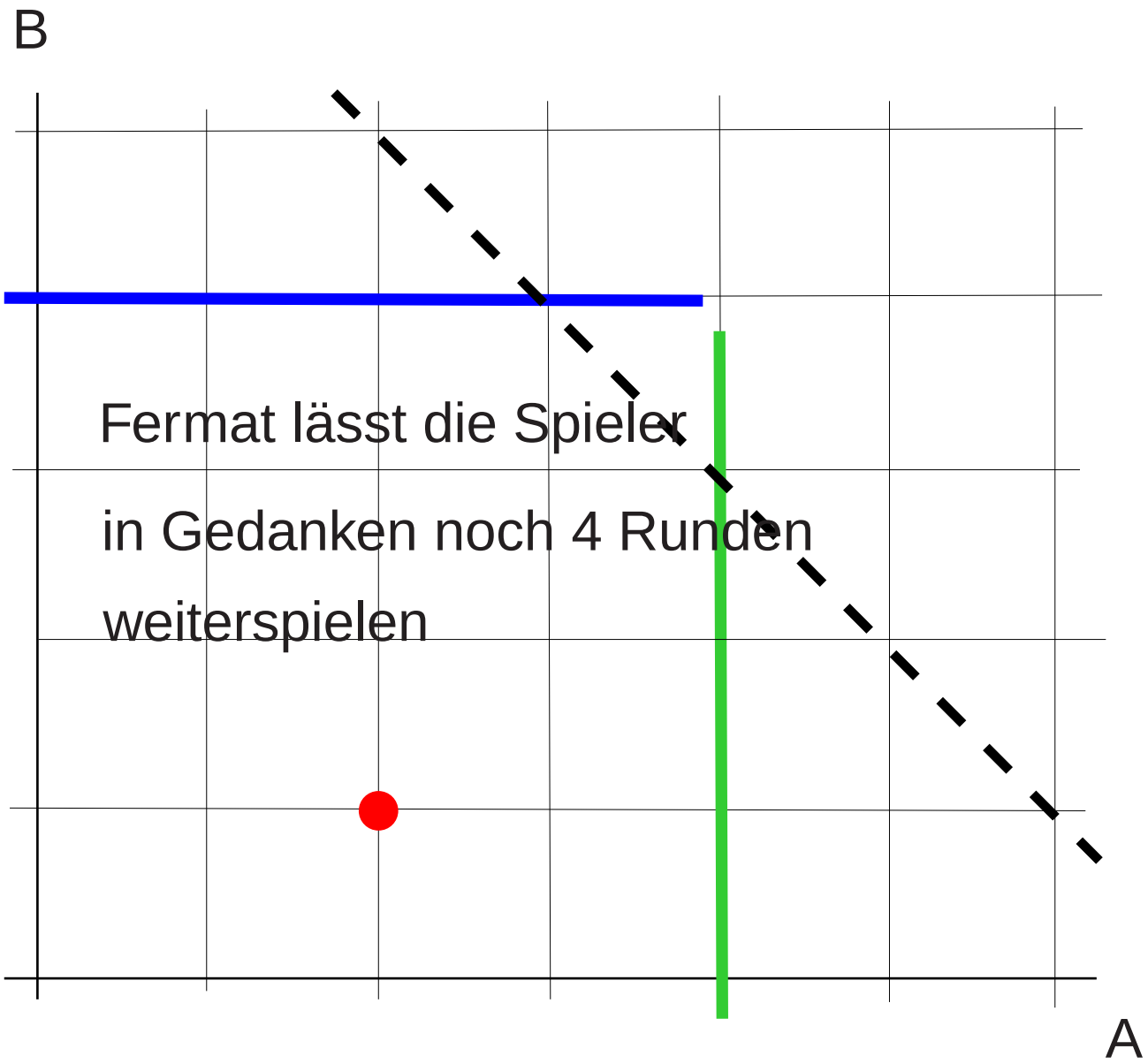
dass A den Einsatz gewinnt?

# Fermats Lösungsweg:

Fermats Lösungsweg:

Intelligentes Zählen von Pfaden


B
Fermat lässt die Spieler
in Gedanken noch 4 Runden
weiterspielen
A

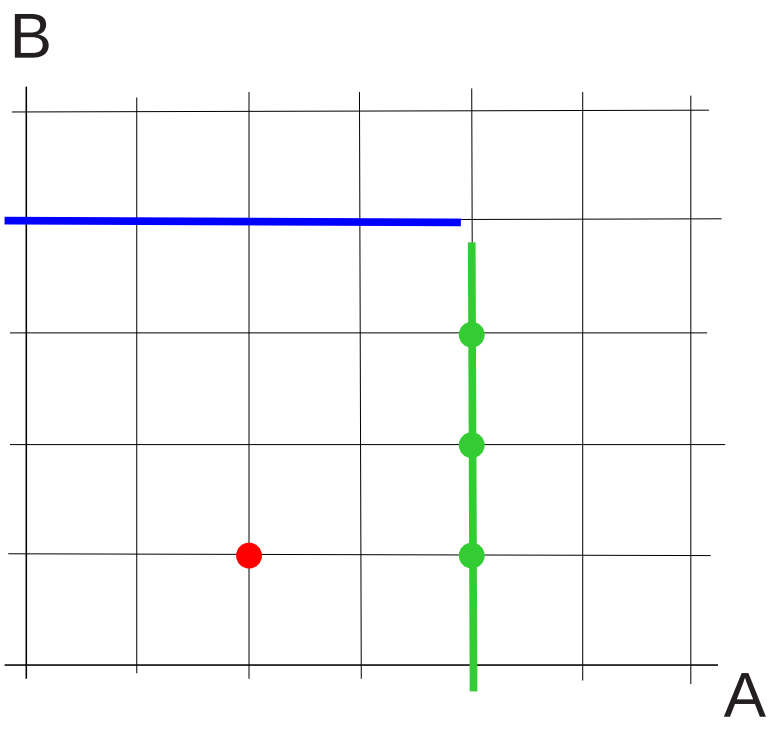

B
Fermat lässt die Spieler
in Gedanken noch 4 Runden
weiterspielen
A

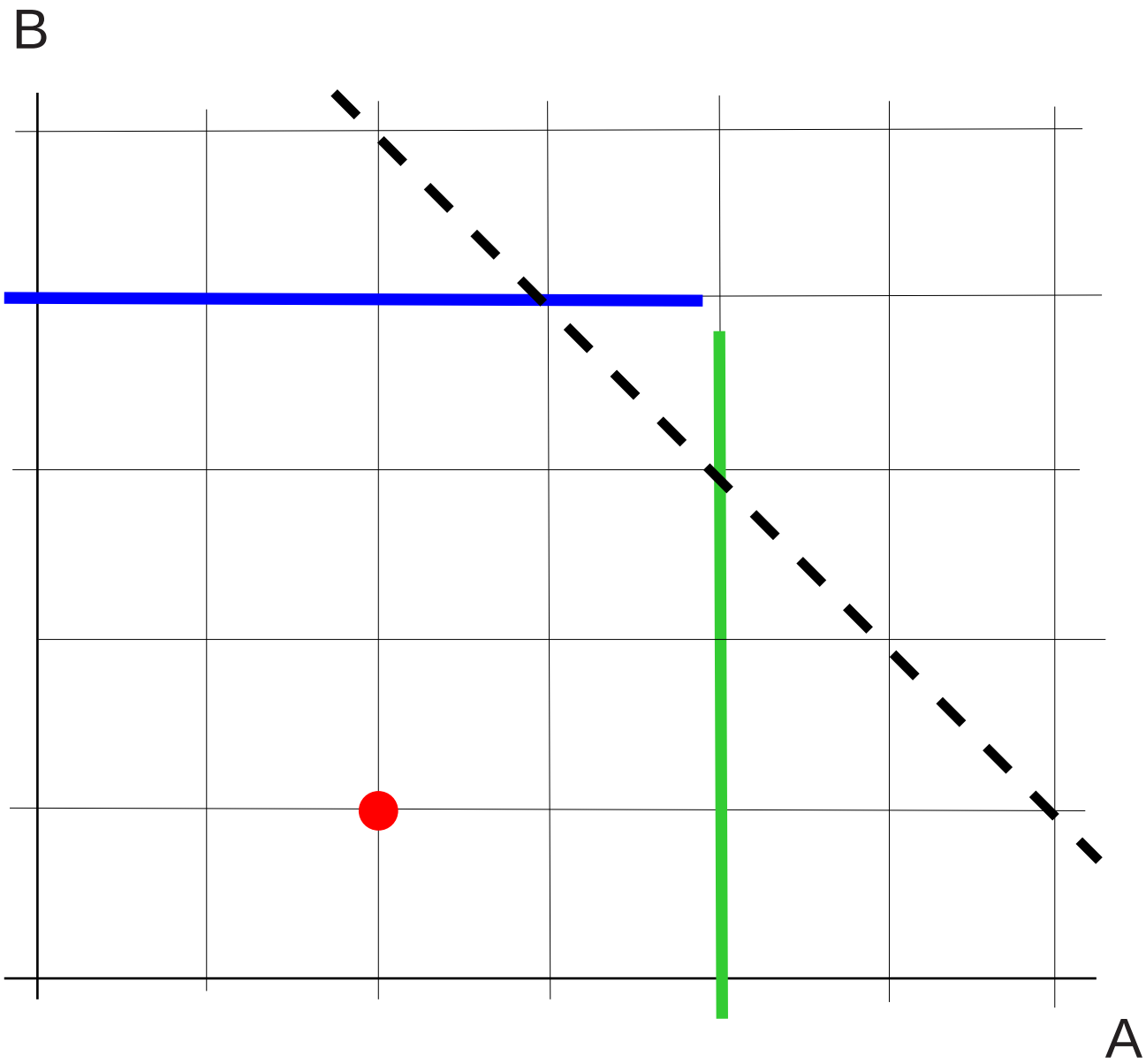
In (2,1) starten 16 mögliche Pfade der Länge 4.

