Vorlesung 10b

Markovketten

Teil 2

Zur Erinnerung:

Für eine Markovkette $(X_0, X_1, \ldots)$

mit Start in a und Übergangsmatrix P

hat man die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt.

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

$$= P(a, a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_1 = a_2, \ldots, X_{n-1} = a_n)$$

Summation über $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$,

mit b statt a_1 und c statt a_n:

$$\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{b \in S} P(a, b)\, \mathbf{P}_b(X_{n-1} = c)\ .$$

Transport von Erwartungswerten.

Wir betrachten eine Funktion $h : S \to \mathbb{R}_+$

und interessierten uns für

$$u_n(a) := \mathbf{E}_a\big[h(X_n)\big] = \sum_{c\in S} h(c)\mathbf{P}_a(X_n = c)\ .$$

$u_n(a)$ lässt sich als Mittel über die $u_{n-1}(b)$ ausdrücken

über eine Zerlegung nach dem ersten Schritt:

$$\sum_{c\in S} h(c)\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{c\in S} h(c) \sum_{b\in S} P(a,b)\mathbf{P}_b(X_{n-1} = c)$$

$$\mathbf{E}_a\big[h(X_n)\big] = \sum_{b\in S} P(a,b)\,\mathbf{E}_b\big[h(X_{n-1})\big], \quad a \in S$$

$$\mathbf{E}_a\big[h(X_n)\big] = \sum_{b\in S} P(a,b)\,\mathbf{E}_b\big[h(X_{n-1})\big], \quad a \in S$$

ist gleichbedeutend mit

$$u_n(a) = \sum_{b\in S} P(a,b)\,u_{n-1}(b), \quad a \in S$$

oder in Vektor-Matrixschreibweise, mit u_n als Spaltenvektor und der Anfangsbedingung $\mathbf{E}_a[h(X_0)] = h(a)$

$$\begin{cases} u_n = P\,u_{n-1}\,, & n \geq 1 \\ u_0 = h\,. \end{cases}$$

Treffwahrscheinlichkeiten

Die Frage:

P sei eine Übergangsmatrix auf der abzählbaren Menge S

X sei (der zufällige Pfad) eine(r) Markovkette mit ÜWk't P

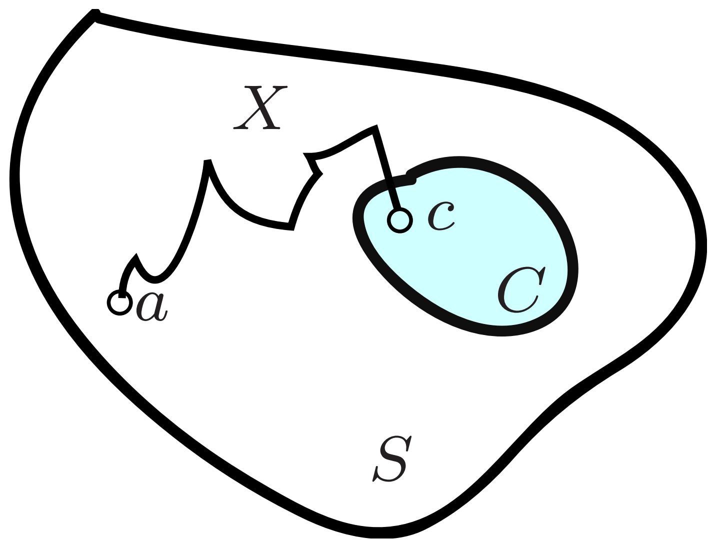
$C \subset S$, $c \in C$ seien fest.

Wie wahrscheinlich ist es,

dass der in $a \in S$ startende Pfad

die Menge C erstmals

im Zustand c trifft?



Treffwahrscheinlichkeiten

Die Antwort:

