Vorlesungsskript ,,Stochastische Finanzmathematik"

Christoph Kühn

aktuelle Version: 14. April 2014

Vorwort

Dies ist das Skript zu einer einführenden, dreistündigen Vorlesung in Finanzmathematik, die ich erstmals im Sommersemester 2003 am damaligen Fachbereich Mathematik der Goethe-Universität Frankfurt als damals junger Professor hielt. Ziel war es, den Teilnehmern grundlegende Begriffe, Zusammenhänge und Methoden aus der Finanzmathematik näherzubringen, wie z.B. selbstfinanzierende Handelsstrategien, Arbitragemöglichkeit, Numéraire, Martingalmaße, Forwards, Optionen, Superhedging, Risikominimierung. Der Schwerpunkt lag dabei auf der Bewertung und (teilweisen) Absicherung von Derivaten sowie der Portfoliooptimierung.

Ich habe mich auf zeitdiskrete Modelle beschränkt, was den Vorteil hat, dass man schon in einer einführenden Vorlesung bis zu aktuellen Forschungsproblemen vorstoßen kann. Folge ist zudem, dass der *vollständige* Markt, der sich durch eindeutige arbitragefreie Derivatepreise auszeichnet, sich schnell als sehr eingeschränkter Spezialfall entpuppt, und der *unvollständige* Markt zum Regelfall wird.

Aufgrund der Kürze der Zeit mussten natürlich einige Kompromisse gemacht werden. Es wurde deshalb bewusst nur der Aktienmarkt behandelt und zum Beispiel der Bondmarkt („Zinsstrukturkurven") außen vor gelassen. Dieser wird in einer späteren Vorlesung im Rahmen zeitstetiger Modelle behandelt werden. Auch das Thema Risikomaße ist Gegenstand eines späteren Seminars.

Neben einigen anderen Einflüssen hält sich das Skript phasenweise sehr eng an **Kallsen** [**10**] und **Föllmer und Schied** [**5**]. Bei Philipp Hornung, Nor Jaafari und Andrea Kuntschik möchte ich mich für Hinweise auf Fehler bedanken.

Inhaltsverzeichnis

0 Crashkurs in Maß- und Integrationstheorie **5**

0.1 Das Integral . . . 10

0.2 Einige Konvergenzbegriffe in der Stochastik . . . 14

0.3 Bedingter Erwartungswert . . . 16

1 Modellierung arbitragefreier Finanzmärkte **24**

1.1 Ausflug in eine Welt mit unendlich vielen Wertpapieren . . . 38

2 Derivatebewertung und Hedging **40**

2.1 Einschub: Lokalisierung . . . 48

3 Portfoliooptimierung **58**

3.1 Einschub: Maßwechsel . . . 58

3.2 Mittelwert-Varianz-Optimierung . . . 63

3.2.1 Capital Asset Pricing Model (CAPM) . . . 68

3.3 Erwartungsnutzenoptimierung . . . 70

3.3.1 Zeitlich homogenes Marktmodell . . . 80

3.3.2 Zwischenzeitlicherer Konsum . . . 83

3.3.3 Logarithmische Nutzenfunktion . . . 87

3.3.4 Existenz einer optimalen Strategie . . . 91

4 Risikomaße **93**

5 Neutrale Derivatebewertung **100**

6 Amerikanische Optionen **102**

6.1 Amerikanische Optionen in vollständigen Märkten . . . 106

6.2 Amerikanische Optionen in unvollständigen Märkten . . . 111

6.3 Optimale Ausübung einer amerikanischen Option . . . 115

6.4 Δ-Hedging für amerikanische Claims . . . 117

7 Superhedging **118**

8 Minimierung des Hedging-Fehlers in unvollständigen Märkten 126

A Anhang 135

0 Crashkurs in Maß- und Integrationstheorie

Nach Einführung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellrahmens beginnen wir mit einem Crashkurs in Maß- und Integrationstheorie. Auch wenn der Großteil des Stoffs in anderen Vorlesungen, wie der *Höheren Analysis*, sehr viel detailierter behandelt sein wird, wollen wir uns mit den für die finanzmathematischen Veranstaltungen im Bachelorstudium zwingend benötigten Fakten und Zusammenhängen nochmal im Schnelldurchgang beschäftigen. Das Kapitel ist selbsterklärend (setzt also keine maßtheoretischen Vorkenntnisse voraus). Aus Zeitgründen wird jedoch in *diesem* Kapitel an der Motivation der gewählten mathematischen Objekte ("Wieso besitzen i.A. nicht alle Teilmengen von Ω eine Wahrscheinlichkeit ? Wieso fordert man von einem Wahrscheinlichkeitsmaß σ-Addivität und nicht nur endliche Additivität ?", etc.) und an Beispielen gespart.

Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nennen wir einen Wahrscheinlichkeitsraum

Ω: "beliebige" Menge, $\omega \in \Omega$ nennen wir ein **Ergebnis**

$\mathcal{F}$: Mengensystem bestehend aus Teilmengen von Ω, d.h. $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$, wobei 2^Ω die Potenzmenge von Ω bezeichnet. $A \in \mathcal{F}$ nennen wir ein **Ereignis**. $\mathcal{F}$ soll zudem eine σ-Algebra sein, d.h. folgende Eigenschaften besitzen

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}$

(iv) Wahrscheinlichkeitsmaß P: $\mathcal{F} \to [0,1]$, $P(\Omega) = 1$, σ-additiv, d.h. für jede Folge von disjunkten Ereignissen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ gilt $P(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty P(A_n)$.

Interpretation: $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ ist beobachtbares Ereignis}\}$.

Satz 0.1 (Erzeugung von σ-Algebren)**.** *Sei $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$. Es existiert eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$, die $\mathcal{E}$ umfasst, nämlich*

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A}\subset 2^\Omega,\ \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra mit } \mathcal{E}\subset\mathcal{A}} \mathcal{A} \tag{0.1}$$

$$:= \{A \subset \Omega \mid A \in \mathcal{A}\ \forall \sigma\text{-Algebren } \mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}\,. \tag{0.2}$$

"Kleinste" bedeutet, dass jede andere σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ umfasst, auch $\sigma(\mathcal{E})$ umfasst.

Beweis. Die Minimalität folgt sofort aus der Konstruktion, da jede σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ umfasst, beim Schnitt berücksichtigt wird und somit Obermenge von $\sigma(\mathcal{E})$ ist. Bleibt zu zeigen, dass $\sigma(\mathcal{E})$ tatsächlich eine σ-Algebra ist. Wir prüfen die Eigenschaften (i),(ii) und (iii) von oben.

(i) Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ gilt $\Omega \in \mathcal{A}$ und damit $\Omega \in \sigma(\mathcal{E})$.

(ii) Sei $A \in \sigma(\mathcal{E})$. Damit ist $A \in \mathcal{A}$ für alle $\mathcal{A}$, über die der Schnitt in (0.1) gebildet wird. Damit gilt aber auch $A^c \in \mathcal{A}$ für die entsprechenden σ-Algebren und folglich $A^c \in \sigma(\mathcal{E})$.

(iii) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \sigma(\mathcal{E})$. Es folgt $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ für alle $\mathcal{A}$, über die der Schnitt in (0.1) gebildet wird. Damit gilt aber auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ für die entsprechenden σ-Algebren und folglich $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{E})$.

$\square$

Proposition 0.2. *Seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset 2^{\Omega}$. Es gilt die Implikation*

$$\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2) \implies \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2).$$

Beweis. Sei $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$. $\sigma(\mathcal{E}_2)$ ist also eine σ-Algebra, die $\mathcal{E}_1$ umfasst und damit ein Mengensystem, das im Schnitt (0.1) mit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ vorkommt. Es folgt $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$. $\square$

Definition 0.3 (Borelsche σ-Algebra)**.** *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega = \mathbb{R}^n$. Die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ ist die von der Menge $\mathcal{E}_1$ der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra, wobei Offenheit einer Menge bzgl. der euklidischen Norm $||x|| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$ zu verstehen ist.*

Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ (d.h. $a_i < b_i \ \forall i = 1, \ldots, n$) definieren wir den offenen **Quader** als das kartesische Produkt

$$(a, b) := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$$

Definiere $\mathcal{E}_2 := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^n,\ a < b\}$.

Satz 0.4. *Es gilt $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$, d.h. die Borelsche σ-Algebra wird auch von den offenen Quadern erzeugt.*

Beweis. 1. Aus $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1$ folgt $\sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$.

2. Sei $\mathcal{O}$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Offenbar gilt

$$\mathcal{O} = \bigcup_{a<b,\ a,b\in\mathbb{Q}^n,(a,b)\subset\mathcal{O}} (a,b) =: \widetilde{\mathcal{O}}.$$

$\widetilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ ergibt sich direkt aus der Konstruktion von $\widetilde{\mathcal{O}}$. Sei umgekehrt $x \in \mathcal{O}$. Da $\mathcal{O}$ offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon)\times\ldots\times(x_n-\varepsilon, x_n+\varepsilon) \subset \mathcal{O}$ und da die rationalen Zahlen dicht liegen, gibt es auch $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ mit $x_i - \varepsilon < a_i < x_i < b_i < x_1 + \varepsilon$. Es folgt $x \in \widetilde{\mathcal{O}}$.

$\widetilde{\mathcal{O}}$ ist als abzählbare Vereinigungen von offenen Quadern Element aus $\sigma(\mathcal{E}_2)$ (jede σ-Algebra, die $\mathcal{E}_2$ umfasst, enthält $\widetilde{\mathcal{O}}$ als Element). Mit Proposition 0.2 folgt $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$ und damit insgesamt Gleichheit. □

Bemerkung 0.5. *Die Borelsche σ-Algebra wird auch von den abgeschlossenen Quadern (Intervallen) $[a,b]$ oder von den Quadern $(a,b]$ oder von den Quadern $[a,b)$ erzeugt.*

Definition 0.6. *Sei Ω' ein weiterer Grundraum und $\mathcal{F}' \subset 2^{\Omega'}$ eine weitere σ-Algebra. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$-messbar, falls die Urbilder messbarer Mengen wieder messbar sind, falls also*

$$f^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A'\} \in \mathcal{F}, \quad \forall A' \in \mathcal{F}'.$$

Bemerkung 0.7. *Sei $\mathcal{E}'$ ein Erzeuger von $\mathcal{F}'$. Die Messbarkeit von f folgt bereits aus $f^{-1}(E') \in \mathcal{F}$ für alle $E' \in \mathcal{E}'$ (man rechne nach, dass $\{B' \subset \Omega' \mid f^{-1}(B') \in \mathcal{F}\}$ wiederum eine σ-Algebra ist, und wende dann Proposition 0.2 an).*

Satz 0.8 (Komposition messbarer Funktionen)**.** *Sei Ω'' ein weiterer Grundraum und $\mathcal{F}'' \subset 2^{\Omega''}$ eine weitere σ-Algebra. Wenn die Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$-messbar und die Abbildung $g : \Omega' \to \Omega''$ $\mathcal{F}' - \mathcal{F}''$-messbar ist, dann ist die Komposition $g \circ f : \Omega \to \Omega''$ (d.h. $(g \circ f)(\omega) = g(f(\omega))$) $\mathcal{F} - \mathcal{F}''$-messbar.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für $B'' \in \mathcal{F}''$, dass $B' := g^{-1}(B'') \in \mathcal{F}'$. Weiter gilt $f^{-1}(B') \in \mathcal{F}$ und damit $(g \circ f)^{-1}(B'') = f^{-1}(B') \in \mathcal{F}$. □

Proposition 0.9. *Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{B}^n - \mathcal{B}$-messbar.*

Beweis. Mit Bemerkung 0.7 klar, da unter einer stetigen Funktion das Urbild einer offenen Menge offen ist. □

Definition 0.10 (Zufallsvariable)**.** *Eine reellwertige Zufallsvariable ist eine Abbildung $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, die $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borelsche-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.*

Sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und $(Y_i)_{i \in I}$ eine Familie reellwertiger Zufallsvariablen. Mit

$$\sigma(Y_i,\ i \in I) := \sigma(\{Y_i^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ i \in I\})$$

wird die von den Y_i, $i \in I$, erzeugte σ-Algebra bezeichnet. $\sigma(Y_i,\ i \in I)$ ist also die kleinste σ-Algebra auf Ω, so dass alle Abbildungen Y_i, $i \in I$, messbar sind.

Eine Abbildung $Y : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} =: \overline{\mathbb{R}}$, die $\mathcal{F}$-$\overline{\mathcal{B}}$-messbar ist, wobei

$$\overline{\mathcal{B}} := \{B \subset \overline{\mathbb{R}} \mid (B \cap \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\},$$

die Borelsche-σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ bezeichnet, wird **numerische Zufallsvariable** *genannt.*

Aus technischen Gründen, die aber zum Verständnis der Vorlesung nicht weiter wichtig sind, können wir im Fall, dass Ω überabzählbar ist, i.A. nicht mehr allen Teilmengen von Ω eine Wahrscheinlichkeit zuordnen (wenn zudem das Wahrscheinlichkeitsmaß bestimmte wünschenswerte Eigenschaften haben soll). Für die Erfordernisse der stochastischen Modellierung ist die Menge $\{Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ allerdings groß genug (Es ist gar nicht so einfach, eine Teilmenge des $\mathbb{R}$ anzugeben, die nicht Element aus $\mathcal{B}$ ist).

Proposition 0.11. *Seien $Y_1, Y_2, \dots$ numerische Zufallsvariablen, dann sind*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} Y_n, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} Y_n, \quad \liminf_{n \in \mathbb{N}} Y_n, \quad \limsup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$$

wiederum numerische Zufallsvariablen.

Beweis. $\{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ ist ein Erzeuger von $\overline{\mathcal{B}}$ (Übungsaufgabe) und es gilt

$$\left(\inf_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right)^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{F}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Die anderen Aussagen folgen ähnlich. □

Proposition 0.12. *Seien Y_1 und Y_2 reellwertige Zufallsvariablen. Dann sind auch*

$$Y_1 + Y_2, \quad Y_1 - Y_2, \quad Y_1Y_2, \quad \min\{Y_1, Y_2\}, \quad \max\{Y_1, Y_2\} \tag{0.3}$$

reellwertige Zufallsvariablen. Des weiteren gilt

$$\{Y_1 \leq Y_2\}, \{Y_1 = Y_2\}, \{Y_1 \geq Y_2\} \in \mathcal{F}. \tag{0.4}$$

Beweis. Die Abbildung $\omega \mapsto (Y_1(\omega), Y_2(\omega))$ ist $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}^2$-messbar. Für alle $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} &\{\omega \in \Omega \mid (Y_1(\omega), Y_2(\omega)) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid Y_1(\omega) \in (a_1, b_1)\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y_2(\omega) \in (a_2, b_2)\} \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

wobei der Schnitt wiederum in $\mathcal{F}$ liegt, da $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist. Damit sind die Urbilder von Erzeugermengen messbar und mit Bemerkung 0.7 alle Urbilder von $\mathcal{B}^2$.

Da die Abbildungen $(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$ etc. stetig sind, folgt (0.3) aus Proposition 0.9 und Satz 0.8. Aus der Messbarkeit der Abbildung $Y_1 - Y_2$ folgt dann (0.4), da etwa $\{Y_1 \leq Y_2\} = \{Y_1 - Y_2 \in [0, \infty)\}$ und $[0, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

Definition 0.13 (Nullmenge)**.** *Eine Menge $N \in \mathcal{F}$ heißt eine P-Nullmenge, wenn $P(N) = 0$.*

Sei E eine Eigenschaft, die in Abhängigkeit von ω wahr oder falsch ist. Wir sagen E gilt P-fast sicher (abkürzend P-f.s.), wenn die Menge $\{\omega \in \Omega \mid E(\omega)$ ist falsch$\}$ eine P-Nullmenge ist.

Betrachtet man statt P ein Maß, das nicht als Wahrscheinlichkeitsmaß interpretiert werden soll, sagt man ,,fast überall" (f.ü.) statt ,,fast sicher" (f.s.).

Lemma 0.14 (Erstes Borel-Cantelli-Lemma). *Sei* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ *mit* $\sum_{n=1}^\infty P(A_n) < \infty$. *Dann gilt* $P(\text{„}A_n$ *tritt für unendlich viele* n *ein"*$) = P\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n\right) = 0$.

Es gilt $A := \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n\right) \in \mathcal{F}$ und

$$\omega \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n \Leftrightarrow \forall m\ \exists n \geq m\ \omega \in A_n \Leftrightarrow \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

A_n tritt genau dann unendlich oft ein, wenn es nach jedem m nochmal eintritt.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$. Es gilt $A \subset \bigcup_{n\geq m} A_n$ und damit

$$P(A) \leq P(\bigcup_{n\geq m} A_n) \leq \sum_{n=m}^\infty P(A_n) \to 0 \quad \text{für } m \to \infty,$$

da $\sum_{n=1}^\infty P(A_n) < \infty$. Folglich kann die rechte Seite durch Wahl eines großen m beliebig klein gemacht werden. Da die linke Seite nicht von m abhängt, muss sie 0 sein. □

0.1 Das Integral

Der Erwartungswert einer reellwertigen Zufallsvariablen $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ bzgl. eine Maßes P wird als Lebesgueintegral $\int Y\, dP$ definiert.

Zur Definition des Integrals beginnen wir zunächst mit sog. **Elementarfunktionen**, das sind messbare Funktionen, die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen. Zudem sollen die Funktionen zunächst nichtnegativ sein. Für

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}_+,\ A_k \in \mathcal{F}, \tag{0.5}$$

definieren wir

$$I(f) = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(A_k) \tag{0.6}$$

Man mache sich klar, dass $I(f)$ wohldefiniert ist, da die rechte Seite von (0.6) nicht von der konkreten Darstellung von f abhängt.

Die Menge der Funktionen, die wie in (0.5) darstellbar sind, bezeichnen wir mit $\mathbb{E}^+$.

Definition 0.15 (Integral für nichtnegative Funktionen). *Sei $f : \Omega \to [0,\infty]$ $\mathcal{F}-\mathcal{B}([0,\infty])$-messbar. Wir definieren das Integral von f bzgl. P durch*

$$\int f\,dP = \sup\{I(h) \mid h \in \mathbb{E}^+,\ h \leq f\}.$$

Bemerkung 0.16. *Natürlich würde Definition 0.15 zunächst auch für nicht-messbare Funktionen f Sinn ergeben. Einige der im folgenden hergeleiteten Eigenschaften des Integrals würden jedoch verlorengehen.*

Satz 0.17. *Für messbare Funktionen $f, g \geq 0$ gilt*

(i) $f \leq g$ *P-f.s.* $\Rightarrow \int f\,dP \leq \int g\,dP$

(ii) $f = 0$ *P-f.s.* $\Leftrightarrow \int f\,dP = 0$

(iii) $\int f\,dP < \infty \Rightarrow f < \infty$ *P-f.s.*

Beweis. Ad (i): Sei $h \geq 0$ eine Elementarfunktion mit $h \leq f$. Es folgt, dass $\widetilde{h} := h1_{\{f \leq g\}}$ ebenfalls eine Elementarfunktion ist, für die zudem gilt $\widetilde{h} \leq g$ (ohne Ausnahmenullmenge). Wegen $P(f \leq g) = 1$ gilt für die Elementarintegrale offensichtlich $I(\widetilde{h}) = I(h)$. (i) folgt dann aus der Definition.