In (2,1) starten 16 mögliche Pfade der Länge 4.

Wieviele davon treffen auf den Ostrand $\{4\} \times \{1, 2, 3\}$

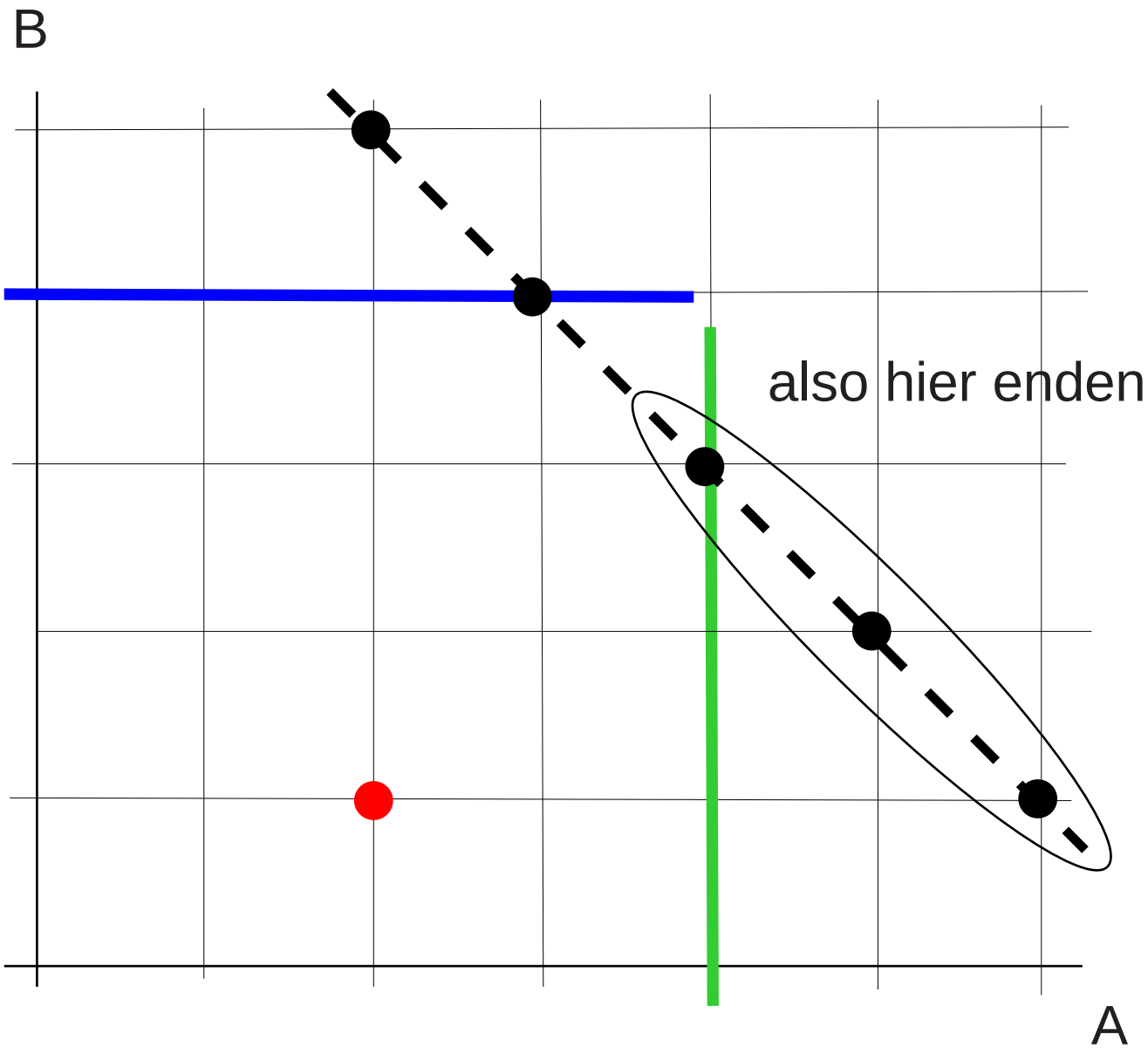
des Quadrates?