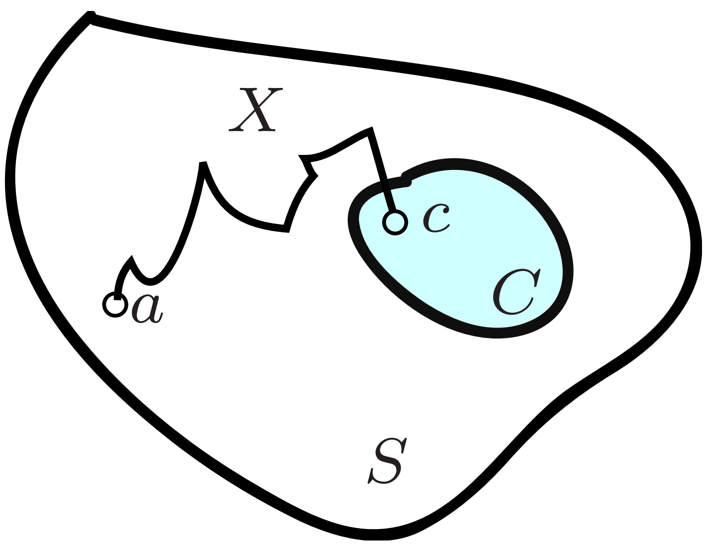
Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b) w(b) = w(a)$$

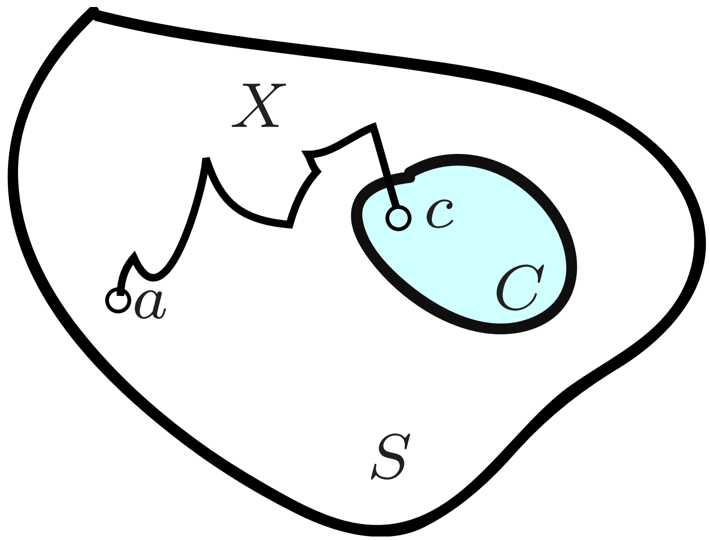
für $a \in S \setminus C$,

$$w(a) = \delta_{ac} \quad \text{für } a \in C$$



Die nächsten 3 Folien enthalten den Beweis dieser Aussage.

Erste Treffzeit:



$$T_C := \min\{n : X_n \in C\}$$

$$E_n := \{T_C = n,\ X_{T_C} = c\}$$

Für $n = 0$, $b \in S$ ist

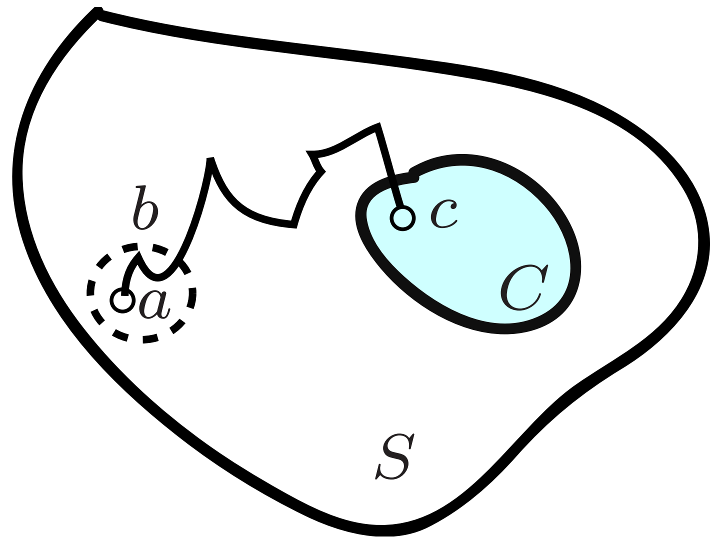
$$\mathbf{P}_b(E_0) = \delta_{bc} := \begin{cases} 1 \text{ für } b = c\,, \\ 0 \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Für $n = 0$, $a \notin C$ ist

$$\mathbf{P}_a(E_1) = P(a,c) = \sum_{b \in S} P(a,b)\,\mathbf{P}_b(E_0)$$

$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$

$E_n = \{T_C = n,\ X_{T_C} = c\}$



Also für $n \geq 1$, $a \notin C$:

$$\mathbf{P}_a(E_n) = \sum_{b \in S} P(a,b)\mathbf{P}_b(E_{n-1})$$

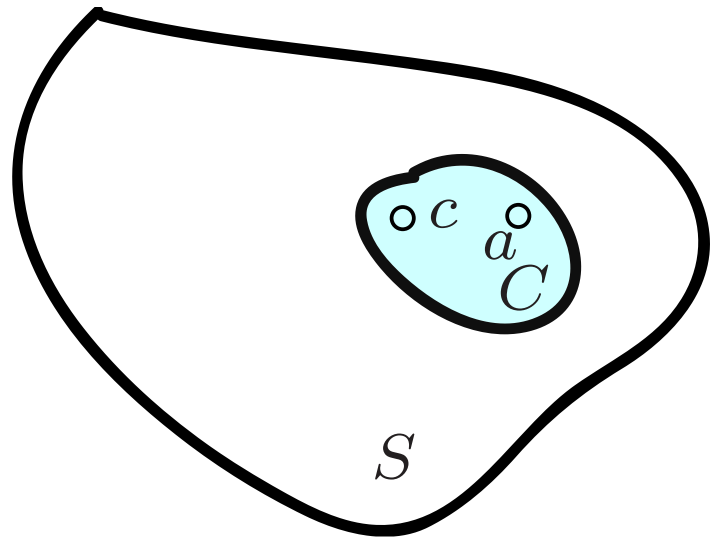
Summation über $n \geq 1$, mit $E := \{T_C < \infty,\ X_{T_C} = c\}$:

$$\mathbf{P}_a(E) = \sum_{b \in S} P(a,b)\,\mathbf{P}_b(E), \quad a \notin C$$

$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$

$E = \{T_C < \infty, X_{T_C} = c\}$

Und für $a \in C$?



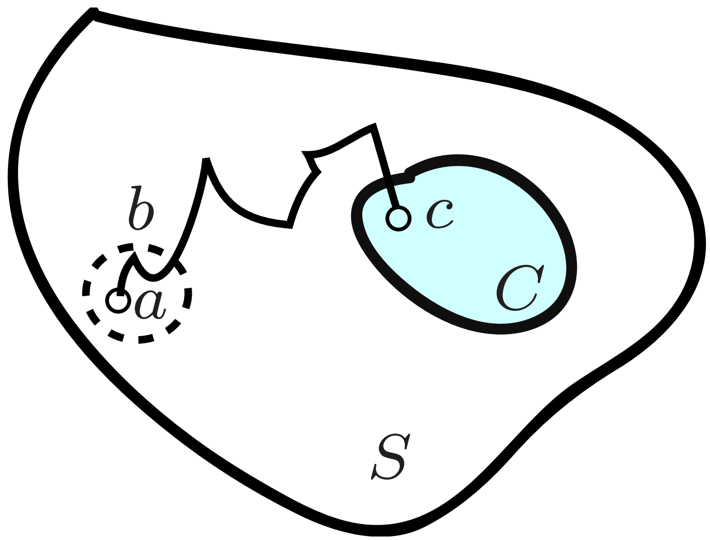
Bei Start in a ist dann $T_C = 0$ und $X_{T_C} = a$, also

$$\mathbf{P}_a(E) = \delta_{ac} = \begin{cases} 1 \text{ für } a = c\,, \\ 0 \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Treffwahrscheinlichkeiten

$$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$$

$$E = \{T_C < \infty, X_{T_C} = c\}$$



Fazit:

Die Abbildung $w : a \mapsto \mathbf{P}_a(E)$ erfüllt das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b)w(b) = w(a) \text{ für } a \in S \setminus C\,, \quad w(a) = \delta_{ac} \text{ für } a \in C$$

Beispiel A

Welches Muster kommt eher?

Mit welcher W'keit kommt beim fairen Münzwurf das Muster

KKK früher als das Muster WKW?