Ad (ii): $\int f\,dP = 0$ ist dazu äquivalent, dass jede nichtnegative Elementarfunktion, die von f dominiert wird, P-f.s 0 ist. Für f mit $P(f = 0) = 1$ ist letzteres sicher der Fall. Umgekehrt kann man aus der Eigenschaft folgern, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $P(f \geq 1/n) = 0$ (betrachte dazu die Elementarfunktion $h = \frac{1}{n}1_{\{f \geq 1/n\}}$). Wegen

$$\{f \geq 1/n\} \uparrow \{f > 0\}, \quad n \uparrow \infty,$$

folgt die Behauptung mit der σ-Additivität von P.

Ad (iii): Betrachte die Elementarfunktionen $n1_{\{f=\infty\}}$, $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 0.18. *Nach Satz 0.17(ii) gilt $\int \infty 1_N\,dP = 0$ für $P(N) = 0$.*

Satz 0.19 (Satz von der monotonen Konvergenz). *Sei (f_n) eine Folge von $\mathbb{R}_+$-wertigen messbaren Funktionen mit $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ und $f := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n$ (nach Proposition 0.11 ist die $[0,\infty]$-wertige Funktion f wiederum messbar). Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,dP = \int f\,dP.$$

Beweis. Aus der Monotonie folgt die Existenz des Limes und $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, dP \leq \int f \, dP$. Bleibt ≥ 0 zu zeigen. Dazu nehme eine nichtnegative Elementarfunktion h mit $h \leq f$. Zu festem $\varepsilon > 0$ betrachte die Elementarfunktionen $h_n := (h-\varepsilon)^+ 1_{\{f_n > h-\varepsilon\}}$, wobei $(h(\omega) - \varepsilon)^+ = \max\{h(\omega) - \varepsilon, 0\}$. Es folgt $h_n \leq f_n$ und damit $I(h_n) \leq \int f_n \, dP$. Andererseits gilt

$$I(h_n) \geq I(h) - \varepsilon - h_{\max} P(f_n \leq h - \varepsilon).$$

Es gilt $\{f_n \leq h - \varepsilon\} \downarrow \emptyset$ für $n \uparrow \infty$ und damit wegen der σ-Additivität von P $P(f_n \leq h - \varepsilon) \downarrow 0$ für $n \uparrow \infty$. Es folgt, dass $\liminf_{n\to\infty} I(h_n) \geq I(h) - \varepsilon$ und damit $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, dP \geq \int f \, dP$ (da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht von $\varepsilon > 0$ abhängt und letzteres beliebig klein gewählt werden kann) und damit die Behauptung. □

Lemma 0.20 (Lemma von Fatou). *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen. Es gilt*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, dP \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, dP.$$

Beweis. Definiere $g_n := \inf_{m\geq n} f_m$. Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton aufsteigend mit $g_n \leq f_n$ und $\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$. Mit Satz 0.19 und Satz 0.17(i) folgt

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, dP = \int \lim_{n\to\infty} g_n \, dP = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, dP \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, dP.$$

□

Das Integral für beliebige messbare Funktionen kann auf das Integral aus Definition 0.15 für nichtnegative Funktionen zurückgeführt werden. Dazu definieren wir $f^+(\omega) := \max\{f(\omega), 0\}$ und $f^-(\omega) := \max\{-f(\omega), 0\}$.

Definition 0.21. *Falls $\int f^+ \, dP < \infty$* **oder** *$\int f^- \, dP < \infty$, dann sei das Integral definiert durch*

$$\int f \, dP := \int f^+ \, dP - \int f^- \, dP$$

(mit den üblichen Konventionen $\infty - a := \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $a - \infty := -\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$)

f heißt P-integrierbar falls $\int f^+ \, dP < \infty$ **und** *$\int f^- \, dP < \infty$. Der Raum der P-integrierbaren Zufallsvariablen wird mit $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bezeichnet .*

Analog bezeichnet $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ für $p \in [1, \infty)$ den Raum der messbaren Zufallsvariablen f, s.d. $|f|^p$ P-integrierbar ist.

$\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bezeichnet den Raum der $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen.

$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bezeichnet den Raum der Zufallsvariablen f für die ein $M \in \mathbb{R}_+$ existiert mit $P(|f| \leq M) = 1$ (f heißt dann essentiell beschränkt).

Mit $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $p \in [1, \infty)$, $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bezeichnet man die entsprechenden Quotientenräume der Äquivalenzklassen, die entstehen, wenn Zufallsvariablen, die P-f.s. übereinstimmen miteinander identifiziert werden. Also

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)/\mathcal{N} = \{\overline{f} := f + \mathcal{N} \mid f \in \mathcal{L}^p\}$$

etc., wobei $\mathcal{N} := \{g \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid P(g = 0) = 1\}$.

Es gelten folgende Eigenschaften des Integrals, die ohne viel Aufwand bewiesen werden können.

Satz 0.22. *Seien f und g Funktionen s.d. die Integrale nach P (im Sinne von Definition 0.21) definiert sind.*

(i) (Monotonie) Ist $f \leq g$, so ist $\int f \, dP \leq \int g \, dP$.

(ii) (Linearität) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\int (\lambda f + \mu g) \, dP = \lambda \int f \, dP + \mu \int g \, dP$.

(iii) (Dreiecksungleichung) Es gilt $|\int f \, dP| \leq \int |f| \, dP$.

Ab nun werden wir den Erwartungswert einer reellwertigen (bzw. numerischen) Zufallsvariablen als Integral nach P definieren (sofern dies im Sinne von Definition 0.21 definiert ist) und mit $E_P(Y) := \int Y \, dP$ bezeichnen. Solange es nur *ein* Wahrscheinlichkeitsmaß gibt, unter dem Erwartungswerte gebildet werden, schreiben wir $E(Y) := E_P(Y)$.

0.2 Einige Konvergenzbegriffe in der Stochastik

Wir werden kurz die wichtigsten Konvergenzbegriffe in der Stochastik skizzieren. Wir betrachten eine Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellwertigen Zufallsvariablen und eine reellwertige Zufallsvariable Y. Alle Zufallsvariablen sollen auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiert sein.

Definition 0.23. *(1) $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch gegen Y, wenn für alle $\varepsilon > 0$*

$$P(|Y_n - Y| \le \varepsilon) \to 1, \quad n \to \infty.$$

(2) $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher gegen Y, wenn $P(Y_n \to Y,\ n \to \infty) = 1$.

(3) Sei $p \in [1, \infty)$. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in L^p gegen Y, wenn

$$E(|Y_n - Y|^p) \to 0, \quad n \to \infty$$

(2) ist äquivalent dazu, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$P(|Y_m - Y| \le \varepsilon\ \forall m \ge n) \to 1, \quad n \to \infty.$$

Damit sieht man, dass $(\mathbf{2}) \implies (\mathbf{1})$. Die Implikation $(\mathbf{3}) \implies (\mathbf{1})$ folgt aus der Abschätzung

$$E(|Y_n - Y|^p) \ge \varepsilon^p P(|Y_n - Y| > \varepsilon)$$

Andere Implikationen gelten nicht. Klassische Gegenbeispiele:

(2) $\not\Rightarrow$ (3). Wähle $\Omega = (0, 1)$ und P das Lebesgue-Maß (Gleichverteilung auf $(0, 1)$). Setze. $Y = 0$ und $Y_n(\omega) = n^{1/p} 1_{(0,1/n)}(\omega)$. Für jedes $\omega \in (0, 1)$ gilt $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$, $n \to \infty$, also (2). Es gilt aber

$$E(|Y_n - Y|^p) = (n^{1/p})^p P((0, 1/n)) = n\frac{1}{n} = 1$$

und damit liegt keine L^p-Konvergenz vor.

(3) $\not\Rightarrow$ (2) Stelle $n \in \mathbb{N}$ durch $n = 2^m + k$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k = 0, \ldots, 2^m - 1$ dar und definiere

$$Y_n(\omega) = 1_{\left(\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]}(\omega) \quad \text{sowie wieder} \quad Y = 0. \tag{0.7}$$

Es gilt

$$E(|Y_n - Y|^p) = P(Y_n = 1) = \frac{1}{2^m}$$

Da mit $n \to \infty$ auch $m \to \infty$ folgt L^p-Konvergenz. Für jedes $\omega \in (0,1)$ gibt es aber unendlich viele n mit $Y_n(\omega) = 1$. Damit gibt es keine punktweise Konvergenz ((2) ist nicht erfüllt).

Definition 0.24 (Gleichgradige Integrierbarkeit)**.** *Eine Folge* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von reellwertigen Zufallsvariablen heißt gleichgradig integrierbar, wenn*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(|Y_n| 1_{\{|Y_n|>M\}}\right) \to 0, \quad M \to \infty.$$

Wichtig für Anwendungen sind die folgenden beiden Sätze.

Satz 0.25. *(1) impliziert die Existenz einer* Teilfolge $(Y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*, die P-f.s. gegen Y konvergiert.*

Beweis. Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die stochastisch gegen Y konvergiert. Offenbar lässt sich dann eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konstruieren mit

$$P(|Y_{n_k} - Y| > 2^{-k}) \leq 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Definiere

$$A := \{|Y_{n_k} - Y| \leq 2^{-k} \text{ für alle } k \text{ außer höchstens endlich vielen}\}.$$

Aus dem Erstes Borel-Cantelli-Lemma (Lemma 0.14) folgt, dass $P(A^c) = 0$ und damit $P(A) = 1$. Zudem gilt $A \subset \{Y_{n_k} \to Y, \quad k \to \infty\}$ und damit die Behauptung. □

Satz 0.26. *(1) und gleichgradige Integrierbarkeit der Folge* $(|Y_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ *implizieren (3).*

Beweis. Unter (1) und der gleichgradigen Integrierbarkeit der Folge $(|Y_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ folgere man mit Hilfe einer *Teilfolge* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, auf der fast sichere Konvergenz gilt, die Integrierbarkeit von $|Y|^p$. Es gilt nämlich

$$E\left(|Y|^p\right) = E\left(\liminf_{k\to\infty} |Y_{n_k}|^p\right) \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k\to\infty} E\left(|Y_{n_k}|^p\right) < \infty. \tag{0.8}$$

Wegen (0.8) und der Abschätzung

$$E\left(|Y_n - Y|^p\right) \leq E\left(\left(|Y_n| + |Y|\right)^p\right) \leq 2^p E\left(|Y_n|^p\right) + 2^p E\left(|Y|^p\right)$$

zieht die gleichgradige Integrierbarkeit von $(|Y_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ die gleichgradige Integrierbarkeit von $(|Y_n - Y|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ nach sich. Dann schätze man ab

$$\begin{aligned} E(|Y_n - Y|^p) &= E\left(1_{\{|Y_n - Y|^p > M\}}|Y_n - Y|^p\right) + E\left(1_{\{|Y_n - Y|^p \leq M\}}|Y_n - Y|^p\right) \\ &\leq E\left(1_{\{|Y_n - Y|^p > M\}}|Y_n - Y|^p\right) + MP(|Y_n - Y| > \varepsilon) + \varepsilon^p, \quad \forall \varepsilon > 0, M > 0. \end{aligned}$$

Wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit von $(|Y_n - Y|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ kann man zu festem $\delta > 0$ ein $M \in \mathbb{R}_+$ finden, so dass

$$E\left(1_{\{|Y_n - Y|^p > M\}}|Y_n - Y|^p\right) \leq \frac{\delta}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Durch geeignete Wahl von $\varepsilon > 0$ und n_δ folgt $E(|Y_n - Y|^p) \leq \delta$ für alle $n \geq n_\delta$ und damit die Behauptung. □

Wenn $E(|Y_n|^p) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und $E(|Y|^p) < \infty$, dann gilt auch die Umkehrrichtung "(3) $\Longrightarrow$ (1) & gleichgradig Integrierbar". Die Zusatzforderung der gleichgradigen Integrierbarkeit ist also i.W. auch notwendig um L^p-Konvergenz zu erhalten.

Korollar 0.27 (Satz von der majorisierten Konvergenz)**.** *Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die (1) erfüllt. Wenn es dann ein $Z \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gibt mit $|Y_n|^p \leq Z$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann erfüllt $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch (3).*

Beweis. Eine einzelne integrierbare Zufallsvariable ist, als konstante Folge betrachtet, stets auch gleichgradig integrierbar (folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz). Somit stellt die integrierbare Majorante auch die gleichgradige Integrierbarkeit der Folge $(|Y_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ sicher und das Korollar folgt aus Satz 0.26 □

0.3 Bedingter Erwartungswert

Satz 0.28. *Sei Y eine reellwertige Zufallsvariable (also $\mathcal{F}$-messbar) mit $E(|Y|) < \infty$ und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Dann gibt es eine P-f.s. eindeutige $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable Z mit*

$$E(1_A Y) = E(1_A Z), \qquad \forall A \in \mathcal{G}. \tag{0.9}$$

(Eindeutigkeit bedeutet also, dass für zwei $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariablen Z_1, Z_2, die (0.9) erfüllen, gilt $P(Z_1 = Z_2) = 1$).

Definition 0.29. *Die Zufallsvariable $E(Y|\mathcal{G}) := Z$ wird als eine Version des bedingten Erwartungswertes von Y unter der Information $\mathcal{G}$ bezeichnet.*

Bemerkung 0.30. *Der Ausdruck $E(Y|\mathcal{G})$ ist also immer nur bis auf eine Nullmenge wohldefiniert. Da die Definition keine kanonische Wahl der Zufallsvariablen liefert, die Bedingung (0.9) erfüllt, kommen wir um die leicht umständliche Sprechweise von einer ,,Version des bedingten Erwartungswertes" nicht herum (eine Alternative ist der Übergang zu Äquivalenzklassen von Zufallsvariablen, womit aber für das Hantieren mit bedingten Erwartungswerten auch nichts gewonnen ist).*

Bemerkung 0.31. *Für die triviale σ-Algebra $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, bedeutet die geforderte $\mathcal{G}$-Messbarkeit von Z, dass Z eine konstante Abbildung ist, d.h. $Z(\omega) = z_0$ für alle $\omega \in \Omega$. Setzt man in (0.9) $A = \Omega$, dann sieht man, dass $Z = E(Y)$. Der absolute Erwartungswert kann also als bedingter Erwartungswert bzgl. der trivialen σ-Algebra gesehen werden.*

Die Eindeutigkeit in Satz 0.28 ist klar: man setze für A die $\mathcal{G}$-messbaren Mengen $\{\omega \in \Omega \mid Z_1(\omega) < Z_2(\omega)\}$ und $\{\omega \in \Omega \mid Z_1(\omega) > Z_2(\omega)\}$ ein und wendet Satz 0.17(ii) auf die nichtnegativen Zufallsvariablen $(Z_2 - Z_1)1_{\{Z_2 > Z_1\}}$ und $(Z_1 - Z_2)1_{\{Z_1 > Z_2\}}$ an. Es folgt

$$1 = P\left((Z_2 - Z_1)1_{\{Z_2 > Z_1\}} = 0\right) = P(Z_2 \leq Z_1)$$

bzw.

$$1 = P\left((Z_1 - Z_2)1_{\{Z_1 > Z_2\}} = 0\right) = P(Z_1 \leq Z_2)$$

und damit $P(Z_2 = Z_1) = 1$.

Um die Existenz zu beweisen, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 0.32. *Sei Y eine beschränkte $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariable. Dann besitzt das Optimierungsproblem*

$$\min_{Z\ \mathcal{G}-messbar} E(Y - Z)^2 \tag{0.10}$$

einen P-f.s. eindeutigen Minimierer, der zudem von den Schranken von Y beschränkt wird.

Beweisskizze von Lemma 0.32. Seien Z_1 und Z_2 Minimierer von (0.10). Mit der Rechnung

$$\begin{aligned}\left(Y - \frac{Z_1 + Z_2}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}(Y - Z_1)^2 + \frac{1}{2}(Y - Z_2)^2 + \frac{2Z_1 Z_2 - Z_1^2 - Z_2^2}{4} \\ &= \frac{1}{2}(Y - Z_1)^2 + \frac{1}{2}(Y - Z_2)^2 - \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{4}\end{aligned}$$

folgt $P(Z_1 = Z_2) = 1$, d.h. Eindeutigkeit (andernfalls wären der mittlere quadratische Abstand zu $\frac{Z_1+Z_2}{2}$ noch kleiner). Für die Existenz muss man noch die Vollständigkeit des Raums der quadratintegrierbaren Zufallsvariablen bzgl. der Norm $\sqrt{E(Z^2)}$ zeigen (d.h. die Vollständigkeit von $\mathcal{F}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$), was wir hier nicht im Detail machen wollen. Ähnlich wie im Beweis von Satz 0.25 konstruiert man mit dem Lemma von Borel-Cantelli eine Teilfolge, auf der eine Cauchy-Folge von Zufallsvariablen (bzgl. der Norm $\sqrt{E(Z^2)}$) ω-weise, bis auf eine Ausnahmenullmenge, eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Dann nutzt man die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ aus und benutzt, dass $\limsup$ und $\liminf$ von Zufallsvariablen wiederum Zufallsvariablen sind (Proposition 0.11) . □

Beweis von Satz 0.28. Schritt 1: Betrachte zunächst den Fall, dass Y beschränkt ist. Definiere Z als Minimierer in Lemma 0.32. Z ist also die Projektion von Y auf den Unterraum der $\mathcal{G}$-messbaren Zufallsvariablen. Sei $A \in \mathcal{G}$. Betrachte die $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable $\widetilde{Z} := Z + \delta 1_A$. Aus der Optimalität von Z folgt

$$0 \leq E\left(Y - Z - \delta 1_A\right)^2 - E\left(Y - Z\right)^2 = -2\delta E((Y - Z)1_A) + \delta^2 P(A)$$

Es folgt $E((Y - Z)1_A) = 0$, da andernfalls eine Entwicklung für $\delta \to 0$ ergeben würde, dass Z nicht optimal wäre.