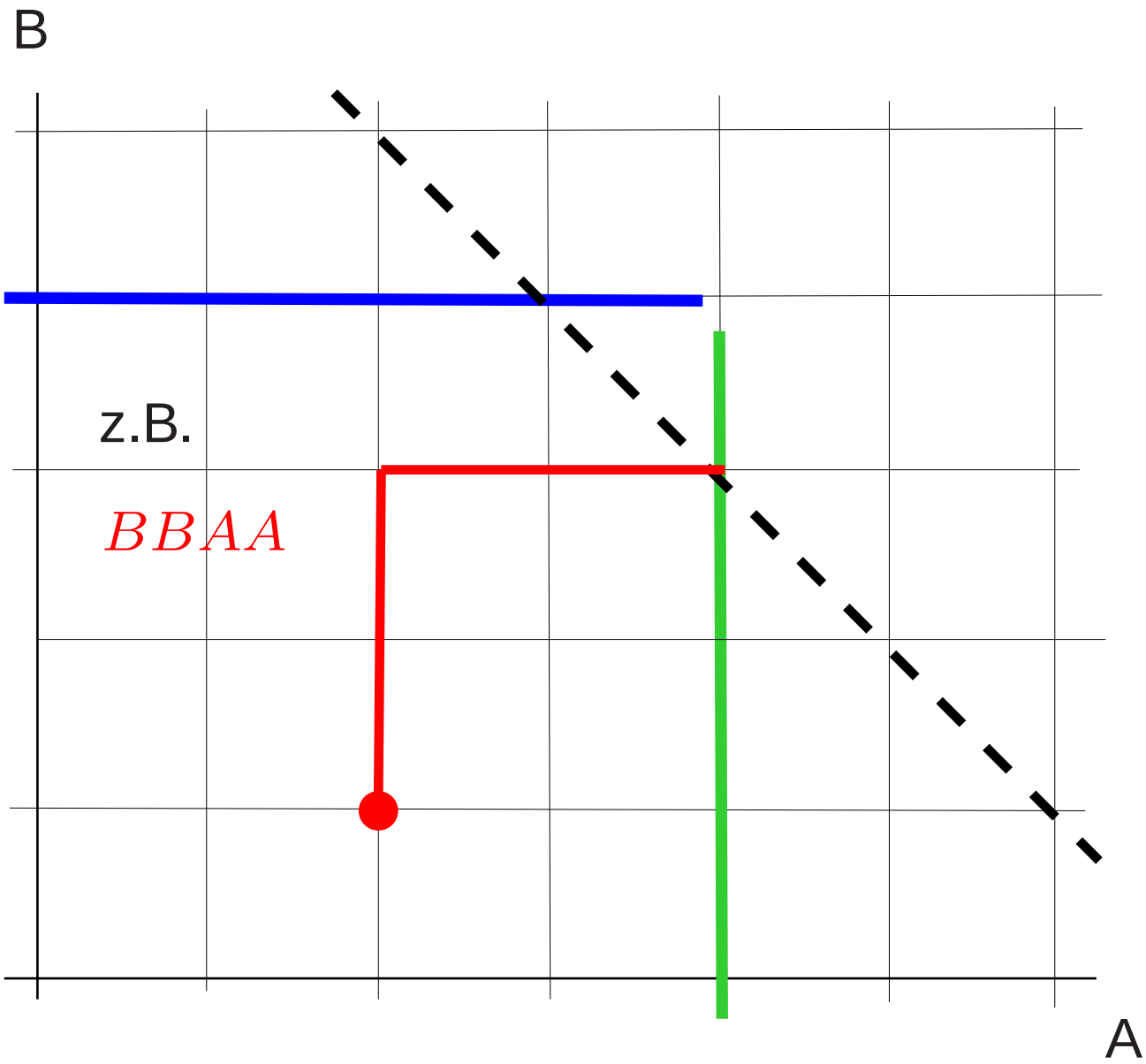



B
A

Das sind genau die Pfade der Länge 4,

die mindestens zwei Schritte nach Osten gehen,


B
also hier enden
A


B
z.B.
$BBAA$
A

die 16 “Nordostpfade” der Länge 4

in lexikographischer Ordnung

die 16 “Nordostpfade” der Länge 4

in lexikographischer Ordnung

$$
\begin{array}{cccc}
AAAA & ABAA & BAAA & BBAA \\
AAAB & ABAB & BAAB & BBAB \\
AABA & ABBA & BABA & BBBA \\
AABB & ABBB & BABB & BBBB
\end{array}
$$

die mit mindestens zwei $A$

und die mit weniger als zwei $A$:

die mit mindestens zwei $A$

und die mit weniger als zwei $A$:

$$\begin{array}{cccc} AAAA & ABAA & BAAA & BBAA \\ AAAB & ABAB & BAAB & BBAB \\ AABA & ABBA & BABA & BBBA \\ AABB & ABBB & BABB & BBBB \end{array}$$

die mit mindestens zwei $A$

und die mit weniger als zwei $A$:

$$\begin{array}{cccc} AAAA & ABAA & BAAA & BBAA \\ AAAB & ABAB & BAAB & BBAB \\ AABA & ABBA & BABA & BBBA \\ AABB & ABBB & BABB & BBBB \end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass A das Spiel gewinnt, ist

die mit mindestens zwei $A$

und die mit weniger als zwei $A$:

$$\begin{array}{cccc} AAAA & ABAA & BAAA & BBAA \\ AAAB & ABAB & BAAB & BBAB \\ AABA & ABBA & BABA & BBBA \\ AABB & ABBB & BABB & BBBB \end{array}$$

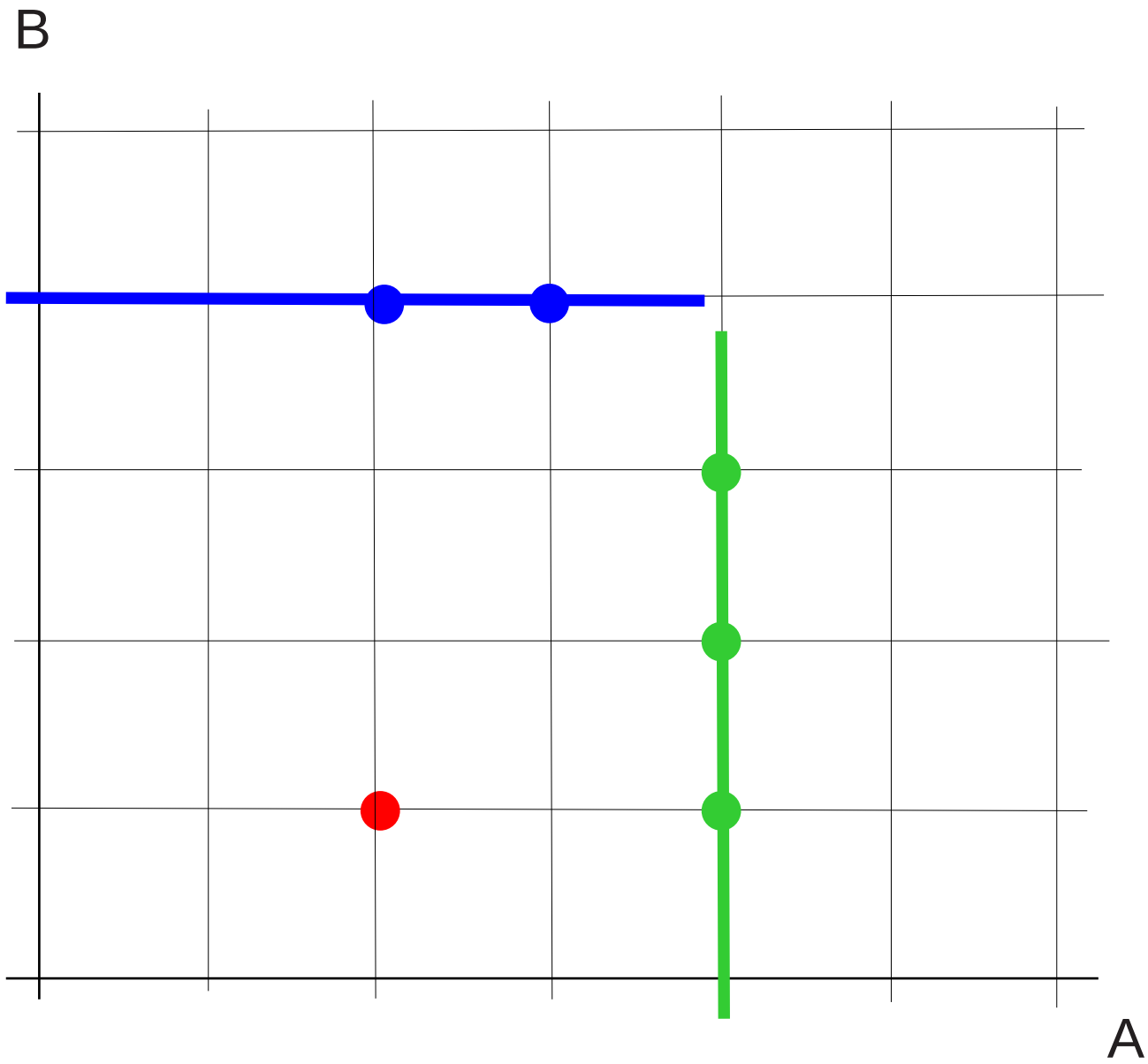
Die Wahrscheinlichkeit, dass A das Spiel gewinnt, ist