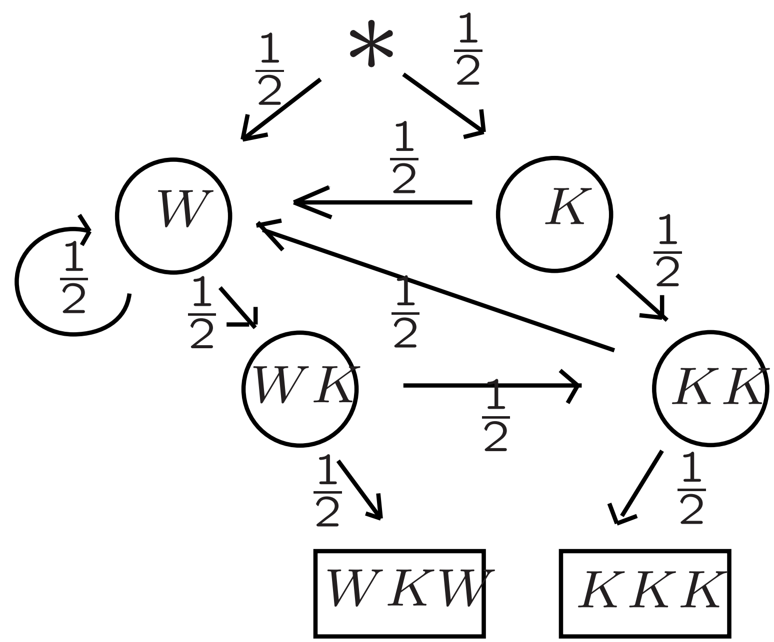
Hier ist ein

"reduzierter Graph"

der relevanten

Zustände

und Übergänge:

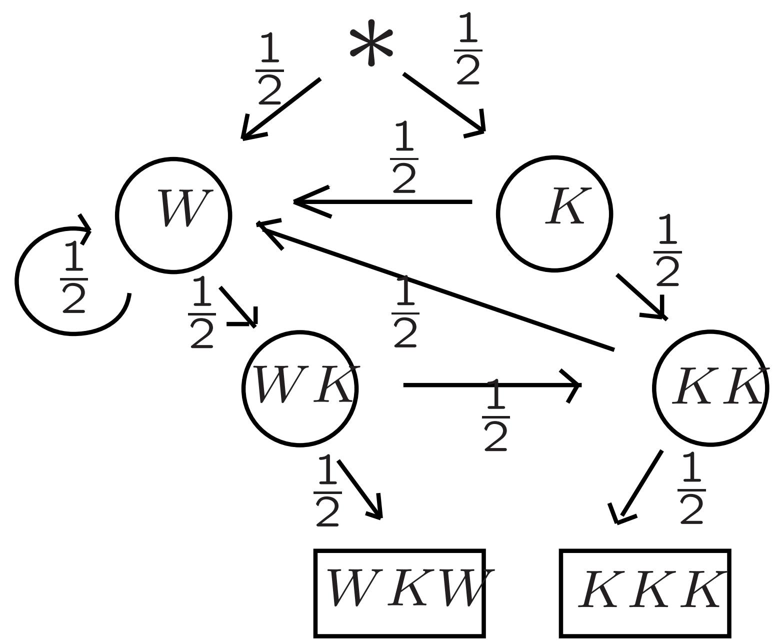


Für $w(a) :=$

$\mathbf{P}_a(X$ endet in $KKK)$

ergibt sich das

Gleichungssystem



$$w(KK) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}w(W)\ , \quad w(WK) = \frac{1}{2}w(KK)$$

$$w(K) = \frac{1}{2}w(KK) + \frac{1}{2}w(W)\ , \quad w(W) = \frac{1}{2}w(WK) + \frac{1}{2}w(W)\ .$$

und daraus

$$w(W) = \tfrac{1}{3},\ w(K) = \tfrac{1}{2},\quad w(*) = \tfrac{1}{2}w(W) + \tfrac{1}{2}w(K) = \frac{5}{12}\ .$$

Beispiel B: **Gewinn oder Ruin?**

Eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,

bevor sie zum Nullpunkt kommt?

"Zerlegung nach dem ersten Schritt" und Randbedingungen:

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1)\,, \quad a = 1, \ldots, c-1\,,$$

$$w(0) = 0, \quad w(c) = 1$$

Fazit: Die $w(a)$ liegen auf einer Geraden,

$$w(a) = \beta a + \gamma \quad \text{mit } \gamma = 0, \beta = 1/c.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $3/10$.

Beispiel C: **Kommt man je zurück?**

Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, $C := \{0\}$, $T_0 := T_C$.

$w_a := \mathbf{P}_a(T_0 < \infty)$ erfüllt

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1)\ , \quad a \neq 0\ ,$$
$$w(0) = 1$$

Also ist $w(a) \equiv 1$ und

$$\mathbf{P}_0(\text{Rückkehr in endlicher Zeit}) = \frac{1}{2}w(-1) + \frac{1}{2}w(1) = 1\ .$$