Schritt 2: Der Fall $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $Y = Y^+ - Y^-$ kann auf Schritt 1 zurückgeführt werden, indem man zunächst für $Y^+ \wedge n$ und $Y^- \wedge n$, $n \in \mathbb{N}$, die bedingten Erwartungswerte $Z_{n,+}$ und $Z_{n,-}$ definiert. Die resultierenden bedingten Erwartungswerte sind nichtnegativ und nichtfallend in n. Somit liefert monotone Konvergenz (Satz 0.19)

$$E(1_A \lim_{n\to\infty} Z_{n,+}) = \lim_{n\to\infty} E(1_A Z_{n,+}) = \lim_{n\to\infty} E(1_A Y^+ \wedge n) = E(1_A Y^+) < \infty, \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

(analog für $Z_{n,-}$). Mit Satz 0.17(iii) folgt, dass $P(\lim_{n\to\infty} Z_{n,+} < \infty) = 1$ und $P(\lim_{n\to\infty} Z_{n,-} < \infty) = 1$. $Z := \lim_{n\to\infty} Z_{n,+} - \lim_{n\to\infty} Z_{n,-}$ erfüllt dann die Bedingungen des bedingten Erwartungswertes von Y. □

Bemerkung 0.33 (**Zusatz**). *Im Fall, dass Ω* **abzählbar** *ist, lässt sich die Existenz von Z in (0.9) elementar beweisen (Z lässt sich leicht konstruieren): In diesem Fall existiert eine abzählbare Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Atomen von $\mathcal{G}$, d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und** [*]

$$\mathcal{G} = \{A \in 2^\Omega \mid A = \bigcup_{i\in J} A_i \text{ für ein } J \subset I\}. \tag{0.11}$$

Man nehme o.B.d.A. an, dass $\{\omega\} \in \mathcal{F}$ für alle $\omega \in \Omega$ und betrachte eine Zufallsvariable Y mit $\sum_{\omega\in\Omega} |Y(\omega)|P(\{\omega\}) < \infty$. Der absolute Erwartungswert von Y ließe sich formal durch eine absolut konvergente Reihe definieren: $E(Y) := \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\{\omega\})$.

Eine Version des bedingte Erwartungswert von Y unter $\mathcal{G}$ ist die folgende Zufallsvariable: Für $\omega \in A_i$ setze

$$E(Y|\mathcal{G})(\omega) = \begin{cases} \frac{E(Y1_{A_i})}{P(A_i)} & : \text{wenn } P(A_i) > 0. \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass die so konstruierte Zufallsvariable Bedingung (0.9) erfüllt.

Definition 0.34 (Absolutstetigkeit und Äquivalenz). *Seien μ und ν endliche Maße auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. ν heißt absolutstetig bzgl. μ, geschrieben $\nu \ll \mu$, wenn*

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Ist ν absolutstetig bzgl. μ und μ absolutstetig bzgl. ν, dann heißen ν und μ äquivalent., geschrieben $\nu \sim \mu$.

Satz 0.35 (Satz von Radon-Nikodym). *Seien μ und ν endliche Maße auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent*

[*] Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$. Wir wollen zeigen, dass es zu der σ-Algebra $\mathcal{G}$ eine abzählbare Familie von Atomen gibt. Definiere $A_1 := \bigcap_{B\in\mathcal{G},\ \omega_1\in B} B$. A_1 lässt sich als *abzählbarer* Schnitt schreiben, indem man alle $\omega = \omega_2, \omega_3, \dots$ durchläuft und schaut, ob man sie von ω_1 trennen kann, d.h. ob es ein $B \in \mathcal{G}$ gibt mit $\omega_1 \in B$ aber $\omega \notin B$. Damit folgt $A_1 \in \mathcal{G}$. Wenn $A_1 = \Omega$, sind wir fertig (In diesem Fall muss $\mathcal{G}$ jedoch trivial sein. Für jedes $B \in \mathcal{G}$ gilt nämlich $A_1 \subset B$ oder $A_1 \subset B^c$). Ansonsten sei n die kleinste natürliche Zahl > 1 mit $\omega_n \notin A_1$. Setze $A_2 := \bigcap_{B\in\mathcal{G},\ \omega_n\in B} B$. Es gilt wieder $A_2 \in \mathcal{G}$. Außerdem $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (sei $\omega \in A_1 \cap A_2$, es gilt für alle $B \in \mathcal{G}$ die Äquivalent $\omega_1 \in B \Leftrightarrow \omega \in B \Leftrightarrow \omega_n \in B$. Dies wäre aber ein Widerspruch zu $\omega_n \notin A_1$). Fährt man so fort, so konstruiert man die Familie von Atomen (Eigenschaft (0.11) lässt sich leicht zeigen).

(i) $\nu \ll \mu$

(ii) Es existiert eine nichtnegative messbare Funktion h *mit* $\nu(A) = \int 1_A h \, d\mu$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$.

Die Funktion h *(Radon-Nikodym-Ableitung von* ν *bzgl.* μ *genannt, Schreibweise* $h = \frac{d\nu}{d\mu}$*) ist dann* μ*-fast überall endlich und* μ*-fast überall eindeutig.*

Die Implikation (ii) $\implies$ (i) folgt sofort aus Satz 0.17(ii). Zudem kann für jede nichtnegative und μ-integrierbare Funktion h über $\nu(A) := \int 1_A h \, d\mu$ ein endliches Maß ν definiert werden (die σ-Addivität von ν folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz).

Die Implikation (i) $\implies$ (ii) ist recht aufwendig zu beweisen, weswegen wir darauf verzichten wollen. Ein maßtheoretischer Beweis findet sich im Lehrbuch von Brokate und Kersting [2], ein funktionalanalytischer im Lehrbuch von Klenke [13].

Bemerkung 0.36. *Betrachte den Fall, dass* Ω *abzählbar ist. Wie in Bemerkung 0.33 ausgeführt existiert dann eine abzählbare Familie* $(A_i)_{i \in I}$ *von Atomen der* σ*-Algebra* $\mathcal{A}$. *Wenn* $\nu \ll \mu$*, dann erfüllt die Abbildung*

$$h(\omega) = \sum_{i \in I, \ \mu(A_i) > 0} \frac{\nu(A_i)}{\mu(A_i)} 1_{A_i}(\omega)$$

offenbar Bedingung (ii) aus Satz 0.35, ist also eine Version der Radon-Nikodym-Ableitung von ν *bzgl.* μ.

Auch die Existenz des bedingten Erwartungswertes kann mit dem Satz von Radon-Nikodym bewiesen werden. Sei $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $Y = Y^+ - Y^-$. Man definiere auf der Teil-σ-Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ die Maße

$$\mu^+(A) := E(1_A Y^+) \quad \text{und} \quad \mu^-(A) := E(1_A Y^-), \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Die Differenz der Radon-Nikodym-Ableitungen von μ^+ und μ^- bzgl. des Maßes $P\mid_{\mathcal{G}}$ erfüllt nun die Bedingungen des bedingten Erwartungswertes $E(Y \mid \mathcal{G})$ (beachte dazu, dass für $\mathcal{G}$-messbare Funktionen Z gilt $\int Z \, dP = \int Z \, dP\mid_{\mathcal{G}}$), also

$$E(Y \mid \mathcal{G}) = \frac{d\mu^+}{d(P\mid_{\mathcal{G}})} - \frac{d\mu^-}{d(P\mid_{\mathcal{G}})}.$$

Satz 0.37. *[Eigenschaften der bedingten Erwartung] Seien Y_1, Y_2 und Y Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $E(|Y_1|) < \infty$, $E(|Y_2|) < \infty$, $E(|Y|) < \infty$. Ferner seien $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ und $\mathcal{G}$ Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$. Dann gelten folgende Aussagen*

(i) (Linearität) Für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ist $E[\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \mid \mathcal{G}] = \lambda_1 E[Y_1 \mid \mathcal{G}] + \lambda_2 E[Y_2 \mid \mathcal{G}]$

(ii) Ist Y_1 $\mathcal{G}$-messbar und $E(|Y_1 Y_2|) < \infty$, so ist $E[Y_1 Y_2 \mid \mathcal{G}] = Y_1 E[Y_2 \mid \mathcal{G}]$ und $E[Y_1 \mid \mathcal{G}] = Y_1$.

(iii) (Satz vom iterierten Erwartungswert) Ist $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, so ist

$$E[E[Y \mid \mathcal{G}_2] \mid \mathcal{G}_1] = E[Y \mid \mathcal{G}_1].$$

(iv) (Monotonie) Ist $Y_1 \leq Y_2$, so ist

$$E[Y_1 \mid \mathcal{G}] \leq E[Y_2 \mid \mathcal{G}].$$

(v) (Jensensche Ungleichung) Ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex, so ist $\infty \geq E[\varphi(Y) \mid \mathcal{G}] \geq \varphi(E[Y \mid \mathcal{G}])$

(vi) Sind Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig, dann gilt

$$E[Y_1 \mid Y_2] := E[Y_1 \mid \sigma(Y_2)] = E[Y_1].$$

Beweis. Ad (i): Seien Z_1 und Z_2 Versionen des bedingten Erwartungswertes von Y_1 bzw. Y_2 unter der Information $\mathcal{G}$. Für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ist die Zufallsvariable $\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$ $\mathcal{G}$-messbar und aus der Linearität des absoluten Erwartungswertes folgt

$$\begin{aligned} E\left(1_A(\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2)\right) &= \lambda_1 E\left(1_A Z_1\right) + \lambda_2 E\left(1_A Z_2\right) \\ &= \lambda_1 E\left(1_A Y_1\right) + \lambda_2 E\left(1_A Y_2\right) \\ &= E\left(1_A(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2)\right), \quad \forall A \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Ad (ii): Zunächst soll die Aussage nur für den Fall gezeigt werden, dass Y_1 eine Indikatorfunktion ist, d.h. $Y_1 = 1_B$ für ein $B \in \mathcal{G}$. Sei Z_2 eine Version des bedingten Erwartungswertes von Y_2 unter $\mathcal{G}$. Da $A, B \in \mathcal{G} \implies A \cap B \in \mathcal{G}$, folgt

$$E(1_A Y_1 Z_2) = E(1_{A\cap B} Z_2) = E(1_{A\cap B} Y_2) = E(1_A Y_1 Y_2), \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Außerdem ist $Y_1 Z_2$ $\mathcal{G}$-messbar. Also ist $Y_1 Z_2$ bedingter $\mathcal{G}$-Erwartungswert von $Y_1 Y_2$. Wegen (i) gilt die Aussage auch für sog. Elementarfunktionen $Y_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{B_i}$, $B_i \in \mathcal{G}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Die Aussage für eine beliebige $\mathcal{G}$-messbare *nichtnegative* Zufallsvariable Y_1 mit der Zusatzbedingung, dass auch Y_2 nichtnegativ ist und $E(Y_1 Y_2) < \infty$, folgt mit monotoner Konvergenz unter Beachtung von $Z_2 \geq 0$, indem man Y_1 durch die Folge $Y^{(n)} := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{\left\{\frac{k-1}{2^n} < Y_1 \leq \frac{k}{2^n}\right\}}$, $n \in \mathbb{N}$, approximiert.

Schließlich folgt der Fall ohne Vorzeichenbeschränkungen mit den Zerlegungen $Y_1 = Y_1^+ - Y_1^-$, $Y_2 = Y_2^+ - Y_2^-$ und (i).

Ad (iii): Sei Z_1 eine Version des bedingten Erwartungswertes von Y gegeben die Information $\mathcal{G}_1$ und Z_2 eine Version des bedingten Erwartungswertes von Y gegeben die Information $\mathcal{G}_2$. Es gilt also $E(1_A Z_1) = E(1_A Y)$, $\forall A \in \mathcal{G}_1$ und $E(1_A Z_2) = E(1_A Y)$, $\forall A \in \mathcal{G}_2$. Wegen $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ folgt $E(1_A Z_1) = E(1_A Z_2)$, $\forall A \in \mathcal{G}_1$. Da Z_1 $\mathcal{G}_1$-messbar ist, ist Z_1 eine Version des bedingten Erwartungswertes von Z_2 gegeben die Information $\mathcal{G}_1$. Insbesondere ist der Ausdruck $E[E[Y \mid \mathcal{G}_2] \mid \mathcal{G}_1]$ wohldefiniert, d.h. der bedingte $\mathcal{G}_1$-Erwartungswert hängt nicht von der Version des bedingten $\mathcal{G}_2$-Erwartungswertes ab – bis auf die nicht vermeidbare Unbestimmtheit auf einer $\mathcal{G}_1$-messbaren P-Nullmenge (man beachte, dass die Versionen Z_1 und Z_2 unabhängig voneinander variiert werden können, folglich kann $E(Z_2 \mid \mathcal{G}_1)$, das P-f.s. mit Z_1 übereinstimmt, nicht von der Wahl von Z_2 abhängen).

Ad (iv): Es gilt $E(1_A Z_1) = E(1_A Y_1) \leq E(1_A Y_2) = E(1_A Z_2)$, $\forall A \in \mathcal{G}$. Setzte $A := \{Z_1 > Z_2\} \in \mathcal{G}$. Es folgt $P(Z_1 \leq Z_2) = 1$.

Ad (v): Der Beweis wird hier nur für den Fall geführt, dass φ differenzierbar ist. Aus der Konvexität von φ folgt

$$\varphi(Y) \geq \varphi(E(Y \mid \mathcal{G})) + \varphi'(E(Y \mid \mathcal{G}))(Y - E(Y \mid \mathcal{G})), \quad P-\text{fast sicher.}$$

und damit

$$\begin{aligned} E[\varphi(Y) \mid \mathcal{G}] &\geq \varphi(E(Y \mid \mathcal{G})) + E[\varphi'(E(Y \mid \mathcal{G}))(Y - E(Y \mid \mathcal{G})) \mid \mathcal{G}] \\ &= \varphi(E(Y \mid \mathcal{G})) + \varphi'(E(Y \mid \mathcal{G}))\underbrace{E[Y - E(Y \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}]}_{=0} \\ &= \varphi(E(Y \mid \mathcal{G})), \quad P-\text{fast sicher.} \end{aligned}$$

□

Ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zusammen mit einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$. In dieser Vorlesung ist die Zeit diskret, d.h. $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, T\}$. $\mathbb{F}$ ist eine Familie von Teil-σ-Algebren mit

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$$

Interpretation: $\mathbb{F}$ beschreibt den Informationsverlauf. $\mathcal{F}_t$ steht für die Information, die wir zum Zeitpunkt t haben. $A \in \mathcal{F}_t$ bedeutet, dass zum Zeitpunkt t bekannt ist, ob das Ereignis A eingetreten ist oder nicht (d.h. es ist bekannt, ob $\omega \in A$ oder $\omega \notin A$). Wir setzen voraus, dass $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ("triviale σ-Algebra", keine Information) und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Beispiel 0.38 (T-facher Münzwurf)**.** *Der Grundraum ist das T-fache kartesische Produkt*

$$\Omega = \{0,1\}^T = \underbrace{\{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{T\text{-mal}} = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T) \mid \omega_1, \dots, \omega_T \in \{0,1\}\}$$

und $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Zum Zeitpunkt t sind die Ausgänge der ersten t Münzwürfe bekannt, die der letzten $T - t$ aber noch nicht. Diese Information wird durch die σ-Algebra

$$\mathcal{F}_t = 2^{\left(\{0,1\}^t\right)} \times \{0,1\}^{T-t} := \{A \in 2^\Omega \mid A = A_1 \times \{0,1\}^{T-t} \text{ für ein } A_1 \in 2^{\left(\{0,1\}^t\right)}\}$$

modelliert ($2^{\left(\{0,1\}^t\right)}$ symbolisiert die Potenzmenge der Menge $\{0,1\}^t$).
Für $T = 2$ und $t = 1$ bedeutet dies

$$\mathcal{F}_1 = \{ \underbrace{\emptyset}_{=\emptyset \times \{0,1\}}, \underbrace{\{(0,0),(0,1)\}}_{=\{0\} \times \{0,1\}}, \underbrace{\{(1,0),(1,1)\}}_{=\{1\} \times \{0,1\}}, \underbrace{\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}}_{=\{0,1\} \times \{0,1\}} \}.$$

1 Modellierung arbitragefreier Finanzmärkte

Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,\dots,T\}}, P)$, wobei $T \in \mathbb{N}$. Eine Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,\dots,T\}}$ ist eine Folge von σ-Algebren mit $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für $s \le t$. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ steht für die Information, die zum Zeitpunkt t vorhanden ist: $A \in \mathcal{F}_t$ bedeutet, dass wir zum Zeitpunkt t wissen, ob das Ereignis A eingetreten ist oder nicht.

Eine *Stoppzeit* ist eine Abbildung $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, T\}$ mit $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t = 0, 1, \dots, T$. Anschaulich entspricht τ einer Stoppentscheidung, in die immer nur die jeweils zur Verfügung stehende Information einfließt.

Proposition 1.1. *Eine Abbildung $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, T\}$ ist genau dann eine Stoppzeit, wenn $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t = 0, 1, \dots, T$.*

Beweis. Sei τ eine Stoppzeit. Es gilt $\{\tau = t\} = \{\tau \le t\} \setminus \{\tau \le t - 1\}$. Da $\{\tau \le t\}$ und $\{\tau \le t - 1\}$ beide aus $\mathcal{F}_t$ sind, folgt $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$.

Erfülle τ die Bedingung aus Proposition 1.1. Es gilt $\{\tau \le t\} = \bigcup_{s=0}^{t} \underbrace{\{\tau = s\}}_{\in\mathcal{F}_s}$. Da $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ für $s \le t$, folgt $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$, also ist τ eine Stoppzeit. □

Ein *stochastischer Prozess* ist eine Abbildung $X : \Omega \times \{0, \dots, T\} \to \mathbb{R}^d$. Mit X_t bezeichnen wir die t-Schnitte der Abbildung X, d.h. $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d,\ \omega \mapsto X(\omega, t)$. Ein stochastischer Prozess lässt sich somit auch mit der Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t=0,1,\dots,T}$ identifizieren.

In diskreten Modellen benutzen wir die Notation $t- := t - 1$. Ferner sei $\Delta X_t := X_t - X_{t-} = X_t - X_{t-1}$. X_- und ΔX bezeichnen somit die stochastischen Prozesse $(X_{t-1})_{t=0,1,\dots,T}$ bzw. $(X_t - X_{t-1})_{t=0,1,\dots,T}$. Wird auf diese Prozesse zurückgegriffen, so interessiert der Wert für $t = 0$ nicht, so dass wir X_{-1} beliebig wählen können[†].