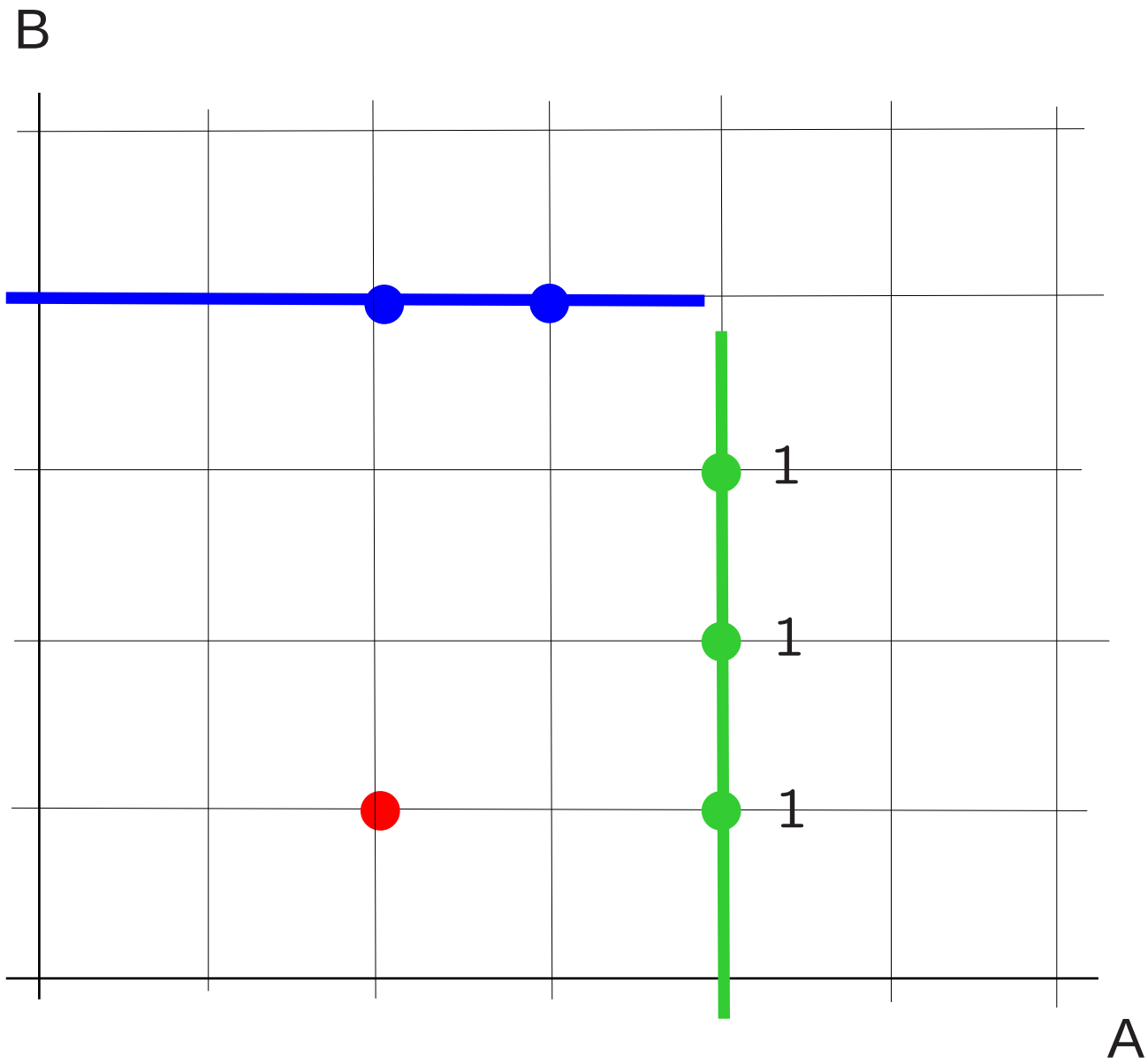
$$\frac{11}{16}.$$

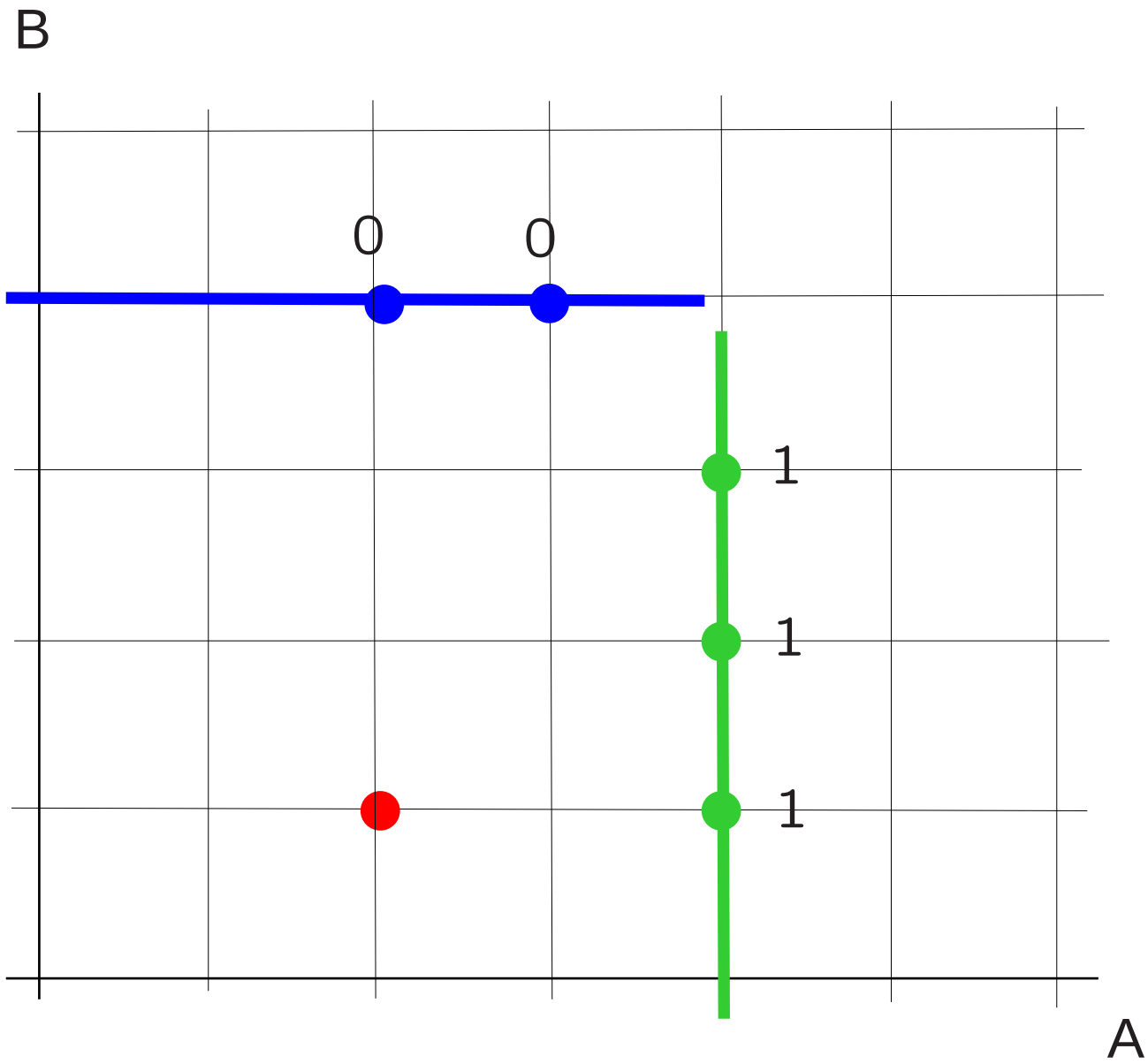
Pascals Lösungsweg:

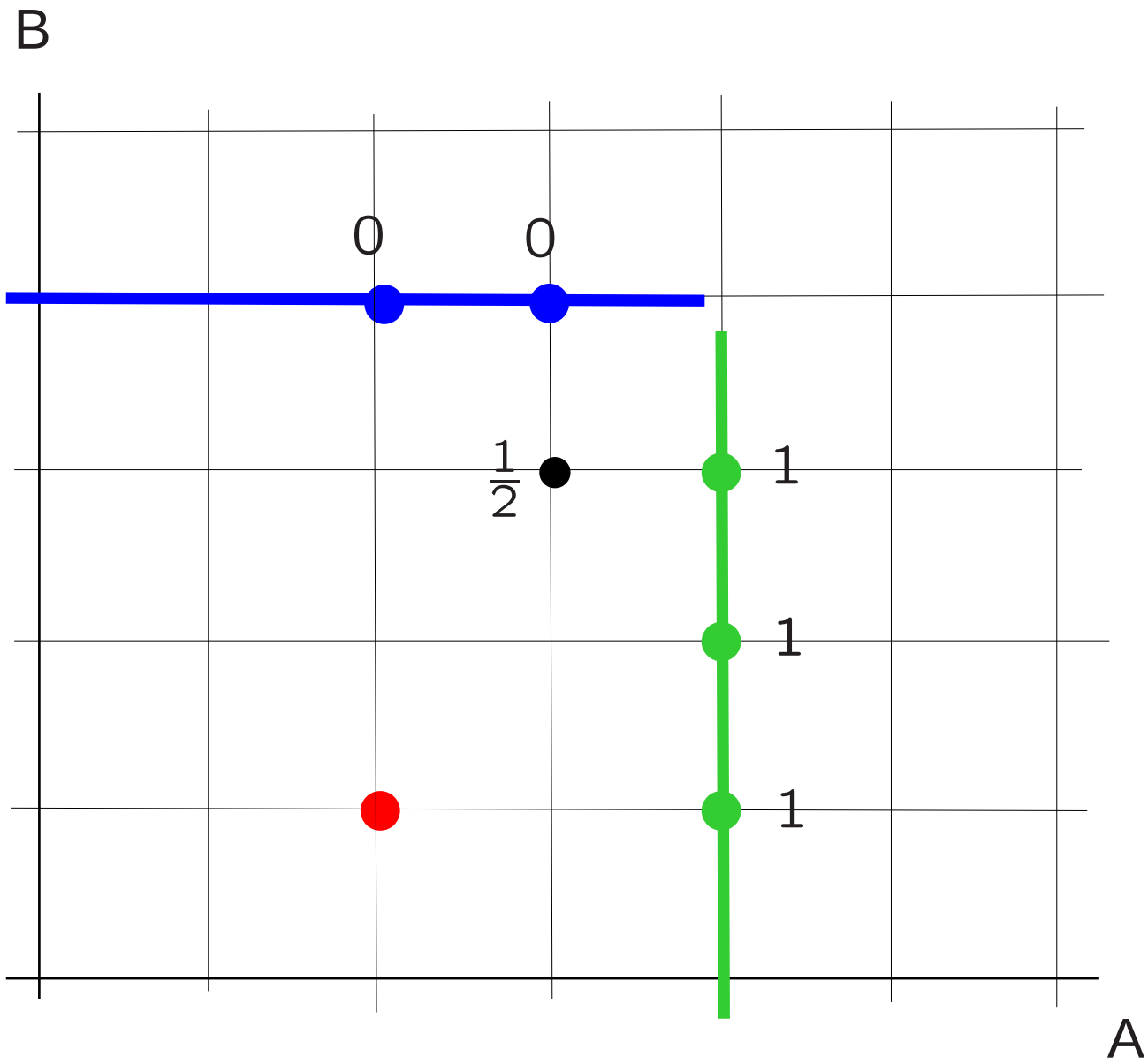
Pascals Lösungsweg:

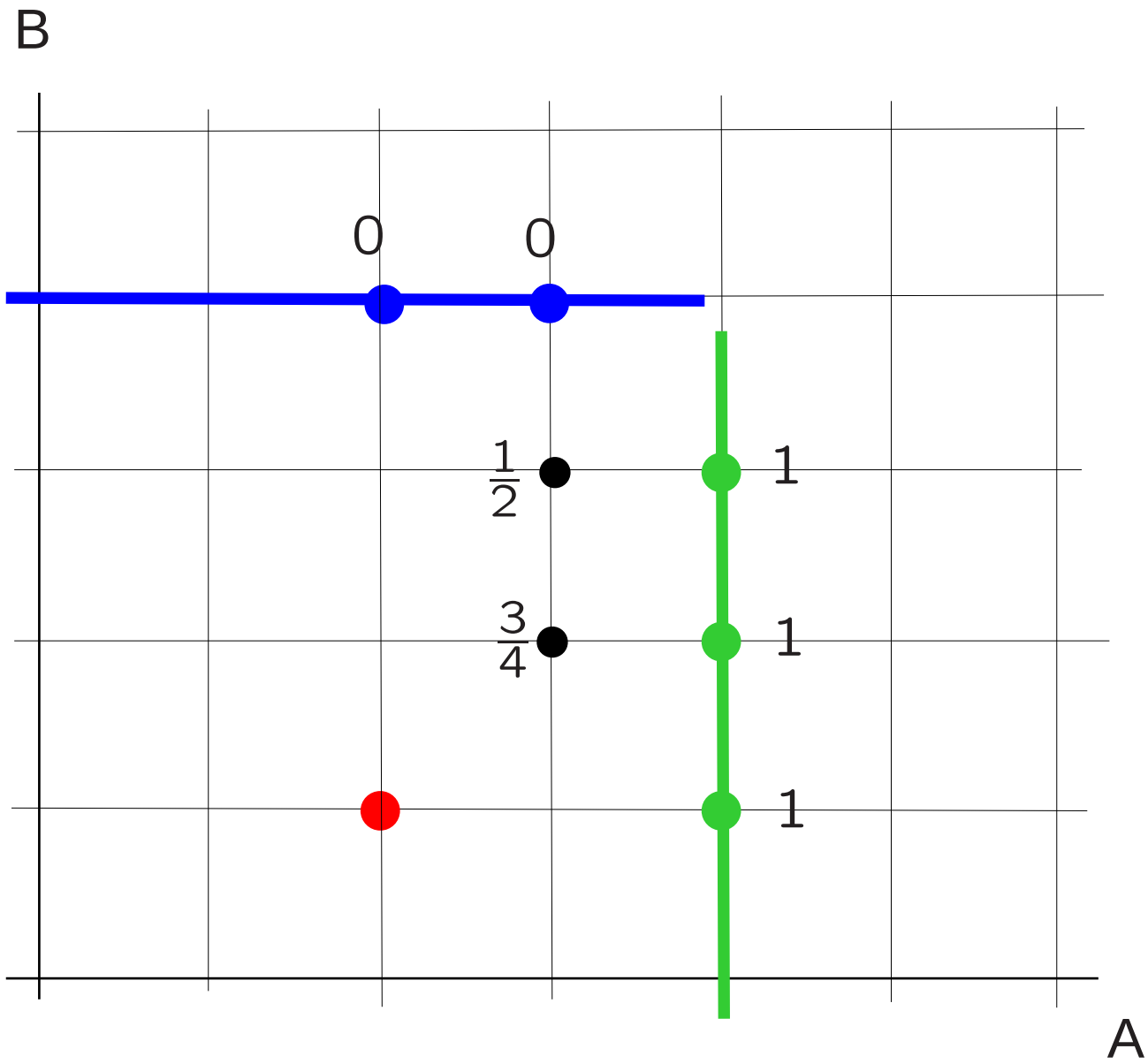
Die Methode der Rückwärtsinduktion

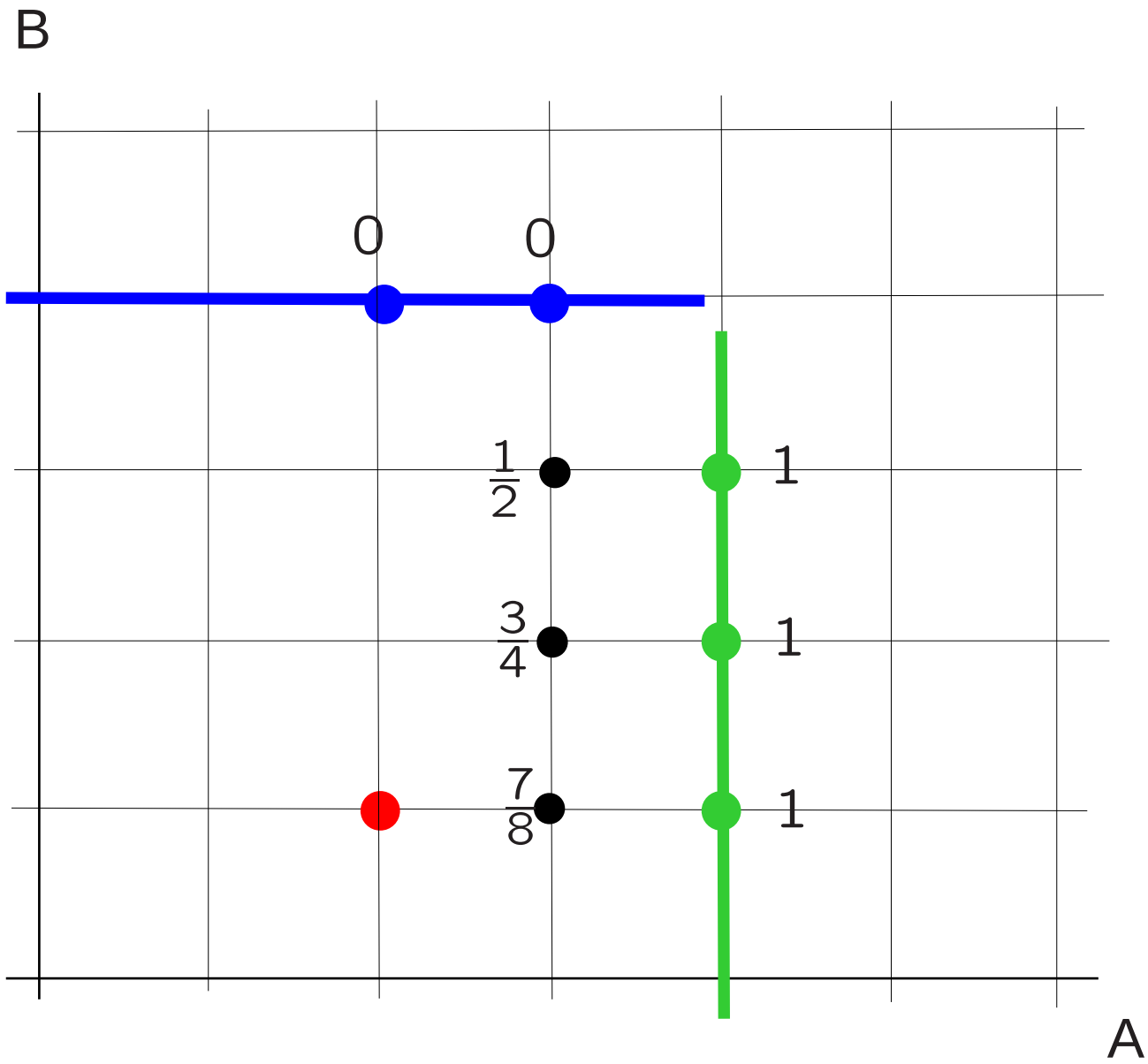

B
A

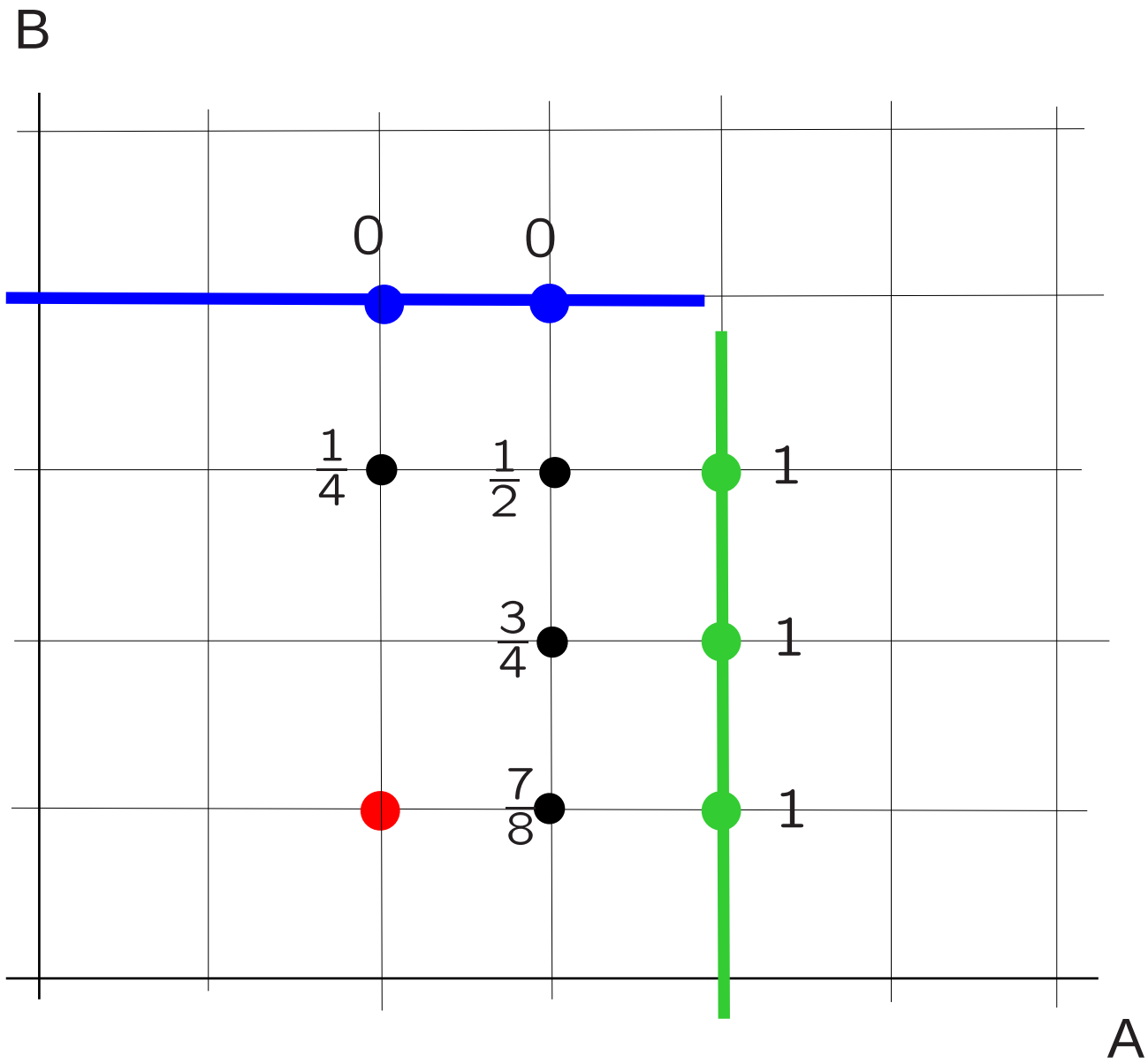

B
1
1
1
A

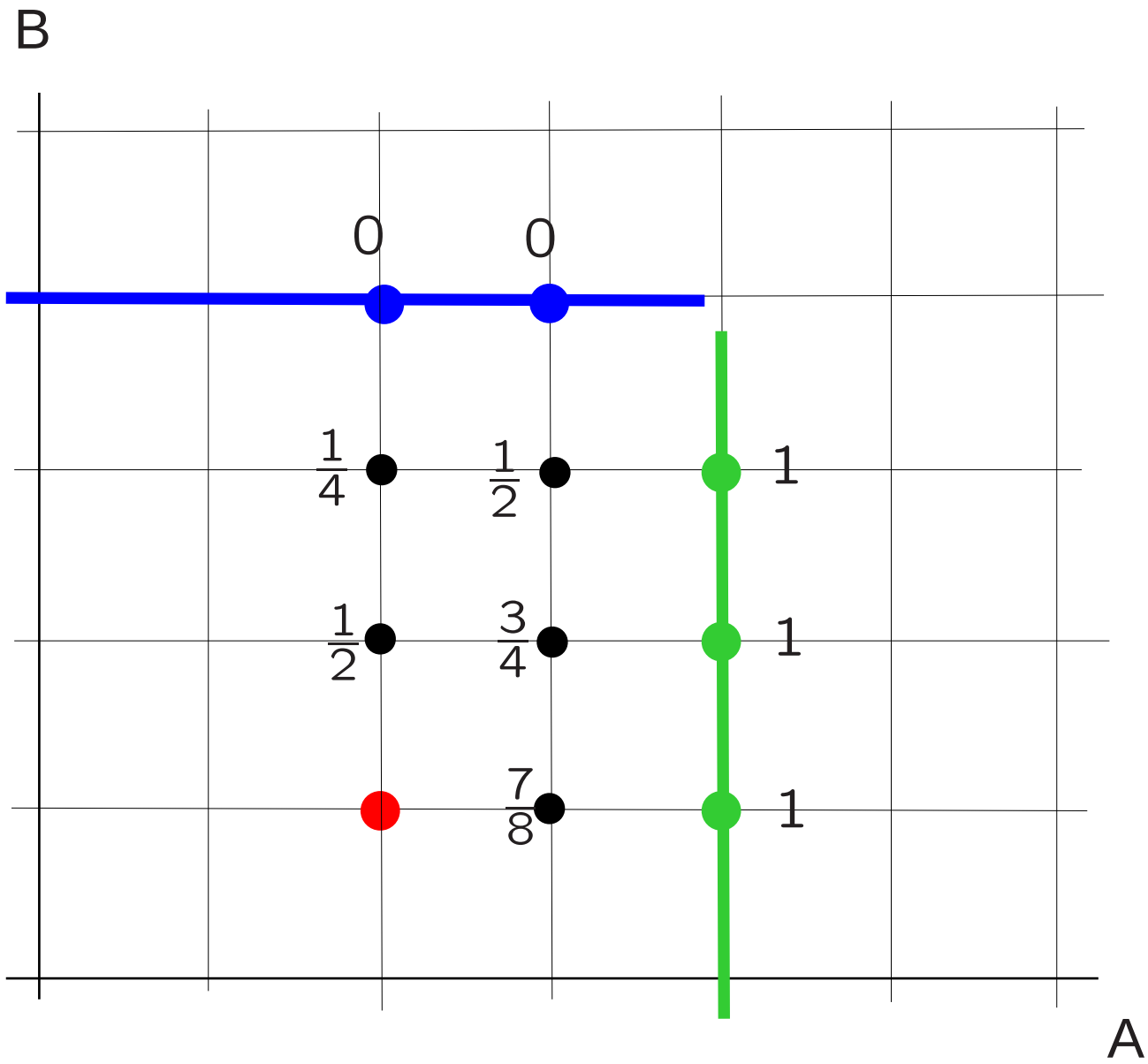

B
0
0
1
1
1
A

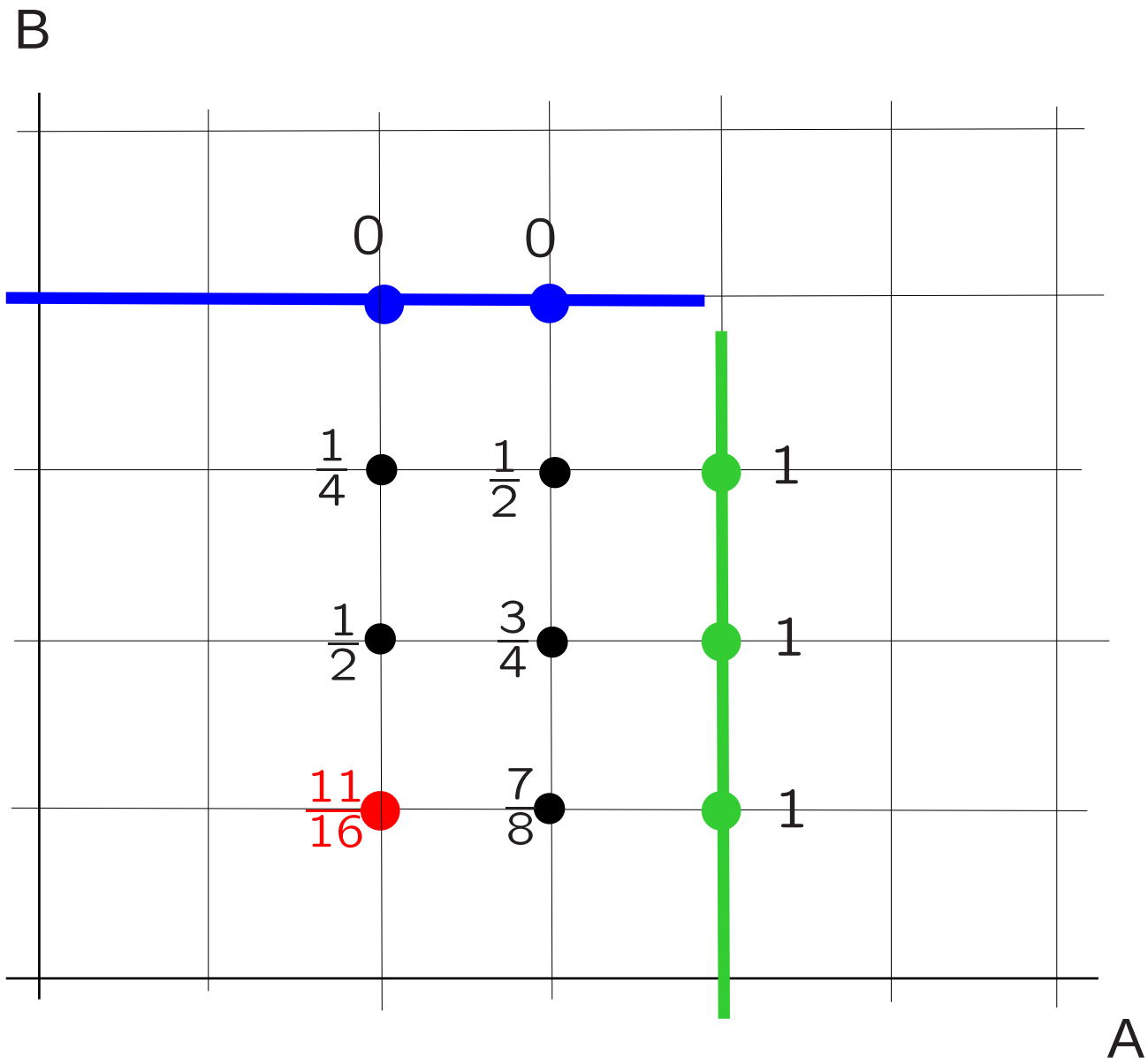

B
0
0
1/2
1
1
1
A


B
0
0
1/2
1
3/4
1
1
A


B
0
0
1/2
1
3/4
1
7/8
1
A


B
0
0
1/4
1/2
1
3/4
1
7/8
1
A


B
0
0
1/4
1/2
1
1/2
3/4
1
7/8
1
A


B
0
0
1/4
1/2
1
1/2
3/4
1
11/16
7/8
1
A

Pascal an Fermat (1654):

Pascal an Fermat (1654):

*“Je vois bien que la verité est la même*

*à Toulouse et à Paris...”*

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $y$ sei $w(y)$.