[†]Diese Notation vereinfacht die Darstellung und berücksichtigt, dass sich zeitdiskrete Prozesse als spezielle zeitstetige Prozesse mit càdlàg (rechtsstetig mit existierenden linken Limiten) Pfaden interpretieren lassen, die nur bei den Gitterpunkten $\{1, \dots, T\}$ ihren Wert verändern und dazwischen konstant sind. Definiere dazu den Prozess: $\widetilde{X} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ mit $\widetilde{X}_t(\omega) := X_{[t]}(\omega)$, wobei $[t] := \max\{s \in \mathbb{N}_0 \mid s \le t\}$. Für $t \in \{1, \dots, T\}$ gilt $\lim_{s\uparrow t,\ s<t} \widetilde{X}_s = \widetilde{X}_{t-1}$. Der Limes der Funktionswerte links von einem Gitterpunkt ist also der Funktionswert am vorherigen Gitterpunkt. *Wenn wir in einer späteren Vorlesung zum "allgemeinen zeitstetigen Fall" übergehen, müssen die Notationen also nicht mehr geändert werden.* Viele

Definition 1.2. *(i) Ein Prozess X heißt* adaptiert*, wenn X_t für alle $t \in \{0, \dots, T\}$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist.*

(ii) Ein Prozess X heißt vorhersehbar*, wenn X_t für alle $t \in \{0, \dots, T\}$ $\mathcal{F}_{t-}$-messbar ist, d.h. der Wert von X_t ist schon in $t-1$ bekannt ($\mathcal{F}_{-1} := \{\emptyset, \Omega\}$).*

Bemerkung 1.3. *Im Sprachgebrauch der Stochastiker sind stochastische Prozesse zumeist automatisch adaptiert. Adaptiertheit ist dann die Minimalanforderung an einen Prozess. Trotzdem werden auch nicht-adaptierte Prozesse untersucht – insbesondere in Modellen mit verschiedenen Filtrierungen (größere Filtrierung, die den Informationsverlauf eines Insiders modelliert, kleinere Filtrierung der Allgemeinheit).*

Die Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots,T}$ heißt von X erzeugt, wenn $\mathcal{F}_t = \sigma(X_0, \dots, X_t)$

Ein adaptierter stochastischer Prozess X mit $E(|X_t|) < \infty$ ist ein Martingal, wenn

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s, \quad P-\text{f.s.}, \quad \text{für } s \le t. \tag{1.12}$$

(1.12) besagt, dass für alle $s \le t$ X_s eine Version des bedingten Erwartungswertes von X_t unter der Information $\mathcal{F}_s$ sein muss, also

$$E\left(1_A X_s\right) = E\left(1_A X_t\right), \quad \forall s \le t,\ A \in \mathcal{F}_s. \tag{1.13}$$

Wenn gezeigt werden soll, dass ein Prozess X ein Martingal ist, ist also (1.13) nachzuweisen.

Ein adaptierter stochastischer Prozess X mit $E(|X_t|) < \infty$ ist ein Supermartingal, wenn

$$E\left(1_A X_s\right) \ge E\left(1_A X_t\right), \quad \forall s \le t,\ A \in \mathcal{F}_s$$

(d.h. $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \le X_s$ P-f.s. für alle $s \le t$). Ein adaptierter stochastischer Prozess X mit $E(|X_t|) < \infty$ ist ein Submartingal, wenn

$$E\left(1_A X_s\right) \le E\left(1_A X_t\right), \quad \forall s \le t,\ A \in \mathcal{F}_s$$

(d.h. $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \ge X_s$ P-f.s. für alle $s \le t$).

Resultate gelten auch für echt zeitstetige Prozesse und die Formeln sehen dann genauso aus.

Definition 1.4. *Sei X ein diskreter adaptierter Prozess und H ein diskreter vorhersehbarer Prozess (für die Definition in diskreter Zeit würde adaptiert ausreichen). X und H sollen die gleiche Dimension haben, also $X = (X^1, \dots, X^d)$ und $H = (H^1, \dots, H^d)$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Unter dem* stochastischen Integral *von H nach X verstehen wir den folgendermaßen definierten reellwertigen Prozess $H \bullet X$,*

$$H \bullet X_t := \int_0^t H_s \, dX_s := \sum_{s=1}^{t} H_s^\top \Delta X_s = \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=1}^{d} H_s^i \Delta X_s^i,$$

wobei $\sum_{s=1}^{0} := 0$. Den Prozess H bezeichnen wir als Integranden und den Prozess X als Integrator. (Man beachte, dass H_0 nicht in das Integral eingeht)

In der Finanzmathematik spielen stochastische Integrale eine wichtige Rolle. Man kann sie nämlich als Gewinn einer Handelsstrategie interpretieren. Betrachte dafür einen Markt mit $d+1$ Wertpapieren, deren *Preisprozess* durch den adaptierten stochastischen Prozess $S = (S^0, \dots, S^d)$ modelliert werden soll. S_t^i bezeichne also den Preis von Wertpapier i zum Zeitpunkt t. Wir nehmen an, dass $S > 0$, P-f.s. Eine *Handelsstrategie* $\varphi = (\varphi^0, \dots, \varphi^d)$ wird als $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger *vorhersehbarer* Prozess modelliert. φ_t^i steht für die Anzahl der Wertpapiere i, die in der Handelsperiode zwischen $t-1$ und t in unserem Portfolio sind. φ_t^i ist also die Investition in den Sprung ΔS_t^i. Wenn der Investor keine prophetische Gaben besitzen soll, sollte man annehmen, dass bei der Entscheidung über φ_t^i die zufällige Komponente des Kurssprungs ΔS_t^i (bzw. die Information über S_t^i) noch nicht antizipiert werden kann. Wir nehmen also an, dass die Zufallsvariable φ_t^i $\mathcal{F}_{t-1}(= \mathcal{F}_{t-})$-messbar sein muss.

Macht das Wertpapier i zum Zeitpunkt t den Sprung ΔS_t^i, so resultiert hieraus, dass sich der Wert des Portfolios um den Betrag $\varphi_t^i \Delta S_t^i$ verändert. Damit korrespondiert der Wert des Portfolio mit einem stochastischen Integral, d.h. $v_0 + \varphi \bullet S_t$ (v_0 Startkapital).

Bevor wir wieder zu den Handelsstrategien kommen, noch ein paar Definitionen und einfache Rechenregeln:

Proposition 1.5. *Seien X, Y reellwertige adaptierte und H, K reellwertige vorhersehbare Prozesse. Dann gilt:*

(i) $H \bullet (K \bullet X) = (HK) \bullet X$

(ii) Partielle Integration $XY = X_0Y_0 + X_- \bullet Y + Y \bullet X = X_0Y_0 + X \bullet Y + Y_- \bullet X$

(iii) Wenn X *ein Martingal und* H *beschränkt ist, dann ist der Prozess* $H \bullet X$ *ein Martingal.*

Beweis. (i) $H \bullet (K \bullet X)_t = \sum_{s=1}^t H_s \Delta(K \bullet X)_s = \sum_{s=1}^t H_s K_s \Delta X_s = (HK) \bullet X_t$

(ii)

$$\begin{aligned} X_tY_t &= X_0Y_0 + \sum_{s=1}^t (X_sY_s - X_{s-1}Y_{s-1}) \\ &= X_0Y_0 + \sum_{s=1}^t (X_{s-1}(Y_s - Y_{s-1}) + Y_s(X_s - X_{s-1})) \\ &= X_0Y_0 + X_- \bullet Y_t + Y \bullet X_t \end{aligned}$$

(iii) Zu zeigen ist, dass $H \bullet X$ adaptiert und integrierbar ist und dass gilt $E(H \bullet X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = H \bullet X_{t-1}$. Adaptiertheit ist klar, da $H \bullet X_t$ nur von $\mathcal{F}_t$-messbaren Zufallsvariablen abhängt. Sei $|H_s| \leq m$ für ein $m \in \mathbb{R}$ und alle $s = 1, \dots, t$. Wegen $|H \bullet X_t| \leq m \sum_{s=1}^t |\Delta X_s| \leq 2m \sum_{s=0}^t |X_s|$ ist $H \bullet X_t$ integrierbar. Für alle $t \in \{1, \dots, T\}$ gilt

$$\begin{aligned} E(H \bullet X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) &= E(\sum_{s=1}^t H_s \Delta X_s \mid \mathcal{F}_{t-1}) \\ &\overset{\text{Satz 0.37 (i) \& (ii)}}{=} \sum_{s=1}^{t-1} H_s \Delta X_s + H_t E(\Delta X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= H \bullet X_{t-1} + 0. \end{aligned}$$

□

Satz 1.6. *[Doob-Zerlegung] Sei* $X = (X_t)_{t=0,1,\dots,T}$ *ein adaptierter stochastischer Prozess mit* $E(|X_t|) < \infty$ *für* $t = 0, 1, \dots, T$*. Dann lässt sich* X *in folgender Weise zerlegen:*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

wobei $M_0 = A_0 = 0$*,* M *ein Martingal ist und* A *ein vorhersehbarer stochastischer Prozess. Diese Zerlegung ist* P*-f.s. eindeutig.*

A lässt sich als Drift-Komponente des Prozesses interpretieren und M sind die aufaddierten (unsystematischen) Schwankungen um diesen Trend.

Beweis. Für $t \geq 1$ setze $A_t := \sum_{s=1}^{t} E(\Delta X_s \mid \mathcal{F}_{s-1})$ und $M_t := \sum_{s=1}^{t} (\Delta X_s - E(\Delta X_s \mid \mathcal{F}_{s-1}))$. Offenbar ist A_t $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar und $E(\Delta M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Damit ist die Existenz bewiesen. Nehmen nun an, es gäbe eine weitere solche Zerlegung $X_t = X_0 + \widetilde{M}_t + \widetilde{A}_t$,, wobei $\widetilde{M}_0 = \widetilde{A}_0 = 0$, $\widetilde{M}$ ein Martingal ist und $\widetilde{A}$ ein vorhersehbarer stochastischer Prozess. Für den oben definierten Prozess A gilt

$$A_t = \sum_{s=1}^{t} E(\Delta X_s \mid \mathcal{F}_{s-1}) = \sum_{s=1}^{t} E(\Delta(\widetilde{M} + \widetilde{A})_s \mid \mathcal{F}_{s-1}) = \sum_{s=1}^{t} \Delta \widetilde{A}_s = \widetilde{A}_t.$$

Damit gilt Eindeutigkeit. □

Korollar 1.7. *Ein vorhersehbares Martingal $M = (M_t)_{t=0,1,\dots,T}$ ist (in der Zeit) konstant, d.h. $P(M_t = M_0,\ \forall t = 1, \dots, T) = 1$.*

Beweis. Folgt sofort aus der Eindeutigkeit der Doob-Zerlegung. □

Ein Portfolio heißt *selbstfinanzierend*, wenn die Veränderung seines Wertes

$$V := V(\varphi) := \varphi^\top S = \sum_{i=0}^{d} \varphi^i S^i$$

(ausschließlich) aus den Preisveränderungen der enthaltenen Wertpapiere resultiert. Es gibt also keine externe Kapitalentnahme oder -zuführung. Alle Umschichtungen im Portfolio müssen kostenneutral erfolgen. Dies lässt sich mathematisch durch folgende Definition ausdrücken.

Definition 1.8. *Eine Handelsstrategie $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ heißt* selbstfinanzierend, *wenn für alle $t \in \{1, \dots, T\}$ gilt $(\Delta\varphi_t)^\top S_{t-1} = \sum_{i=0}^{d} \Delta\varphi_t^i S_{t-1}^i = 0$.*

Man beachte, dass das gesamte Vermögen immer in Wertpapieren angelegt ist. Es gibt also **keine Kassenhaltung**. Diese Annahme macht Sinn, wenn man davon ausgeht, dass es jederzeit einen „risikolosen" Zins gibt, der für eine Periode garantiert wird und der nicht negativ ist (z.B. Tagesgeldkonto, sofern das Ausfallrisiko der Bank vernachlässigt werden kann).

Proposition 1.9. *Eine Handelsstrategie φ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn $V_t := \varphi_t^\top S_t = \varphi_0^\top S_0 + \varphi \bullet S_t$ für alle $t = 0, \dots, T$.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
& (\varphi_t - \varphi_{t-1})^\top S_{t-1} = 0 \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \varphi_t^\top S_t - \varphi_{t-1}^\top S_{t-1} = \varphi_t^\top S_t - \varphi_t^\top S_{t-1} \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \Delta(\varphi^\top S)_t = \Delta(\varphi \bullet S)_t \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \varphi_t^\top S_t = \varphi_0^\top S_0 + \varphi \bullet S_t \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

□

Im Folgenden setzen wir stets voraus, dass $\mathbf{S^0} > \mathbf{0}$ (d.h. das nullte Wertpapier nimmt nur Werte in $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ an).

Definition 1.10. $\widehat{S} := \frac{1}{S^0} S = (1, \frac{S^1}{S^0}, \dots, \frac{S^d}{S^0})$ *heißt* diskontierter *Preisprozess.* $\widehat{V} := \varphi^\top \widehat{S}$ *bezeichne den zu der Handesstrategie* φ *gehörigen* diskontierten *Wertprozess.*

Den Prozess S^0 *nennt man dann das Numéraire.*

Proposition 1.11. *Eine Handelsstrategie* φ *ist genau dann selbstfinanzierend, wenn*

$$\widehat{V}_t = \widehat{V}_0 + \varphi \bullet \widehat{S}_t \tag{1.14}$$

Man beachte, dass $\varphi \bullet \widehat{S}_t$ *nicht von* φ^0 *abhängt, da* $\Delta \widehat{S}^0 = 0$.

Die Proposition besagt, dass die Selbstfinanzierungseigenschaft einer Strategie φ nicht davon abhängt, ob wir alle Wertgrößen als Vielfachheiten der Eins oder als Vielfachheiten des Numéraires S^0 verrechnen.

Beweis. Da $\varphi_t^\top S_{t-1} - \varphi_{t-1}^\top S_{t-1} = 0$ genau dann wenn $\varphi_t^\top \widehat{S}_{t-1} - \varphi_{t-1}^\top \widehat{S}_{t-1} = 0$, geht der Beweis analog zu Proposition 1.9:

$$\begin{aligned}
& \varphi_t^\top S_{t-1} - \varphi_{t-1}^\top S_{t-1} = 0 \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \varphi_t^\top \widehat{S}_{t-1} - \varphi_{t-1}^\top \widehat{S}_{t-1} = 0 \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \varphi_t^\top \widehat{S}_t - \varphi_t^\top \widehat{S}_{t-1} = \varphi_t^\top \widehat{S}_t - \varphi_{t-1}^\top \widehat{S}_{t-1} \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \Delta(\varphi \bullet \widehat{S})_t = \Delta(\varphi_t^\top \widehat{S}_t) \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \\
\Leftrightarrow\ & \varphi_0^\top \widehat{S}_0 + \varphi_t \bullet \widehat{S}_t = \varphi_t^\top \widehat{S}_t \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

□

Satz 1.12. *Für jeden vorhersehbaren Prozess* $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ *und Startkapital* v_0 *existiert ein eindeutiger vorhersehbarer Prozess* φ^0*, so dass* $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ *selbstfinanzierend ist mit* $\varphi_0^\top S_0 = v_0$*.*

Beweis. Wähle $\varphi_0^0 = \widehat{v}_0 - \sum_{i=1}^d \varphi_0^i \widehat{S}_0^i$, wobei $\widehat{v}_0 := \frac{v_0}{S_0^0}$. Also $\widehat{V}_0 = \widehat{v}_0$. Da $\widehat{S}^0 = 1$, ist (1.14) äquivalent zu

$$\varphi_t^0 = \widehat{V}_0 + (\varphi^1, \dots, \varphi^d) \bullet (\widehat{S}^1, \dots, \widehat{S}^d)_t - (\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d)^\top (\widehat{S}_t^1, \dots, \widehat{S}_t^d), \quad t = 1, \dots, T \tag{1.15}$$

und da $\Delta(H \bullet X)_t = H_t^\top \Delta X_t$ ist (1.15) äquivalent zu

$$\varphi_t^0 = \widehat{V}_0 + (\varphi^1, \dots, \varphi^d) \bullet (\widehat{S}^1, \dots, \widehat{S}^d)_{t-1} - (\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d)^\top (\widehat{S}_{t-1}^1, \dots, \widehat{S}_{t-1}^d), \ t = 1, \dots, T \tag{1.16}$$

Die rechte Seite von (1.16) ist aber offenbar ein vorhersehbarer Prozess und φ^0 kommt dort nicht vor. □

Bemerkung 1.13. *Nun tritt der Vorteil der Arbeit mit diskontierten Größen zutage. Bei vorgegebenem* $\widehat{v}_0$ *(bzw. vorgegebenem* $v_0 = \widehat{v}_0 S_0^0$*) können die Komponenten* φ^i*,* $i = 1, \dots, d$*, frei voneinander gewählt werden.* φ^0 *ist dann der eindeutige vorhersehbare Prozess aus Satz 1.12, der* $\varphi := (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ *selbstfinanzierend macht und* $\varphi_0^\top S_0 = v_0$ *gewährleistet. Wegen* $\Delta \widehat{S}^0 = 0$ *geht (gegeben* $\widehat{v}_0$*) der Prozess* φ^0 *nicht in den diskontierten Vermögensprozess* $\widehat{v}_0 + \varphi \bullet \widehat{S} = \widehat{v}_0 + (\varphi^1, \dots, \varphi^d) \bullet (\widehat{S}^1, \dots, \widehat{S}^d)$ *ein. Die Nebenbedingung, dass eine Strategie selbstfinanzierend sein sollte, taucht dann nicht mehr auf.*

Ökonomisch bedeutet dies, dass nach Spezifizierung der Investments in die Wertpapiere S^1 bis S^d der verbleibende Rest des Vermögens (stillschweigend) in das "risikolose" Numéraire $\widehat{S}^0$ investiert wird.

Wichtig ist hierbei, dass das Numéraire ein *handelbares* Wertpapier ist. (Dies war für die beiden vorangegangenen Propositionen von keinerlei Bedeutung. Dort hätte man auch statt mit S^0 mit einem beliebigen positiven Prozess diskontieren können). Handelbarkeit eines Wertpapiers bedeutet, dass man in ihm sowohl long als auch short gehen kann. "Short gehen" bedeutet dabei ökonomisch, dass man zum Zeitpunkt 0 den Betrag S_0^0 bekommt und dafür zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ den Betrag S_t^0 zurückzahlen muss. Die fälligen Zinszahlungen spiegeln sich in dem Anstieg des Prozesses S^0 wider. S^0

könnte den Wert eines Bankkontos in EUR darstellen, im einfachsten Fall $S_t^0 = s_0(1+r)^t$, $r \in \mathbb{R}_+$.

In der Praxis lassen sich *Leerverkäufe* realisieren, indem man sich das Wertpapier leiht und es (anstatt es sicher aufzubewahren) an einen Dritten weiterverkauft. Dies bringt zunächst den Erlös S_0^i ein. Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ ist man jedoch verpflichtet, die gleiche Aktie zum neuen Preis S_t^i wieder zu erwerben, um den Gläubiger zu befriedigen.

Es wird natürlich vorausgesetzt, dass **Sollzins und Habenzins übereinstimmen**. Ist dies nicht der Fall, kann man das nicht mehr so einfach modellieren.

Häufig wird von vorne herein mit diskontierten Größen gearbeitet, bzw. angenommen, dass "o.B.d.A." $S_t^0 = 1$ für alle t.

Definition 1.14. *Eine selbstfinanzierende Strategie φ (vorhersehbarer Prozess) heißt eine* Arbitragemöglichkeit*, wenn für den dazugehörigen Vermögensprozess $V = \varphi^\top S = V_0 + \varphi \bullet S$ gilt*

$$V_0 = 0,\ P(V_T \geq 0) = 1 \text{ und } P(V_T > 0) > 0.$$

Ein Marktmodell heißt arbitragefrei, wenn es keine Arbitragemöglichkeit gibt.

Bemerkung 1.15 (Leerverkäufe)**.** *Bei einer Arbitrage im Sinne von Definition 1.14 wird φ i.d.R. in einzelnen Komponenten negative Werte annehmen. Bei positiven Preisen setzt nämlich der Erwerb eines Wertpapieres ohne Startkapital die Verschuldung in einem anderen Wertpapier voraus. Allerdings erscheint Arbitragefreiheit im Sinne von Definition 1.14 auch in Märkten, in denen* **Leerverkäufe verboten** *sind, eine sinnvolle Voraussetzung zu sein. Nehme an, φ sei eine Arbitrage im Sinne von Definition 1.14, d.h.*

$$P(\varphi \bullet S_T \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad P(\varphi \bullet S_T > 0) > 0.$$

Zerlegt man φ (komponentenweise) in seinen Positiv- und seinen Negativanteil, d.h. $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ und $\varphi^+, \varphi^- \geq 0$, dann gilt wegen der Linearität des (diskreten) stochastischen Integrals

$$P(\varphi^+ \bullet S_T \geq \varphi^- \bullet S_T) = 1 \quad \text{und} \quad P(\varphi^+ \bullet S_T > \varphi^- \bullet S_T) > 0.$$

Die Strategien φ^+ und φ^- kommen ohne Leerverkäufe aus. Die Strategie φ^+ erzielt offenbar in allen Zuständen einen höheren Handelsgewinn als die Strategie φ^-. Folglich würde die Strategie φ^- weniger realisiert werden, was zu einem Rückgang der Preise der dort nachgefragten Wertpapiere führen würde bis die Arbitrage wieder verschwindet[‡]. *Allerdings wäre ohne eine Verhaltensänderung der Investoren von φ^- eine Anpassung nicht sichergestellt, da deren Kaufentscheidung nicht durch Shortpositionen anderer neutralisiert werden könnte.*

Bemerkung 1.16. *In diskreten Modellen reicht es, wenn wir für eine Arbitragestrategie $V_T \geq 0$ fordern. Wir müssen nicht noch verlangen, dass $V_t \geq 0$, für alle $t \in \{0, \dots, T\}$ (oder wenigsten $V_t \geq -a$, $a \in \mathbb{R}_+$ (endlicher Kreditrahmen)). Wir werden nämlich später sehen (vgl. Proposition 1.21), dass, wenn in einem Markt eine Arbitragemöglichkeit im Sinne von Definition 1.14 existiert (d.h. risikolose Gewinnmöglichkeit, wenn während der Laufzeit unbegrenzter Kredit gewährt werden kann), auch eine Arbitragestrategie existiert, deren Wertprozess $\widetilde{V}_t \geq 0$, für alle $t \in \{0, \dots, T\}$ erfüllt (kein Kredit erforderlich). In zeitstetigen Modellen ist die Definition von Arbitragefreiheit jedoch etwas komplizierter.*

Definition 1.17. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q heißt äquivalentes Martingalmaß, wenn $Q \sim P$ (d.h. P und Q haben dieselben Nullmengen, $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0\ \forall A \in \mathcal{F}$) und alle diskontierten Preisprozesse $\widehat{S}^i$, $i = 0, \dots, d$ unter dem Maß Q Martingale sind, d.h. für $s \leq t$ gilt*

$$E_Q(\widehat{S}^i_t \mid \mathcal{F}_s) = \widehat{S}^i_s.$$

Die Menge der äquivalenten Martingalmaße bezeichnen wir mit $\mathcal{M}^e(\widehat{S})$.

Satz 1.18 (1. Fundamentalsatz der Arbitragetheorie)**.** *Ein Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein äquivalentes Martingalmaß gibt, d.h. ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ unter dem die diskontierten Wertpapierpreisprozesse $\widehat{S}^i$ Martingale sind.*

Lemma 1.19. *Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex mit $0 \notin C$*[§]*. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^n$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ mit $\lambda^\top x \geq \alpha$ für alle $x \in C$. Insbesondere gilt $\{x \in$*

[‡]Man beachte, dass $\Big\{(\omega, t) \mid \big(\varphi^i_t(\omega)\big)^+ > 0\Big\} \cap \Big\{(\omega, t) \mid \big(\varphi^i_t(\omega)\big)^- > 0\Big\} = \emptyset$, $i = 0, 1, \dots, d$. D.h. kein Wertpapier wird *gleichzeitig* von φ^+ und φ^- nachgefragt.

[§]Zur Erinnerung: C konvex heißt, dass für alle $x, y \in C$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt $\lambda x + (1 - \lambda) y \in C$.

$\mathbb{R}^n \mid \lambda^\top x = 0\} \cap C = \emptyset$.

Beweis. Sei $r > 0$ eine nichtnegative reelle Zahl, so dass die Kugel $B(0,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y|| \leq r\}$ mit Mittelpunkt 0 und Radius r einen nichtleeren Schnitt mit C besitzt (wobei $||\cdot||$ die euklidische Norm bezeichne, d.h. $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$). Sei x_0 der Punkt an dem die Abbildung $x \mapsto ||x||$ auf der kompakten Menge $C \cap B(0,r)$ ihr Minimum annimmt. Es folgt, dass

$$||x|| \geq ||x_0||, \quad \forall x \in C. \tag{1.17}$$

x_0 ist gerade die Projektion des Ursprungs auf die konvexe Menge C. Für jedes $x \in C$ und $t \in [0,1]$ gilt wegen der Konvexität von C, dass $x_0 + t(x - x_0) \in C$ und damit wegen (1.17)

$$(x_0 + t(x - x_0))^\top (x_0 + t(x - x_0)) \geq x_0^\top x_0$$

also

$$2t(x - x_0)^\top x_0 + t^2 (x - x_0)^\top (x - x_0) \geq 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Schaut man sich die Entwicklung für $t \to 0$ an, so folgt daraus $(x - x_0)^\top x_0 \geq 0$ also

$$x^\top x_0 \geq x_0^\top x_0 =: \alpha \quad \forall x \in C$$

(Beachte, dass wegen $0 \notin C$ x_0 nicht der Nullvektor ist und damit $x_0^\top x_0 > 0$ gilt) □

Lemma 1.20. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Vektorraum, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, $U \cap K = \emptyset$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^\top x = 0$ für alle $x \in U$ und $\lambda^\top x > 0$ für alle $x \in K$.*

Beweis. Vektorräume sind per Definition nichtleer. Der Fall $K = \emptyset$ ist offensichtlich. Also o.B.d.A. $K \neq \emptyset$.

Die Menge

$$C := K - U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (y,z) \in K \times U, \ x = y - z\}$$

ist konvex (da K und U konvex) und abgeschlossen (da K kompakt und U abgeschlossen)[¶] mit $0 \notin K$. Mit Lemma 1.19 folgt die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{R}^n$ und eines $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ mit $\lambda^\top x \geq \alpha,\ \forall x \in C$ also

$$\lambda^\top y - \lambda^\top z \geq \alpha,\ \forall y \in K,\ z \in U. \tag{1.18}$$

Hält man ein beliebiges y fest und wendet (1.18) für jedes z auf alle seine Vielfachen an, so folgt wegen Homogenität, dass $\lambda^\top z = 0,\ \forall z \in U$. Dann folgt $\lambda^\top y \geq \alpha,\ \forall y \in K$. □

Wir werden Theorem 1.18 hier nur für $|\Omega| < \infty$ beweisen. Das Resultat wird aber auch für $|\Omega| = \infty$ benutzt werden. Der allgemeine Beweis ist einiges aufwendiger und kann zum Beispiel in Kapitel 5 von Irle [9] oder Föllmer/Schied [5], Theorem 5.17 nachgelesen werden.

Beweis von Theorem 1.18 für $|\Omega| < \infty$. $\Leftarrow$: Sei Q ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß (d.h. alle $\widehat{S}^i$, $i = 0, \dots, d$ sind Q-Martingale) und sei φ eine selbstfinanzierende Strategie mit $V_0 = 0$ und $V_T \geq 0$. Dann ist $\varphi \bullet \widehat{S}_T = \widehat{V}_T \geq 0$. Nach Proposition 1.5(iii) ist $\varphi \bullet \widehat{S}$ aber ein Q-Martingal, also gilt $E_Q(\varphi \bullet \widehat{S}_T) = 0$ und wegen Nichtnegativität $Q(\varphi \bullet \widehat{S}_T \neq 0) = 0$. Da Q zu P äquivalent ist, gilt $\varphi \bullet \widehat{S}_T = 0$, P-f.s.

$\Rightarrow$: Dies ist die interessante Richtung. Die Idee besteht darin, die Menge der realisierbaren Endvermögen zum Startkapital 0 (eine Menge von Zufallsvariablen) von einer "gewissen Menge" nichtnegativer Auszahlungen durch ein lineares Funktional zu trennen. Wenn es keine Arbitragemöglichkeit gibt, sind diese beiden Mengen nämlich disjunkt. Vermöge des linearen Funktionals lässt sich dann ein Martingalmaß konstruieren.

1) Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\mathcal{F}$ die Potenzmenge von Ω ist, also $\{\omega\} \in \mathcal{F}$, für alle $\omega \in \Omega$. Andernfalls könnte man zum Grundraum $\Omega' := \{A \in \mathcal{F} \mid A \neq$

[¶]Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ mit Darstellung $x_n = y_n - z_n$ und $x_n \to x$, $n \to \infty$, für ein $x \in \mathbb{R}^n$. Zu zeigen: $x \in C$. Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_{n_k} \to y$, $k \to \infty$, für ein $y \in K$. Es folgt $z_{n_k} \to y - x$, $k \to \infty$ und damit $y - x \in U$ wegen der Abgeschlossenheit von U. Wegen $x = y - (y - x)$ folgt $x \in C$.

C müsste offenbar nicht abgeschlossen sein, wenn K nur abgeschlossen aber nicht kompakt wäre. Beispiel: $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 1/x\}$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$. K und U sind beide abgeschlossen, aber $K - U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ ist es nicht.

$\emptyset$ und A ist Atom der σ-Algebra $\mathcal{F}\}$ übergehen (eine Menge $A \in \mathcal{F}$ ist ein Atom der σ-Algebra $\mathcal{F}$, wenn für alle $B \in \mathcal{F}$ gilt, dass $A \cap B = A$ oder $A \cap B = \emptyset$). Man würde also eine Gruppe von ω, die sich durch die σ-Algebra $\mathcal{F}$ nicht voneinander trennen lassen, mit einem neuen Element identifizieren. Die σ-Algebra $\mathcal{F}'$ auf Ω' wäre dann einfach die Potenzmenge $2^{\Omega'}$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $2^{\Omega'}$ wäre gegeben durch $P'(A) := \sum_{B \in A} P(B)$. Da Erzeugermengen der σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ Vereinigungen von Atomen von $\mathcal{F}$ sind, kann die σ-Algebra $\mathcal{F}'_t$ auf Ω' wie folgt gebildet werden: ist $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ eine Erzeugermenge von $\mathcal{F}_t$, dann ist $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ eine Erzeugermenge von $\mathcal{F}'_t$.

2) Weiter kann man o.B.d.A. annehmen, dass $P(\{\omega\}) > 0$, für alle $\omega \in \Omega$. Andernfalls gehe man zu einem neuen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', P', \mathcal{F}', (\mathcal{F}')_{t=0,\ldots,T})$ über, der dies erfüllt: setze dazu einfach $\Omega' := \{\omega \in \Omega \mid P(\{\omega\}) > 0\}$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap \Omega'$ bzw. $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_t \cap \Omega'$ (Spur-σ-Algebren) und $P' := P \mid_{\mathcal{F}'}$. Beide Aussagen im Satz sind invariant unter dieser Veränderung.

Setze $U := \{\varphi \bullet \widehat{S}_T \mid \varphi \text{ ein vorhersehbarer Prozess}\} \subset \mathbb{R}^\Omega$ und

$$K := \left\{ \sum_{\omega_0 \in \Omega} \mu_{\omega_0} 1_{\{\omega_0\}} \;\middle|\; \mu_{\omega_0} \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{\omega_0 \in \Omega} \mu_{\omega_0} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^\Omega.$$

$1_{\{\omega_0\}}$ ist die Abbildung $\Omega \to \mathbb{R}$, die den Wert 1 für $\omega = \omega_0$ annimmt und Null sonst. U ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^\Omega$ und K eine kompakte, konvexe Menge. Jedes Element im Schnitt von U und K würde eine Arbitragemöglichkeit liefern (hier geht $P(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ ein). Deshalb gilt nach Voraussetzung $U \cap K = \emptyset$. Nach dem Hilfssatz existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^\Omega$ mit

$$\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) x(\omega) = 0, \quad x \in U \tag{1.19}$$

und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) x(\omega) > 0 \quad \forall x \in K. \tag{1.20}$$

Da $1_{\{\omega_0\}} \in K$ gilt $\lambda(\omega_0) > 0$ für alle $\omega_0 \in \Omega$. Daher können wir vermöge

$$Q(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\widetilde{\omega} \in \Omega} \lambda(\widetilde{\omega})}$$

ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q definieren (man beachte, dass $\{\omega\} \in \mathcal{F}$ für alle $\omega \in \Omega$).

Sei nun $i \in \{1, \dots, d\}$, $s < t$ und $A \in \mathcal{F}_s$. Wir wählen folgende selbstfinanzierende Handelsstrategie

$$\varphi_u^j(\omega) := \begin{cases} 1(\omega \in A) 1(u \in \{s+1, \dots, t\}) & \text{für } j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann setzte in (1.19) $x(\omega) = (\varphi \bullet \widehat{S}_T)(\omega) = 1_A(\omega)(\widehat{S}_t^i(\omega) - \widehat{S}_s^i(\omega))$ und es gilt $E_Q(1_A(\widehat{S}_t^i - \widehat{S}_s^i)) = \frac{1}{\sum_{\widetilde{\omega} \in \Omega} \lambda(\widetilde{\omega})} \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega)(\varphi \bullet \widehat{S}_T)(\omega) = 0$, also $E_Q(\widehat{S}_t^i - \widehat{S}_s^i | \mathcal{F}_s) = 0$, d.h. $\widehat{S}^i$ ist ein Q-Martingal. □

Man sieht sofort, dass Arbitragefreiheit in *diskreten* Modellen *nicht* von der Wahl des Numéraires abhängt (siehe Definition 1.14). D.h. wir hätten die Preise statt mit S^0 z.B. auch mit S^j, $j \in \{1, \dots, d\}$ diskontieren können (In zeitstetigen Modellen ist dies etwas problematischer). Mit Satz 1.18 hängt damit die *Existenz* eines Martingalmaßes auch nicht von der Wahl des Numéraires ab. D.h. sind für das Numéraire S^0 die diskontierten Preisprozesse

$$\frac{S^i}{S^0}$$

Q-Martingale (wobei Q ein Maß mit $Q \sim P$), dann sind auch die bzgl. eines anderen Numéraires, z.B. S^j, diskontierten Preisprozess Martingale – allerdings i.A. auch bzgl. eines anderen Martingalmaßes Q^j. Zwischen Q und Q^j gilt der Zusammenhang

$$\frac{dQ^j}{dQ} = \frac{S_T^j}{S_T^0} \frac{S_0^0}{S_0^j}.$$

(Übung). Man muss also ein Numéraire und ein äquivalentes Martingalmaß als ein Paar (S^0, Q) sehen. In der Literatur wird häufig ein sog. “state price process” L definiert mit $L_t := \frac{1}{S_t^0} E\left(\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t\right)$. Die Produktprozesse LS^i, $i = 0, \dots, d$, sind P-Martingale.

Generell kommen in Satz 1.18 als Numéraire alle mit Wahrscheinlichkeit 1 strikt positiven Vermögensprozesse in Frage, d.h. die Prozesse $V_t = V_0 + \varphi \bullet S_t$ (insbesondere also alle S^j). Ökonomisch macht es natürlich Sinn, alles als Vielfaches der risikolosen Anlagemöglichkeit S^0 auszudrücken.

Proposition 1.21 (Einperiodenarbitrage)**.** *Folgende Aussagen sind äquivalent*

(i) Es existiert eine Arbitragemöglichkeit im Sinne von Definition 1.14.

(ii) Es existiert ein $t \in \{1, \dots, T\}$ und ein $\eta \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$ mit

$$P\left(\sum_{i=1}^{d} \eta^i \Delta \widehat{S}_t^i \geq 0\right) = 1 \text{ und } P\left(\sum_{i=1}^{d} \eta^i \Delta \widehat{S}_t^i > 0\right) > 0. \tag{1.21}$$

(iii) Es existiert ein $t \in \{1, \dots, T\}$ und ein $\eta \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$, so dass (1.21) gilt.

(iv) Es existiert eine Arbitragemöglichkeit im Sinne von Definition 1.14 mit beschränkter Handelsstrategie $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$.

Beweis. (i)⇒(ii) Sei φ eine solche Arbitragestrategie und V der zugehörige Wertprozess (d.h. $V_0 = 0$). Sei

$$t := \min\{k | P(V_k \geq 0) = 1 \text{ und } P(V_k > 0) > 0\}.$$

Nach Voraussetzung gilt $t \in \{1, \dots, T\}$.
1. Fall: $P(V_{t-1} = 0) = 1$. Dann erfüllt $\eta := \varphi_t$ Bedingung (ii).
2. Fall: $P(V_{t-1} \neq 0) > 0$. Dann gilt $P(V_{t-1} < 0) > 0$, da andernfalls bereits bis $t-1$ eine Arbitrage erzielt worden wäre, was der Minimalität von t widerspräche. Definiere $\eta := \varphi_t 1_{\{V_{t-1}<0\}}$. Da $P(V_t \geq 0) = 1$ gilt für $X := \sum_{i=1}^d \eta^i \Delta \widehat{S}_t^i = 1_{\{V_{t-1}<0\}} \Delta \widehat{V}_t$, dass $P(X \geq 0) = 1$ und $P(X > 0) > 0$ (Insbesondere gilt $\{V_{t-1} < 0\} \subset \{X > 0\}$, beachte, dass der diskontierte Vermögensprozess genau dann positiv ist, wenn der Vermögensprozess selber positiv ist).
(ii)⇒(iii) Insbesondere existiert auch eine beschränkte Einperiodenarbitragestrategie $\widetilde{\eta}$. Definiere $\widetilde{\eta} := 1_{\{\sum_{i=1}^d |\eta^i| > 0\}} \frac{\eta}{\sum_{i=1}^d |\eta^i|}$.
(iii)⇒(iv) Für t und $\widetilde{\eta}$ wie oben definiere die letzten d-Komponenten eines vorhersehbaren stochastischen Prozesses

$$\varphi_s^i := \begin{cases} \widetilde{\eta}^i & \text{für } s = t, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1.22}$$

$i = 1, \dots, d$. φ^0 erhält man dann mit der Selbstfinanzierungsbedingung wie in (1.16). □

Bemerkung 1.22. *Insbesondere liefert φ aus (1.22) eine Strategie für die während der Laufzeit kein Kredit aufgenommen werden muss, vgl. Bemerkung 1.16.*

Für zeitstetige Modelle, d.h. $\mathcal{T} = [0, T]$, gilt die fundamentale Äquivalenz in Theorem 1.18 in dieser Form nicht mehr. Man muss den Begriff einer Arbitragemöglichkeit etwas verändern, um die Äquivalenz zu erhalten (und zwar für beide Richtungen). Darauf werden wir im zeitstetigen Teil näher eingehen.