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $y$ sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $z$ sei $w(z)$.

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $y$ sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $z$ sei $w(z)$.

$w(y)$ $y$

$z$

$w(z)$

## Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $y$ sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $z$ sei $w(z)$.

Vom Zustand $x$ aus kommt man in einem Schritt

mit W'keit 1/2 nach $y$ und mit W'keit 1/2 nach $z$.

$w(y)$ $y$

$z$

$w(z)$

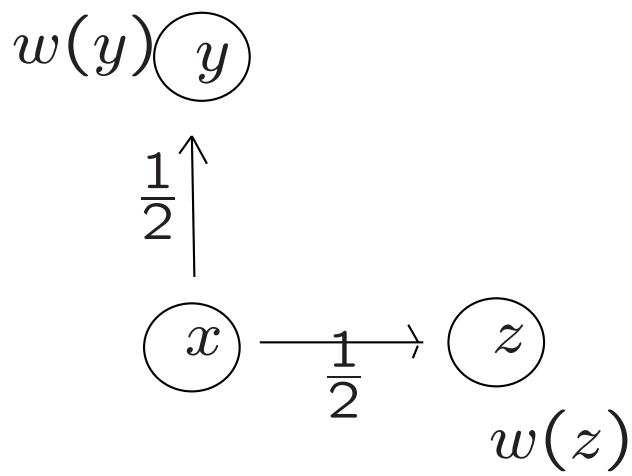
Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $y$ sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $z$ sei $w(z)$.

Vom Zustand $x$ aus kommt man in einem Schritt

mit W'keit 1/2 nach $y$ und mit W'keit 1/2 nach $z$.



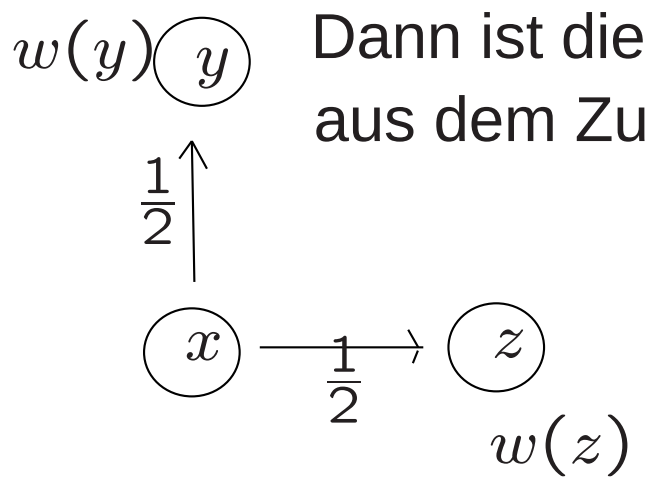
Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $y$ sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $z$ sei $w(z)$.

Vom Zustand $x$ aus kommt man in einem Schritt

mit W'keit 1/2 nach $y$ und mit W'keit 1/2 nach $z$.




Dann ist die Gewinnw'keit aus dem Zustand $x$

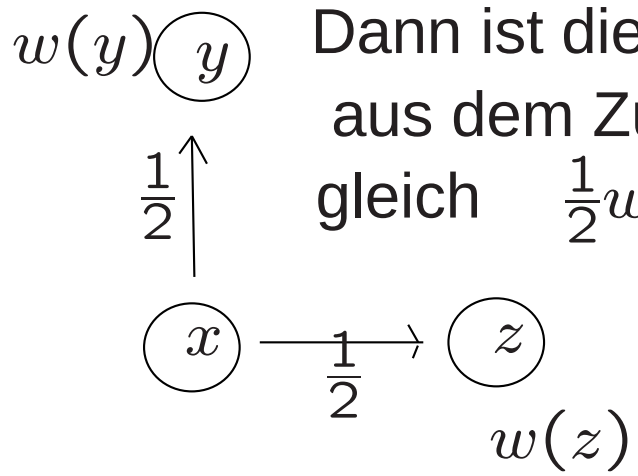
Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $y$ sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand $z$ sei $w(z)$.

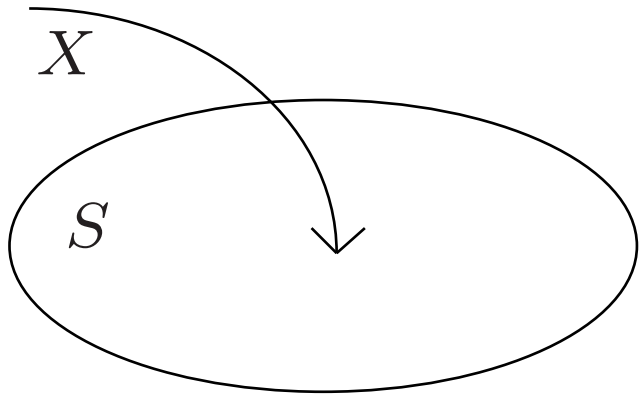
Vom Zustand $x$ aus kommt man in einem Schritt

mit W'keit 1/2 nach $y$ und mit W'keit 1/2 nach $z$.