Betrachtet man einen Markt der aus unendlich vielen Wertpapieren besteht, wird die Äquivalenz in Theorem 1.18 schlicht falsch. Die Existenz unendlich vieler Wertpapiere kann zum Beipiel auf sog. Anleihenmärkten (Bonds) relevant werden. Zu jedem möglichen Fälligkeitszeitpunkt existiert ein eigenes Wertpapier, das exakt zu diesem Zeitpunkt den Betrag 1 auszahlt.

1.1 Ausflug in eine Welt mit unendlich vielen Wertpapieren

Gegeben sei also der Fall abzählbar unendlich vieler Wertpapiere $S = (S^0, S^1, \dots)$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $S^0 = 1$, d.h. $\widehat{S} = S$. Der stochastische Prozess S nehme Werte im Raum l^∞ der beschränkten Folgen an, d.h. $S : \Omega \times \{0, \dots, T\} \to l^\infty$. l^∞ ist ein Banachraum im Bezug auf die Supremumsnorm.

Um Vermögensprozesse eindeutig definieren zu können, fordern wir von Handelsstrategien absolute Summierbarkeit, d.h. $\sum_{i=0}^\infty |\varphi_t^i(\omega)| < \infty$, P-f.s. Wegen $S_t(\omega) \in l^\infty$ ist auch die Folge $(\varphi_t^i(\omega) S_t^i(\omega))_{i=0,1,\dots}$ absolut summierbar. Unser Vermögen hängt also nicht davon ab, in welcher Reihenfolge wir unsere Aktienpositionen zusammenzählen und alle Definitionen für $d < \infty$ lassen sich problemlos übertragen (z.B. Selbstfinanzierungsbedingung $\sum_{i=0}^\infty \Delta\varphi_t^i S_{t-1}^i = 0$).

Proposition 1.23. *Wenn ein äquivalentes Martingalmaß existiert, d.h. ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q unter dem alle S^i, $i = 0, 1, \dots$, Martingale sind, und zusätzlich $E_Q\left(\sup_{i\in\mathbb{N}_0} |S_t^i|\right) < \infty$ für alle $t = 0, 1, \dots, T$ gilt, dann ist der Markt arbitragefrei.*

Beweis. Der Beweis geht ganz analog zu der Hinrichtung von Satz 1.18. Seien alle S^i Q-Martingale und V der Vermögensprozess zu der selbstfinanzierenden Strategie φ mit $V_0 = 0$. Aus der Selbstfinanzierungsbedingung folgt, dass

$$\Delta V_t = \sum_{i=1}^\infty \varphi_t^i \Delta S_t^i. \tag{1.23}$$

Man kann sich überlegen, dass Proposition 1.21 sinngemäß auch für den Fall $d = \infty$ gilt (Übung). Damit kann man sich auf $\|\cdot\|_{l^1}$-beschränkte Handelsstrategien beschränken, d.h. o.B.d.A. $\sum_{i=0}^{\infty} |\varphi_t^i(\omega)| \le 1$, für alle ω, t. Da

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_t^i||\Delta S_t^i| \le 2\|S\|_{l^\infty}.$$

kann man Erwartungswertbildung und Summation über i vertauschen und es gilt

$$E_Q(\Delta V_t) = \sum_{i=1}^{\infty} E_Q(\varphi_t^i \Delta S_t^i) = 0,$$

wegen Proposition 1.5(iii) und da S^i Q-Martingale sind. Also $E_Q V_T = 0$. Aus $1 = P(V_T \ge 0) = Q(V_T \ge 0)$ würde also $1 = Q(V_T = 0) = P(V_T = 0)$ folgen. □

Das folgende Einperioden-Binomial-Modell zeigt, dass i.A. die andere Richtung von Theorem 1.18 nicht mehr gilt.

Beispiel 1.24. *Sei $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ und $P(\{\omega\}) > 0$, $\forall \omega \in \Omega$. $T = 1$, $S_0 = (1, 1, \dots)$. S_1 ist gegeben durch $S_1^0 = 1$ und*

$$S_1^i(\omega) = \begin{cases} 0 & \textit{wenn } \omega = i \\ 2 & \textit{wenn } \omega = i+1 \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases} \tag{1.24}$$

für $i \ge 1$. Zunächst zeigen wir, dass das Modell arbitragefrei ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine Strategie $\varphi \in l^1$ gibt mit $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i S_0^i = 0$ und $P(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i S_1^i \ge 0) = 1$.

Betrachte den Fall, dass $\omega = 1$ eintritt. Es gilt

$$0 \le \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i S_1^i(1) = \varphi^0 + \sum_{k=2}^{\infty} \varphi^k = -\varphi^1$$

Analog folgt für $\omega > 1$

$$0 \le \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i S_1^i(\omega) = \varphi^0 + 2\varphi^{\omega-1} + \sum_{i=1, i \ne \omega-1, \omega}^{\infty} \varphi^i = \varphi^{\omega-1} - \varphi^{\omega}.$$

Es folgt sofort, dass $0 \ge \varphi^1 \ge \varphi^2 \ge \dots$. Dies ist aber nur möglich, wenn $\varphi^i = 0$, $\forall i$ da $\varphi \in l^1$. Trotzdem existiert kein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$, so dass $E_Q(S_1^i) = S_0^i$ für *alle i. Für so ein Maß müsste nämlich gelten*

$$\begin{aligned} 1 &= E_Q(S_1^i) = 2Q(\{i+1\}) + \sum_{k=1,k\neq i,i+1}^{\infty} Q(\{k\}) \\ &= 1 + Q(\{i+1\}) - Q(\{i\}), \quad \forall i \geq 1. \end{aligned}$$

Dies bedeutete aber, dass alle $Q(\{i\})$, $i \in \mathbb{N}$, gleich wären. Da $1 = Q(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(\{i\})$ ist dies aber nicht möglich.

Bemerkung 1.25. *Bei dem der Konstruktion (1.24) entsprechenden Beispiel mit endlich vielen Wertpapieren gibt es ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß – und zwar die Gleichverteilung.*

2 Derivatebewertung und Hedging

Wir gehen wieder von einem Modell mit endlichem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$ aus. Viele Termingeschäfte lassen sich durch eine einzige Zufallsvariable H beschreiben, die die Auszahlung an den Besitzer des entsprechenden Wertpapiers zum Endzeitpunkt T ausdrückt. Andere Derivate sind aber auch von einer etwas komplizierteren Struktur.

Beispiel 2.1.

- Europäische Call Option: *Der Käufer dieser Option erwirbt das* Recht *(aber nicht die Pflicht), zum Zeitpunkt T Aktie i zum vorher festgelegten Preis $K \in \mathbb{R}_+$ zu kaufen. Zum Zeitpunkt T hat dieses Recht den Wert $S_T^i - K$, wenn $S_T^i > K$. Im Fall $S_T^i \leq K$ hat dieses Recht keinen Wert. Die Auszahlung ist also durch die Zufallsvariable $H(\omega) = (S_T^i(\omega) - K)^+$ gegeben. Bei der Optionspreisbewertung stellt man sich nun die Frage, wieviel dieses Recht, dessen Wert zum Zeitpunkt T man kennt, zu einem früheren Zeitpunkt $t < T$ wert ist.*

- Europäische Put Option: *Im Unterschied zur Call Option erwirbt der Käufer das Recht, die Aktie i zum Zeitpunkt T zum vorher festgelegten Preis K zu* ver*kaufen. Die zufällige Auszahlung ist $(K - S_T^i)^+$. Mit Put Optionen kann man auf fallende Aktienkurse wetten. Dies ist natürlich nicht unproblematisch, da der Halter der Option ein Interesse an niedrigen Aktienkursen hat (wenn er nicht auch gleichzeitig die entsprechende Aktie im Portfolio hält und der Put nur der Absicherung der Aktienposition dient).*

- Zertifikate: *Dies sind Anlagemöglichkeiten, bei denen der Investor zu einem Zeitpunkt T eine Auszahlung H erhält, die i.A. nichtlinear vom Preis S_T^i oder Preisprozess $(S_t^i)_{t=0,1,\dots,T}$ einer Aktie (oder Indexes) abhängt. Seien $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ mit $K_1 < K_2$. Betrachte Zertifikate mit folgenden Auszahlungen*

$$H = (S_T^i \wedge K_2) \vee K_1 + (S_T^i \wedge K_2 - K_1)^+, \quad \textit{Sprinter.}$$

$$H = (S_T^i \vee K_2) 1_{\{S_t^i > K_1,\ \forall t=1,\dots,T\}} + S_T^i 1_{\{S_t^i \leq K_1,\ \textit{für ein } t=1,\dots,T\}}, \quad K_1 < S_0^i \quad \textit{Bonuszertifikat.}$$

$$H = S_T^i 1_{\{S_t^i > K_1,\ \forall t=1,\dots,T\}}, \quad K_1 < S_0^i \quad \textit{Hebelzertifikat.}$$

- Forward: *Es wird zum Zeitpunkt $t = \{0, \dots, T\}$ vereinbart, dass der Käufer das Wertpapier S^i zum Zeitpunkt T zum Preis O_t erwirbt, d.h. die Auszahlung an den Käufer ist $H = S_T^i - O_t$. Wie gross ist O_t zu wählen, dass dieser Vertrag zum Zeitpunkt t nichts kostet, d.h. 0 ein fairer Preis für den Claim H ist ? Ist der riskolose Zins determinstisch, sei z.B. die Zinsrate konstant $r > 0$, d.h. $S_t^0 = e^{rt}$, dann ergibt sich für den Forward ein* modellunabhängiger *eindeutiger No-Arbitrage-Preis $O_t = S_t^i e^{r(T-t)}$.*

- Amerikanische Optionen: *Bei amerikanischen Call oder Put-Optionen kann der Käufer sein Kaufs- bzw. Verkaufsrecht nicht nur zum Endzeitpunkt T wahrnehmen, sondern zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. Eine amerikanische Option ist damit mindestens genauso viel wert, wie die entsprechende europäische Option. Wir stellen amerikanische Optionen statt durch eine Zufallsvariable durch einen stochastischen Prozess $L = (L_t)_{t=0,\dots,T}$ dar. Call Option $L_t = (S_t^i - K)^+$, Put Option $L_t = (K - S_t^i)^+$.*

- Swaps. *Zum Zeitpunkt* 0 *werden Zahlungen zwischen zwei Vertragsparteien vereinbart, die von heute noch nicht bekannten Größen abhängen (etwa von zukünftigen Zinssätzen $\rightsquigarrow$ Zinsswaps) und zu verschiedenen Zeitpunkten stattfinden können. Die*

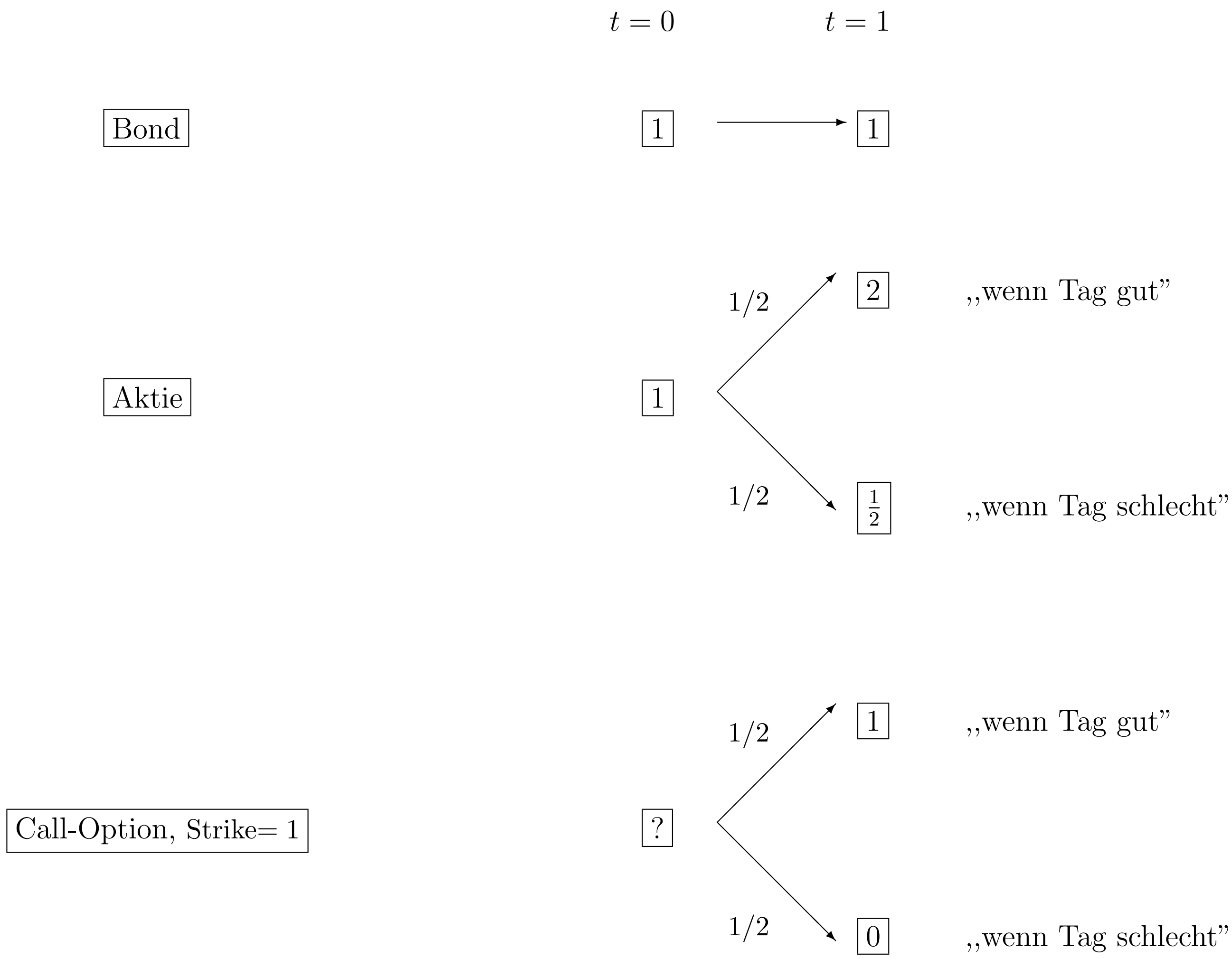
Zeitpunkte der Auszahlungen sind nach Vertragsabschluss jedoch nicht mehr beeinflussbar, was diese Kontrakte von amerikanischen Optionen unterscheidet. Da Zahlungen, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten stattfinden, mit einem geeigneten Numeraire vergleichbar gemacht werden können, lässt sich der Kontrakt auch durch eine einzelne Zufallsvariable H darstellen (und wird somit grundsätzlich von Definition 2.2 erfasst).

Bei der Derivatebewertung geht es um die Frage, wie man eine Option mit einer zufälligen Auszahlung in der Zukunft heute fair bewerten kann. Eng verbunden mit der fairen Preisbestimmung für Derivate ist die Frage, inwieweit man das Risiko, was mit dem Verkauf oder den Kauf von Derivaten verbunden ist, mit einer gewöhnlichen Anlagestrategie, die nur die Underlyings (Aktien, Bonds) berücksichtigt, ausgleichen kann. Da die Auszahlung der Option meistens eine *nichtlineare* Funktion des Underlyingpreises zum Zeitpunkt T ist, reicht es nicht aus, nur statische Hedgingstrategien zu betrachten (statisch: "kaufe/shorte k Aktien zum Zeitpunkt 0 und halte diese Position bis zum Zeitpunkt T"). Stattdessen müssen dynamische Strategien betrachtet werden, bei denen die Anzahl der Aktien im Portfolio jede Periode angepasst wird.

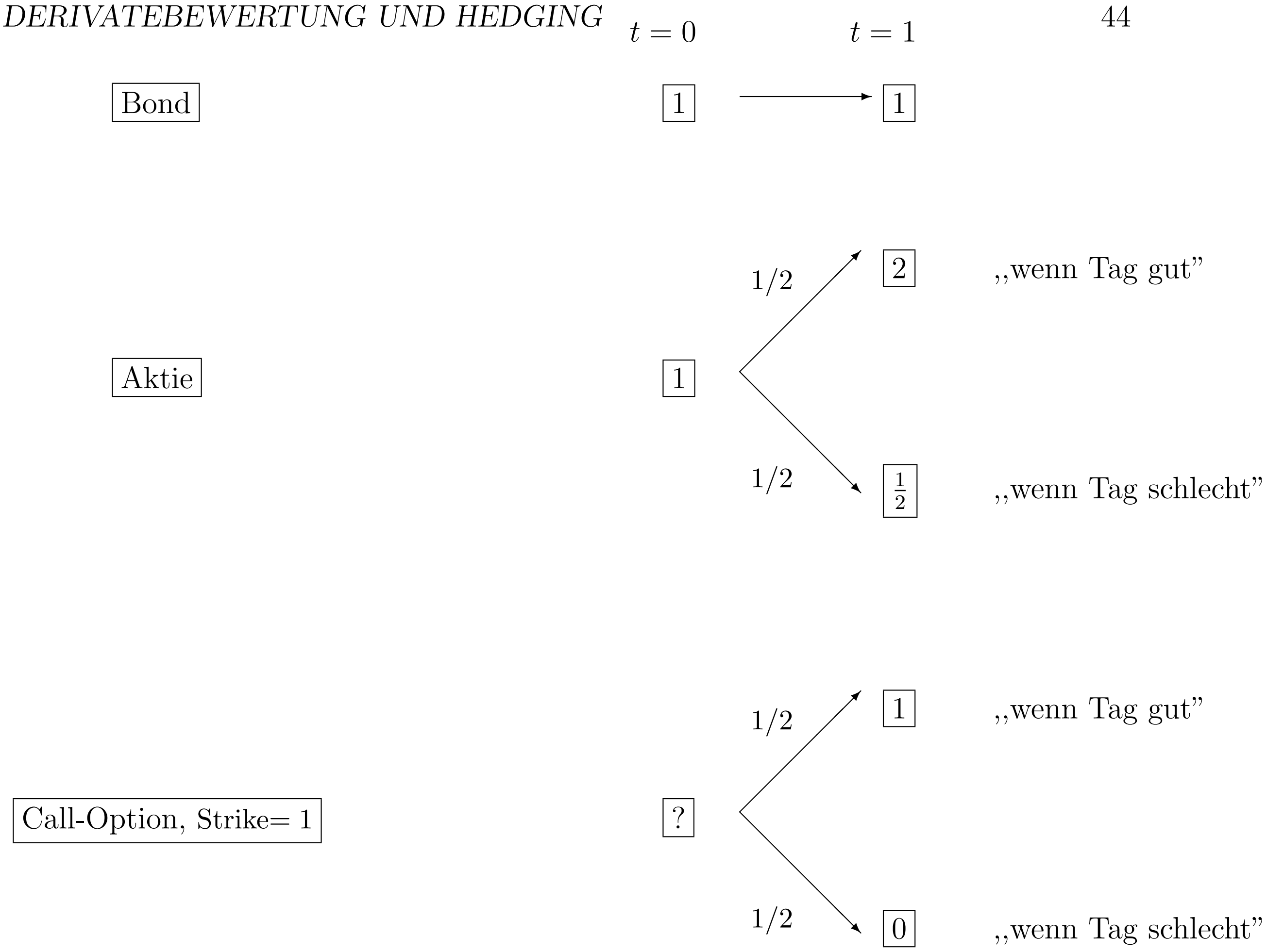
Definition 2.2. *Sei H ein europäischer Claim (Derivat, Option), d.h. eine Zufallsvariable $H \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ein adaptierter Prozess $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t)_{t=0,\dots,T}$ heißt* Derivatepreisprozess *für den Claim H, wenn $\widetilde{S}_T = H$.*

$\widetilde{S}_t$ legt also den Preis des Claims H zum Zeitpunkt t fest. Was kann man sinnvolles über $\widetilde{S}_t$ sagen ? Wir behandeln Claims (Derivate, Optionen) im Prinzip wie "gewöhnliche" Wertpapiere. Sie werden zusammen mit den Underlyings (Aktien) auf einem Markt gehandelt. Die stochastischen Prozesse $(S^0, S^1, \dots, S^d)$, die den Preis der Underlyings beschreiben sollen, sind gewöhnlich vorgegeben (d.h. ihre statistische Verteilung ist vorher spezifiziert). Ziel der *Derivate*bewertung ist es, daraus Schlussfolgerungen für die Derivatepreisprozesse zu ziehen. Bei europäischen Claims hat man für den Derivatepreisprozess $(\widetilde{S}_t)_{t=0,\dots,T}$ die Endbedingung $\widetilde{S}_T = H$. Also zum Beispiel $\widetilde{S}_T = (S^i_T - K)^+$ für eine Call Option auf die Aktie i.

Grundidee der Derivatebewertung:



Call-Option: Halter besitzt das Recht (aber nicht die Pflicht), zum Zeitpunkt 1 eine Aktie zum Strike-Preis 1 zu erwerben.



Auszahlung der Call-Option lässt sich durch Aktie und Bond **replizieren**: kaufe in $t = 0$ $\lambda = \frac{2}{3}$ Aktien und $\mu = -\frac{1}{3}$ Bonds.

$$\left.\begin{array}{l} \mu + 2\lambda = 1 \\ \mu + \frac{1}{2}\lambda = 0 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -\frac{1}{3},\ \lambda = \frac{2}{3}$$

$$p = \text{Optionpreis}_{t=0} = \text{Replikationskosten} = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Jeder andere Optionspreis als 1/3 würde eine “Arbitrage” (risikolose Gewinnmöglichkeit) ermöglichen.

$$\text{Optionswert}_{t=1} = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \text{Aktienwert}_{t=1} \quad \text{in beiden Zuständen}$$

- Fall $p > 1/3$. Shorte eine Option. Kaufe 2/3 Aktien und $-1/3 + p - 1/3$ Bonds. Ertrag $= p - 2/3 \cdot 1 - (-1/3 + p - 1/3) \cdot 1 = 0$ (d.h. die Kosten = -Ertrag sind auch 0, die Position kann mit Startkapital 0 aufgebaut werden). Zum Zeitpunkt 1 bleibt stets $p - 1/3 > 0$ übrig.

- Fall $p < 1/3$. Kaufe eine Option. Shorte 2/3 Aktien und kaufe $1/3 + 1/3 - p$ Bonds. Ertrag $= -p + 2/3 \cdot 1 - (1/3 + 1/3 - p) \cdot 1 = 0$. Zum Zeitpunkt 1 bleibt stets $1/3 - p > 0$ übrig.

Beobachtung: Wahrscheinlichkeitsmaß P geht nicht in Optionspreis ein !

Allgemein: beliebiger Claim (Auszahlung), $(h_g, h_s) \in \mathbb{R}^2$.

Zu bestimmen μ, λ, so dass

$$\left.\begin{aligned} \mu + 2\lambda &= h_g \\ \mu + \tfrac{1}{2}\lambda &= h_s \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \lambda = \frac{2(h_g - h_s)}{3}, \ \mu = \frac{4h_s - h_g}{3}.$$

immer eine Lösung $\Rightarrow$ jeder Claim lässt sich replizieren.

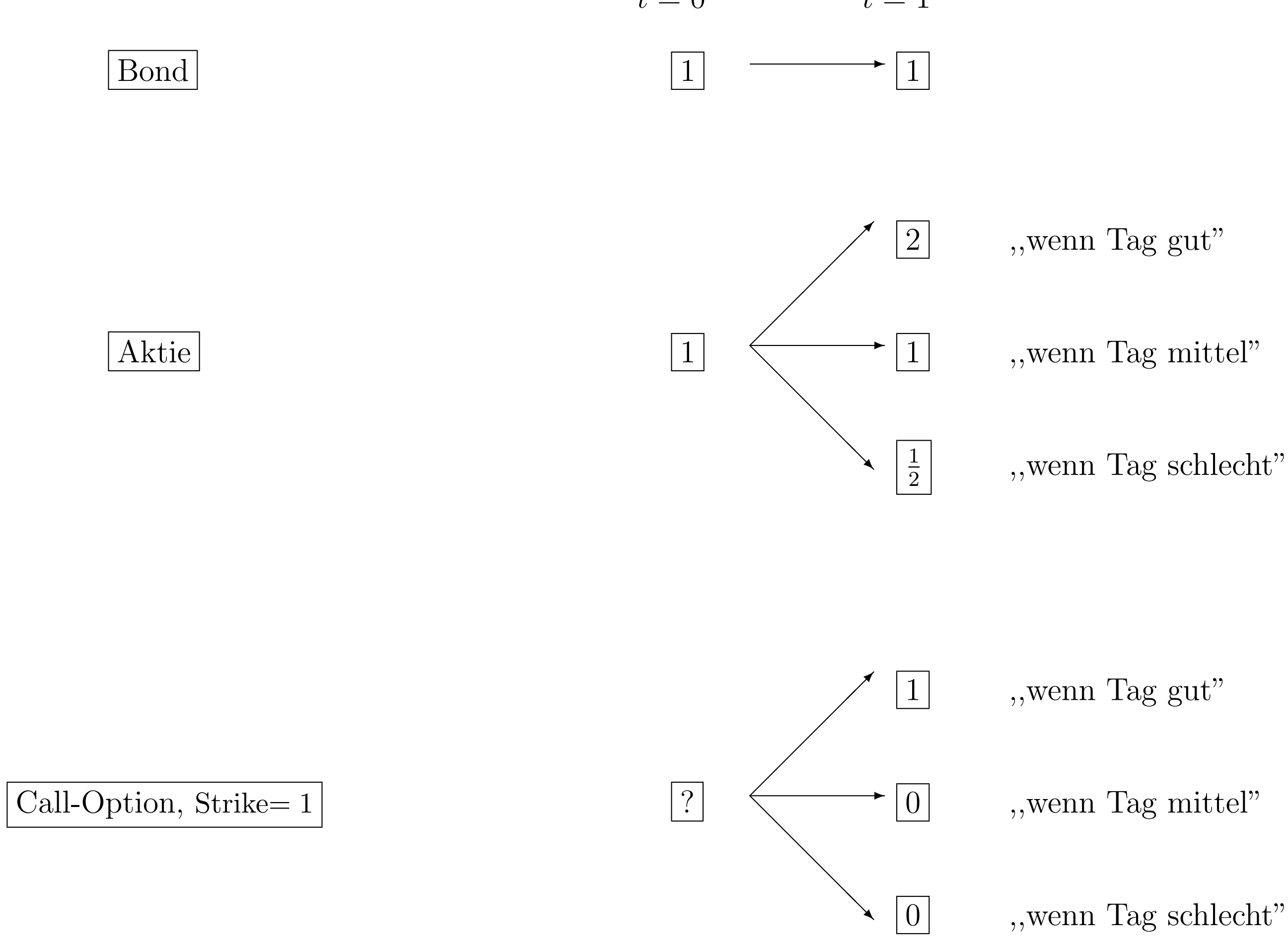
Sei S_1 (zufälliger) Aktienkurs zum Zeitpunkt 1 und H (zufälliger) Claim

$$\text{Optionspreis} + \lambda(S_1(\omega) - S_0) = H(\omega), \quad \omega \in \{\text{guter T., schlechter T.}\} \tag{2.25}$$

Finde Wahrscheinlichkeitmaß Q mit $E_Q(S_1 - S_0) = 0$ (Q ist dann Martingalmaß). Bildet man auf beiden Seiten von (2.25) den Erwartungswert unter Q, dann folgt

$$\text{Optionspreis} = E_Q(H).$$

Zentrale Beobachtung: in diesem Modell ist der eindeutige arbitragefreie Optionspreis der Erwartungswert der Optionsauszahlung unter dem eindeutigen Martingalmaß. Würde man den Optionspreis als Erwartungswert unter dem physikalischen Wahrscheinlichkeitsmaß P berechnen, so würde es in dem Modell Arbitrage geben.



Auszahlung der Call-Option lässt sich durch Aktie und Bond **nicht** replizieren:

$$\left.\begin{aligned} \mu + 2\lambda &= 1 \\ \mu + \lambda &= 0 \\ \mu + \tfrac{1}{2}\lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Wir nehmen im folgenden stets an, dass der „ursprüngliche Markt“, der nur aus den Underlyings $(S^0, S^1, \ldots, S^d)$ **besteht, arbitragefrei ist.**

Korollar 2.3 (zu 1. Fundamentalsatz der Arbitragetheorie). *Sei* $|\Omega| < \infty$. *Seien* $H^1, \ldots, H^k$ *europäische Claims und* $S^{d+1}, \ldots, S^{d+k}$ *dazugehörige Derivatepreisprozesse. Der erweiterte Markt*[||]

$$(S^0, \ldots, S^d, S^{d+1}, \ldots, S^{d+k})$$

ist genau dann arbitragefrei (d.h. im erweiterten Markt gibt es keine Arbitragemöglichkeit im Sinne von Definition 1.14), wenn

$$S_t^{d+i} = S_t^0 E_Q \left(\frac{H^i}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \right), \; i = 1, \ldots, k, \; \textit{für ein } Q \in \mathcal{M}^e(\widehat{S}^1, \ldots, \widehat{S}^d). \tag{2.26}$$

(D.h. die diskontierten Derivatepreisprozesse $\frac{S_t^{d+i}}{S_t^0}$ *sind* Q*-Martingale)* $\mathcal{M}^e(\widehat{S}^1, \ldots, \widehat{S}^d)$ *ist die Menge der äquivalenten Martingalmaße (also alle Maße, die die diskontierten Preisprozesse der Underlyings zu Martingalen machen)*

Beweis. Beide Richtungen folgen sofort aus Satz 1.18:
$\Leftarrow$ Sei $Q \in \mathcal{M}^e$ und $S^{d+1}, \ldots, S^{d+k}$ wie in (2.26) definiert, d.h $\frac{S_t^{d+i}}{S_t^0} = E_Q \left(\frac{H^i}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \right)$ sind Q-Martingale. Damit ist Q auch ein ÄMM im vergrößerten Markt $(S^0, \ldots, S^d, S^{d+1}, \ldots, S^{d+k})$ (Q macht also auch die diskontierten Derivatepreisprozesse zu Martingalen) und es gilt dort wegen Satz 1.18 Arbitragefreiheit.
$\Rightarrow$ Seien $(\widetilde{S}^{d+1}, \ldots \widetilde{S}^{d+k})$ Derivatepreise für $(H^1, \ldots, H^k)$ im Sinne von Definition 2.2 und sei der erweiterte Markt $(S^0, \ldots, S^d, \widetilde{S}^{d+1}, \ldots \widetilde{S}^{d+k})$ arbitragefrei. Mit Satz 1.18 folgt, dass es ein Maß $Q \sim P$ gibt, so dass die diskontierten Derivatepreise und die diskontierten Preise der Underlyings Q-Martingale sind. Zusammen mit der Endbedingung $\frac{\widetilde{S}_T^{d+i}}{S_T^0} = \frac{H^i}{S_T^0}$, $i = 1, \ldots, k$, impliziert dies $\widetilde{S}_t^{d+i} = S_t^0 E_Q \left(\frac{H^i}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \right)$ und Q ist Martingalmaß bzgl. des Underlyingmarktes. □

Damit ist ein enger Zusammenhang zwischen der Arbitragefreiheit von Derivatepreisen und der Bewertung von Derivaten durch Erwartungswertbildung unter äquivalenten Martingalmaßen hergestellt.

[||] Handel ist sowohl in den “Underlyings” (Basiswertpapieren) mit Preisprozessen $(S^0, \ldots, S^d)$ als auch in den Derivaten mit Preisprozessen $(S^{d+1}, \ldots S^{d+k})$ möglich

Bemerkung 2.4. *Im Fall $|\Omega| = \infty$ muss ein nichtnegativer Claim H i.A. nicht unter jedem äquivalenten Martingalmaß einen endlichen Erwartungswert haben. Betrachte etwa den Fall, dass alle Underlyings Konstanten sind und H unbeschränkt ist (genauer $H \notin \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$). In diesem Fall ist* **jedes** *äquivalente Maß ein äquivalentes Martingalmaß und es lässt sich auch ein solches finden mit $E_Q(H) = \infty$. ∞ kann natürlich kein arbitragefreier Preis für eine endliche Auszahlung sein. In Korollar 2.3, d.h. in (2.26), muss daher noch die Zusatzbedingung*

$$E_Q\left(\frac{|H^i|}{S_T^0}\right) < \infty, \ i = 1, \dots, k, \tag{2.27}$$

an Q gestellt werden. Die Äquivalenz folgt dann genauso wie oben mit Satz 1.18 (der auch für $|\Omega| = \infty$ gilt, auch wenn wir ihn nur für $|\Omega| < \infty$ bewiesen haben). Darüber hinaus kann gezeigt werden, dass die Menge der äquivalenten Martingalmaße Q, die (2.27) erfüllen, nicht leer ist.

2.1 Einschub: Lokalisierung

Definition 2.5. *Ein Prozess $(X_t)_{t=0,1,\dots,T}$ ist ein* **lokales Martingal***, wenn es eine Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $P(T_n = T) \to 1$, $n \to \infty$, gibt, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ der abgestoppte Prozess X^{T_n} ein Martingal ist, wobei $X_t^{T_n} := X_{t\wedge T_n}$. Analog ist ein Prozess $(X_t)_{t=0,1,\dots,T}$* **lokal beschränkt***, wenn es eine Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $P(T_n = T) \to 1$, $n \to \infty$, gibt, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ der abgestoppte Prozess X^{T_n} beschränkt ist.*

*Eine Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $P(T_n = T) \to 1$ wird lokalisierende Folge genannt**.

Jedes Martingal ist natürlich auch ein lokales Martingal (bzw. jeder beschränkte Prozess ist auch lokal beschränkt). Wähle dazu als Lokalisierungsfolge $T_n = T$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

*Zumeist wird dazu noch gefordert, dass $T_1 \leq T_2 \leq \dots$. Für eine beliebige Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann man sich aber stets die monotone Folge $\widetilde{T}_n := \max\{T_1, \dots, T_n\}$ konstruieren und obige Eigenschaften gelten auch mit $(\widetilde{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sofern sie schon mit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelten.

Lokalisierungen spielen vor allem in zeitstetigen Modellen eine wichtige Rolle, sind aber manchmal auch in zeitdiskreten Modellen mit endlichem Zeithorizont von Interesse. Wenn der Grundraum endlich ist, d.h. $|\Omega| < \infty$, sind Lokalisierungen natürlich überflüssig, da **in diesem Fall** jedes lokale Martingal ein Martingal ist (in diesem Fall existiert zu einer lokalisierenden Folge ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $P(T_n = T) = 1$).

Bemerkung 2.6. *In Abgrenzung zu lokalen Martingalen werden Martingale oft auch als ,,echte Martingale" bezeichnet. Ein lokales Martingal unter einem Maß Q wird Q-lokales Martingal genannt (auch wenn sich bei einem* **äquivalenten** *Maßwechsel die Menge der lokalisierenden Folgen nicht verändert, sich also das Q nur auf das Wort ,,Martingal" und nicht auf das Wort ,,lokal" bezieht).*

Zur Erinnerung: Allgemeines zur Integrierbarkeit

$Y^+ := Y \vee 0$ und $Y^- := (-Y) \vee 0$ bezeichnen den Positivanteil und den Negativanteil einer reellwertigen Zufallsvariablen Y. $E(Y^+)$ und $E(Y^-)$ lassen sich wegen der Nichtnegativität des Integranden stets definieren, können aber unendlich sein. Wenn mindestens einer der beiden Erwartungswerte $E(Y^+)$, $E(Y^-)$ endlich ist, lässt sich der Erwartungswert von Y durch $E(Y) := E(Y^+) - E(Y^-)$ definieren. Für $E(Y^+) = E(Y^-) = \infty$ ergibt die Differenz natürlich keinen Sinn und der Erwartungswert von Y ist nicht definiert.

Beispiel 2.7 (Lokales Martingal)**.** *Ein Beispiel für ein lokales Martingal, das kein Martingal ist, ist der folgende Prozess $(X_t)_{t=0,1,2}$. Seien Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig mit $P(Y_1 \geq 0) = 1$, $E(Y_1) = \infty$ und $P(Y_2 = 1) = P(Y_2 = -1) = \frac{1}{2}$. Die Filtration ist gegeben durch $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(Y_1)$ und $\mathcal{F}_2 = \sigma(Y_1, Y_2)$. Definiere $X_0 = X_1 = 0$ und $X_2 = Y_1 Y_2$. X kann kein Martingal sein, da X_2 nicht integrierbar ist. Es gilt nämlich $E((X_2)^+) = E\left(Y_1 1_{\{Y_2=1\}}\right) = \infty$ und $E((X_2)^-) = E\left(Y_1 1_{\{Y_2=-1\}}\right) = \infty$. X ist aber offenbar ein lokales Martingal mit Lokalisierungsfolge*

$$T_n = \begin{cases} 1 : \text{wenn } Y_1 > n \\ 2 : \text{wenn } Y_1 \leq n. \end{cases}$$

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist lokalisierend, da wegen $P(Y_1 < \infty) = 1$ $P(T_n = 2) = P(Y_1 \leq n) \overset{n \to \infty}{\to} 1$. Zudem sind X^{T_n} Martingale, da $X_0^{T_n} = X_1^{T_n} = 0$ und für $X_2^{T_n}$ gilt $|X_2^{T_n}| \leq n$ (und damit

$E(|X_2^{T_n}|) < \infty$) *und* $E(1_A X_2^{T_n}) = E(1_A 1_{\{Y_1 \leq n\}} Y_1 Y_2) = E(1_A 1_{\{Y_1 \leq n\}} Y_1) E(Y_2) = 0$ *für alle* $A \in \mathcal{F}_1 = \sigma(Y_1)$.