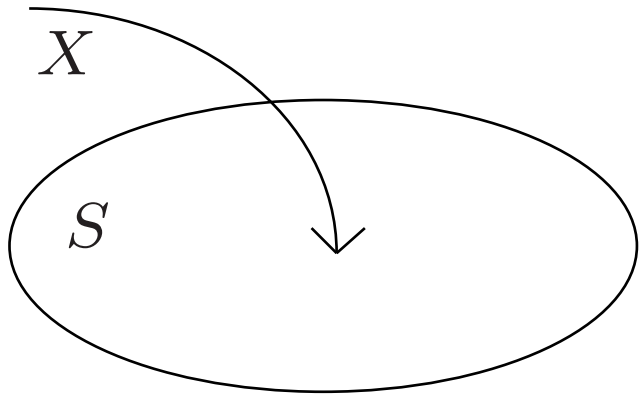

Dann ist die Gewinnw'keit aus dem Zustand $x$ gleich $\frac{1}{2}w(y) + \frac{1}{2}w(z)$

Ein Logo der Elementaren Stochastik:




$X$ ... zufällige Wahl eines Elements aus $S$

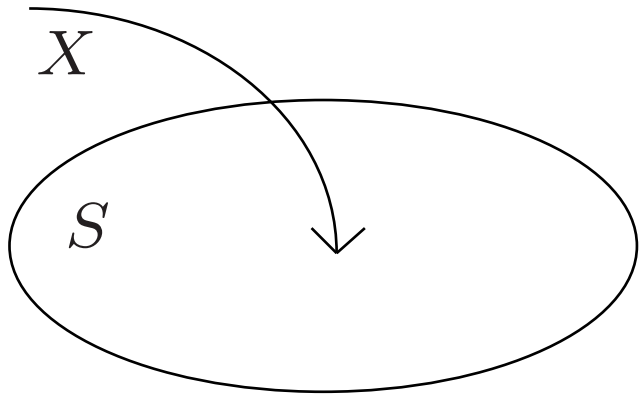
Ein Logo der Elementaren Stochastik:




$X$ ... zufällige Wahl eines Elements aus $S$

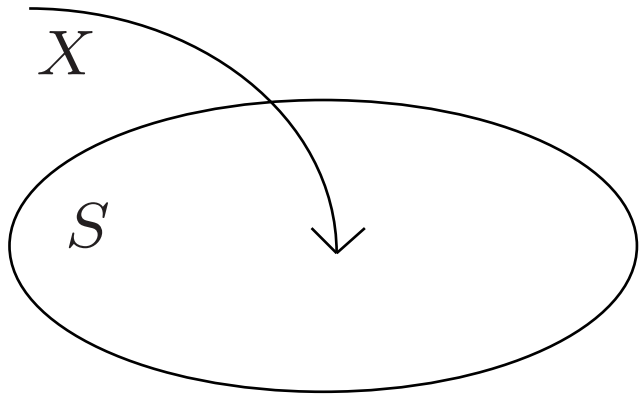
$S$ ... Menge von möglichen Ausgängen

Ein Logo der Elementaren Stochastik:




$X$ . . . **Zufallsvariable**

Ein Logo der Elementaren Stochastik:




$X$ ... **Zufallsvariable**

mit **Zielbereich** $S$

Zum Beispiel:

Zum Beispiel:

$S :=$ die Menge der Nordostpfade der Länge 4,

die im Punkt (2,1) starten

Zum Beispiel:

$S :=$ die Menge der Nordostpfade der Länge 4,

die im Punkt (2,1) starten

$X :=$ ein *rein zufälliges Element aus* $S$

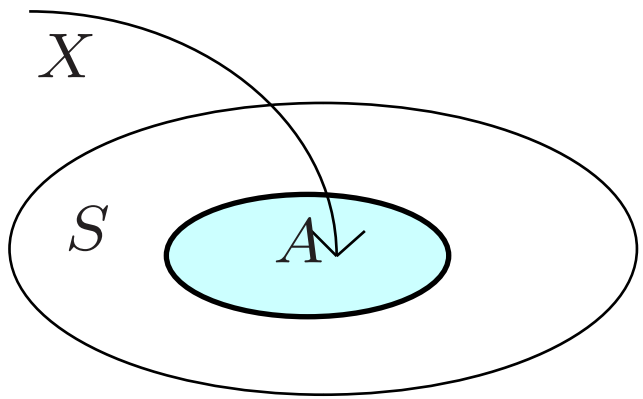
Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* “$X$ fällt in $A$”

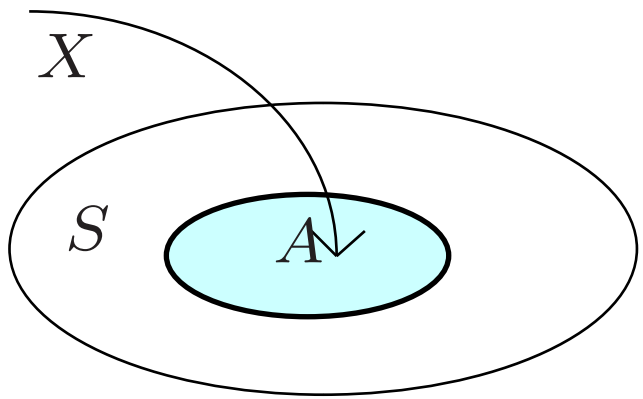
Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* “$X$ fällt in $A$”

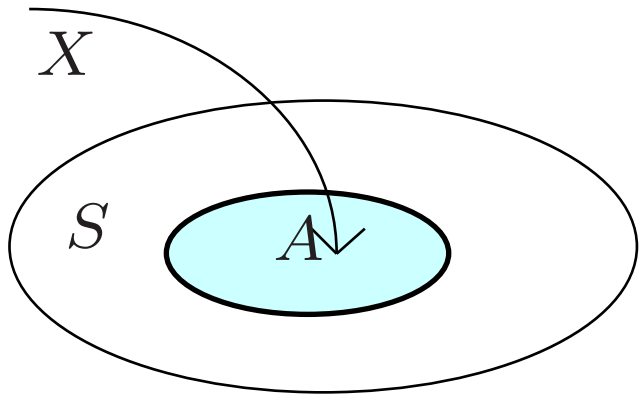


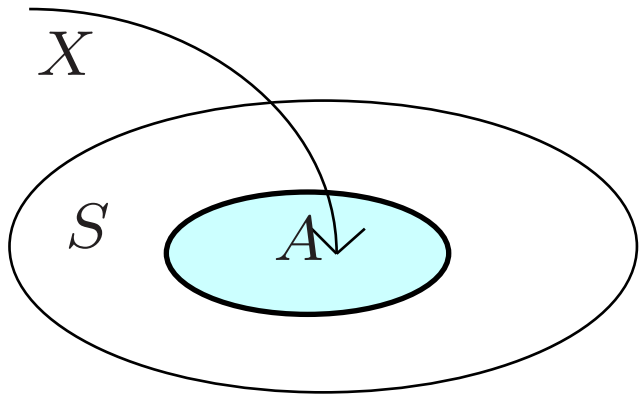
Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* “$X$ fällt in $A$”




Dabei ist $A$ eine bestimmte Teilmenge von $S$.


$X$
$S$
$A$




Ereignisse werden (wie Mengen)

in geschweiften Klammern notiert:

$$\{X \in A\}$$

Lies:

"$X$ fällt in $A$".

$X$ ist *rein zufällig*

heißt:

alle Elemente von $S$ haben die gleiche W'keit

gewählt zu werden.

$X$ ist *rein zufällig*

heißt:

alle Elemente von $S$ haben die gleiche W'keit

gewählt zu werden.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "$X$ fällt in $A$"

$$\mathbf{P}(\{X \in A\}) = \frac{\#A}{\#S}.$$

$X$ ist *rein zufällig*

heißt:

alle Elemente von $S$ haben die gleiche W'keit

gewählt zu werden.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "$X$ fällt in $A$"

$$\mathbf{P}(\{X \in A\}) = \frac{\#A}{\#S}.$$

Statt $\mathbf{P}(\{X \in A\})$ scheiben wir kurz:

$$\mathbf{P}(X \in A).$$