Proposition 2.8. *Jeder vorhersehbare Prozess ist lokal beschränkt.*

Proof. Sei $(X_t)_{t=0,1,\dots,T}$ vorhersehbar. Definiere $T_n := \inf\{t \mid |X_{t+1}| > n\} \wedge T, \quad n \in \mathbb{N}$. Wegen der Vorhersehbarkeit von X sind T_n Stoppzeiten. Es gilt $|X^{T_n}| \leq X_0 \vee n$ und damit die Behauptung, da die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $P(\max_{t=0,1,\dots,T} |X_t| < \infty) = 1$ lokalisierend ist. Beachte, dass X_0 eine Konstante ist, da vorausgesetzt wurde, dass $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$ (in den üblichen Anwendungen werden vorhersehbare Prozesse in $t = 0$ nicht abgegriffen, so dass die Definition von X_0 unwichtig ist, entscheidend ist, dass, wenn $|X_1|$ die Schranke n überschreitet, der Prozess abgestoppt wird bevor er richtig begonnen hat). $\square$

Proposition 2.9. *Sei X ein Martingal. Dann ist $\varphi \bullet X$ ein lokales Martingal.*

Proof. Nach Proposition 2.8 existiert eine lokalisierende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass φ^{T_n} beschränkt sind. Die Aussage folgt dann aus $\underbrace{(\varphi 1_{[\![0,T_n]\!]})}_{\text{vorhersehbar \& beschränkt}} \bullet X = (\varphi \bullet X)^{T_n}$ und Proposition 1.5(iii). Dabei ist $[\![0, T_n]\!] := \{(\omega, t) \in \Omega \times \{0, 1, \dots, T\} \mid t \leq T_n(\omega)\}$ und es gilt $\{\omega \in \Omega \mid 1_{[\![0,T_n]\!]}(\omega, t) = 1\} = \{\omega \in \Omega \mid T_n(\omega) \geq t\} = \{\omega \in \Omega \mid T_n(\omega) < t\}^c = \{\omega \in \Omega \mid T_n(\omega) \leq t - 1\}^c \in \mathcal{F}_{t-1}$ für alle $t \in \{0, \dots, T\}$. $\square$

Proposition 2.10. *Jedes P-f.s. nichtnegative lokale Martingal (in diskreter Zeit mit endlichem Horizont) ist ein Martingal.*

Proof. Sei X ein Prozess mit $P(X_t \geq 0) = 1$ für $t = 0, 1, \dots, T$. X ist genau dann ein (lokales) Martingal, wenn der nichtnegative Prozess $\max\{X, 0\}$ ein (lokales) Martingal ist. Daher können wir o.B.d.A. $X \geq 0$ voraussetzen.

Schritt 1: Zu zeigen $E(X_t) < \infty$ für alle $t \in \{0, \dots, T\}$. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge. Wegen $X_0 = X_0^{T_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $E(X_0^{T_n}) < \infty$, muss X_0 integrierbar sein (auch wenn wir nicht mit der trivialen σ-Algebra $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ beginnen, bei der X_0 ja eine Konstante und damit sowieso integrierbar sein müsste). Es gilt $X_t^{T_n} \to X_t$ punktweise. Da X nichtnegativ ist, folgt mit dem Lemma von Fatou $E(X_t) \leq \liminf_{n\to\infty} E(X_t^{T_n}) = E(X_0) < \infty$.

Schritt 2: Seien $s \leq t$, $A \in \mathcal{F}_s$. Es gilt

$$E(1_A(X_{t\wedge T_n} - X_{s\wedge T_n})) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Der Integrand konvergiert punktweise gegen $1_A(X_t - X_s)$ für $n \to \infty$. Wegen $|1_A(X_{t\wedge T_n} - X_{s\wedge T_n})| \leq \max_{u=0,1,\dots,T} X_u \leq \sum_{u=0}^{T} X_u$ und Schritt 1 existiert eine integrierbare Majorante. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz (Korollar 0.27) folgt die Konvergenz der Erwartungswerte, d.h. $E(1_A(X_{t\wedge T_n} - X_{s\wedge T_n})) \to E(1_A(X_t - X_s))$ und damit $E(1_A(X_t - X_s)) = 0$. □

Proposition 2.11. *Jedes lokale Martingal (in diskreter Zeit mit endlichem Horizont) mit P-f.s. nichtnegativem Endwert ist ein Martingal.*

Proof. Sei $(X_t)_{t=0,1,\dots,T}$ ein lokales Martingal mit $P(X_T \geq 0) = 1$. Wegen Proposition 2.10 müssen wir nur zeigen, dass $P(X_t \geq 0) = 1$ für alle $t = 0, 1, \dots, T-1$. Dies machen wir durch Rückwärtsrekursion. Annahme $P(X_{T-1} < 0) > 0$. Dann existiert eine Stoppzeit T_n aus der lokalisierenden Folge mit $P(\{X_{T-1} < 0\} \cap \{T_n = T\}) > 0$. Es folgt

$$E(1_{\{X_{T-1}<0\}}(X_{T_n} - X_{(T-1)\wedge T_n})) > 0 \tag{2.28}$$

(Man beachte, dass die Zufallsvariable $1_{\{X_{T-1}<0\}}(X_{T_n} - X_{(T-1)\wedge T_n})$ wegen $P(X_T \geq 0) = 1$ und $T_n(\omega) = (T-1) \wedge T_n(\omega)$ oder $T_n(\omega) = T$ P-f.s. nichtnegativ und auf der Menge $\{X_{T-1} < 0\} \cap \{T_n = T\}$ P-f.s. echt positiv ist). Die linke Seite von (2.28) müsste aber verschwinden, da X^{T_n} ein Martingal ist. Ein Widerspruch. Also folgt $P(X_{T-1} \geq 0) = 1$ und schließlich mit Induktion analog $P(X_t \geq 0) = 1$ für $t = T, T-1, \dots, 0$. □

Ende Einschub

Satz 2.12. *Sei H ein europäischer Claim mit $H \geq 0$. Dann sind äquivalent*

(1) H ist replizierbar durch eine selbstfinanzierende Strategie $\varphi = (\varphi^0, \dots, \varphi^d)$ in den Underlyings und mit einem Startkapital $v_0 \in \mathbb{R}$, d.h. $H = v_0 + (\varphi^0, \dots, \varphi^d) \bullet (S^0, \dots, S^d)_T$, P-f.s.

(2) Es gibt genau einen Derivatepreisprozess S^{d+1} im Sinne von Definition 2.2, so dass der erweiterte Markt $(S^0, \dots, S^d, S^{d+1})$ arbitragefrei ist (nämlich $S^{d+1} = V(\varphi)$).

(3) Für jedes äquivalente Martingalmaß Q gilt $E_Q(\widehat{H}) < \infty$ und der bedingte Erwartungswert $E_Q(\widehat{H}|\mathcal{F}_t)$ besitzt den gleichen Wert (nämlich $\widehat{V}_t$).

Bemerkung 2.13. *Die Implikation* (1) $\Rightarrow$ (2) *wird auch* „law of one price" *genannt.*

Bemerkung 2.14. *Ohne die Voraussetzung $H \geq 0$ muss aus der Replizierbarkeit von H nicht die Integrierbarkeit von $|\widehat{H}|$ unter jedem äquivalenten Martingalmaß folgen. Mit den Zufallsvariablen aus Beispiel 2.7 kann man ein Gegenbeispiel konstruieren. Wähle $S^0 = 1$, $S^1_0 = S^1_1 = 0$, $S^1_2 = Y_2$ und $H := Y_1 Y_2$. H ist mit S^1 replizierbar (wähle $\varphi^1 = Y_1 1_{\Omega \times \{2\}}$) und S^1 ist ein P-Martingal, aber $E_P(|H|) = \infty$ (Übung: Geben Sie ein äquivalentes Martingalmaß an, unter dem $|H|$ endlichen Erwartungswert hat).*

Die Richtung (1) $\Rightarrow$ (3) werden wir in voller Allgemeinheit und alles übrige nur für den Fall $|\Omega| < \infty$ beweisen.

Beweis. O.B.d.A. $S^0 = 1$, d.h. $\widehat{S} = S$ und $\widehat{H} = H$.

(1) $\Rightarrow$ (3): Sei $v_0 \in \mathbb{R}$ und $\varphi = (\varphi^1, \dots \varphi^d)$ eine Strategie mit

$$v_0 + (\varphi^1, \dots \varphi^d) \bullet (S^1, \dots, S^d)_T = H, \quad P-\text{f.s.}$$

und sei $Q \in \mathcal{M}^e(S^1, \dots, S^d)$ (unter den gemachten Voraussetzungen existiert beides). Mit Proposition 2.9 folgt, dass der Prozess $v_0 + (\varphi^1, \dots \varphi^d) \bullet (S^1, \dots, S^d)$ ein Q-lokales Martingal ist. Aus der fast sicheren Nichtnegativität des Endwertes $v_0 + (\varphi^1, \dots \varphi^d) \bullet (S^1, \dots, S^d)_T = H$ und Proposition 2.11 folgt, dass $v_0 + (\varphi^1, \dots \varphi^d) \bullet (S^1, \dots, S^d)$ dann auch ein Q-Martingal ist. Insbesondere folgt Integrierbarkeit unter Q und damit $E_Q(H) < \infty$. Somit können wir den Prozess $t \mapsto E_Q(H \mid \mathcal{F}_t)$ einführen, der ebenso ein Q-Martingal ist. Es folgt sofort aus der Martingalbedingung und der Eindeutigkeit des bedingten Erwartungswertes, dass Martingale mit (fast sicher) gleichem Endwert auch vorher fast sicher übereinstimmen, also

$$E_Q(H \mid \mathcal{F}_t) = v_0 + (\varphi^1, \dots \varphi^d) \bullet (S^1, \dots, S^d)_t, \quad Q\text{-f.s.}$$

Dies liefert die Eindeutigkeit von $E_Q(H \mid \mathcal{F}_t)$ und von $v_0 + (\varphi^1, \dots \varphi^d) \bullet (S^1, \dots, S^d)_t$ (d.h. der erste Ausdruck hängt nicht von der Wahl von Q und der zweite nicht von der Wahl des Paars (v_0, φ) ab)[†]. Insbesondere ist wegen $(\varphi^1, \dots \varphi^d) \bullet (S^1, \dots, S^d)_0 = 0$ das Startkapital v_0, das zu Replikation benötigt wird, eindeutig (die Hedging-Strategie $(\varphi^1, \dots \varphi^d)$ ist dagegen i.A. nicht eindeutig).

(2) $\Leftrightarrow$ (3): gilt wegen Korollar 2.3 (unter $|\Omega| < \infty$).

(3) $\Rightarrow$ (1): Angenommen H ist nicht replizierbar, d.h. $H \notin U := \{c + (\varphi^1, \dots \varphi^d) \bullet (S^1, \dots, S^d)_T \mid c \in \mathbb{R}, \varphi \text{ ist vorhersehbar}\}$. Wir werden zeigen, dass dann schon der Derivatepreis zum Zeitpunkt 0 nicht eindeutig ist. Bezüglich des Skalarproduktes $(X, Y) := E_Q(XY)$ für ein beliebiges (aber festes) ÄMM Q betrachten wir nun die Projektion $H = H^U + H^{U^\perp}$. D.h. $H^U \in U$ und $E_Q\left(H^{U^\perp} X\right) = 0$ für alle $X \in U$. Da nach Voraussetzung $H^{U^\perp} \neq 0$ können wir das folgende Wahrscheinlichkeitsmaß $Q' \sim P$ definieren

$$Q'(\{\omega\}) := \left(1 + \frac{H^{U^\perp}(\omega)}{2 \sup_{\omega' \in \Omega} |H^{U^\perp}(\omega')|}\right) Q(\{\omega\}).$$

Für eine Zufallsvariable X gilt

$$E_{Q'}(X) = E_Q(X) + \frac{E_Q(H^{U^\perp} X)}{2 \sup_{\omega' \in \Omega} |H^{U^\perp}(\omega')|}.$$

Nach Konstruktion ist Q' positiv, d.h. $Q'(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$, und wegen $1 \in U$ gilt $E_Q(H^{U^\perp} 1) = 0$ und damit $Q'(\Omega) = E_{Q'}(1_\Omega) = E_Q(1_\Omega) = Q(\Omega) = 1$. Des weiteren gilt für alle Elemente $U \ni Z = c + (\varphi^1, \dots \varphi^d) \bullet (S^1, \dots, S^d)_T$, dass

$$E_{Q'}(Z) = E_Q(Z) + \frac{1}{2 \sup_{\omega' \in \Omega} |H^{U^\perp}(\omega')|} E_Q(H^{U^\perp} Z) = c + 0 = c. \tag{2.29}$$

Daher ist auch Q' ein ÄMM. Mit (2.29) gilt $E_{Q'}(H^U) = E_Q(H^U)$. Andererseits gilt $E_{Q'}(H^{U^\perp}) - E_Q(H^{U^\perp}) = \frac{1}{2 \sup_{\omega' \in \Omega} |H^{U^\perp}(\omega')|} E_Q\left((H^{U^\perp})^2\right) > 0$. Also $E_{Q'}(H) > E_Q(H)$. Aus Nicht-Replizierbarkeit des Claims folgt also, dass es verschiedene Martingalmaße gibt, bzgl. denen die Erwartungswerte des Claims unterschiedlich sind. $\square$

Definition 2.15. *Ein Marktmodell heißt* vollständig*, wenn jeder Claim H replizierbar ist*[‡]*.*

[†]Man beachte, dass Q und (v_0, φ) unabhängig voneinander variiert werden können.

[‡]Formal besteht ein Marktmodell aus einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}, P)$ und den stochastischen Prozessen $S^0, S^1, \dots, S^d$, die die Preisprozesse der handelbaren Wertpapiere beschreiben. Vollständigkeit bedeutet also, dass jede in dem Wahrscheinlichkeitsmodell mögliche Auszahlung H (also z.B. $H = 1_A$ für ein $A \in \mathcal{F}$) durch Handel in den verfügbaren Wertpapieren replizierbar ist.

Korollar 2.16 (2. Fundamentalsatz der Arbitragetheorie). *Ein arbitragefreies Marktmodell ist genau dann vollständig, wenn nur ein äquivalentes Martingalmaß existiert.*

Beweis. $\Leftarrow$: In einem arbitragefreien Marktmodell existiert zu jedem Claim H ein äquivalentes Martingalmaß Q mit $E_Q\left(\frac{H}{S_T^0}\right) < \infty$ (ohne Beweis). Da es nach Voraussetzung nur ein Martingalmaß gibt, muss $\frac{H}{S_T^0}$ unter diesem integrierbar sein. Aus (3) $\Rightarrow$ (1) in Satz 2.12 folgt die Replizierbarkeit von H.

$\Rightarrow$: Sei $A \in \mathcal{F}$. Wegen der Vollständigkeit lässt sich der Claim $H := S_T^0 1_A$ absichern (wenn A einelementig ist, nennt man ein Wertpapier mit Auszahlung H ein Arrow-Debreu Wertpapier). Nach (1) $\Rightarrow$ (3) in Satz 2.12 stimmt $E_Q\left(\frac{H}{S_T^0}\right) = Q(A)$ für alle ÄMM Q überein. Folglich gibt es nur ein ÄMM. □

Diskrete Modelle sind ,,fast immer" unvollständig. Ein Beispiel für ein *vollständiges* Modell ist das Cox-Ross-Rubinstein Modell (CRR Modell). Das CRR Modell ist eine dynamische Verallgemeinerung des Einperioden-Binomialmodells aus der Motivation.

Beispiel 2.17 (Cox-Ross-Rubinstein Modell). *Sei* $S_t^0 = (1+r)^t$, $r > -1$ *und*

$$S_t^1 = \prod_{i=1}^{t} A_i, \tag{2.30}$$

wobei $(A_i)_{i=0,\dots,T}$ *unabhängig und identisch verteilt sind mit* $P(A_i = u) = p$ *und* $P(A_i = d) = 1-p$, $0 < d < u$ *und* $p \in (0,1)$. *Also*

$$P(A_1 = x_1, \dots, A_T = x_T) = \prod_{i=1}^{T} P(A_i = x_i) = p^{\#\{i|x_i=u\}}(1-p)^{\#\{i|x_i=d\}}, \quad \forall x_i \in \{d,u\}.$$

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ *und* $\mathcal{F}_t = \sigma(A_1, \dots, A_t)$, $t > 0$. *Die No-Arbitrage-Bedingung für das Modell lautet*

$$d < 1 + r < u. \tag{2.31}$$

Gehe nun zu einem neuen Maß $Q \sim P$ *über mit*

$$Q(A_1 = x_1, \dots, A_T = x_T) = q^{\#\{i|x_i=u\}}(1-q)^{\#\{i|x_i=d\}}, \quad \forall x_i \in \{d,u\}. \tag{2.32}$$

Beachte, dass die A_i *(auch) unter dem so definierten Maß* Q *stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind.* $\widehat{S}_t^1 = (1+r)^{-t} S_t^1$ *ist genau dann ein* Q*-Martingal, wenn*

$$qu + (1-q)d = 1 + r, \tag{2.33}$$

d.h.

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} \in (0, 1). \tag{2.34}$$

$A_i - 1$ ist die stochastische Rendite $:= \frac{S_i^1 - S_{i-1}^1}{S_{i-1}^1}$ in der i-ten Periode. Bei der Rendite setzt man den i.A. zufälligen Gewinn einer Investition ins Verhältnis zum **gebundenen Kapital**. *Im Modell (2.30) sind die Renditen in verschiedenen Perioden also unabhängig und identisch verteilt.*

Proposition 2.18. *Wenn die Bedingung (2.31) erfüllt ist, dann gibt es im CRR-Modell genau ein äquivalentes Martingalmaß.*

Proof. Es ist offensichtlich, dass Q aus (2.32) mit q aus (2.34) ein äquivalentes Martingalmaß ist. Bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei dazu $\widetilde{Q}$ ein weiteres äquivalentes Martingalmaß. Aus $E_{\widetilde{Q}}(\widehat{S}_1^1 - \widehat{S}_0^1) = 0$, folgt

$$\widetilde{Q}(A_1 = u)u + \widetilde{Q}(A_1 = d)d = 1 + r$$

und damit $\widetilde{Q}(A_1 = u) = q$ und $\widetilde{Q}(A_1 = d) = 1 - q$ für das q aus (2.34). Des weiteren gilt für $x_1 \in \{d, u\}$

$$E_{\widetilde{Q}}\left(1_{\{A_1 = x_1\}}\left(\widehat{S}_2^1 - \widehat{S}_1^1\right)\right) = 0$$

und damit

$$\widetilde{Q}(A_1 = x_1, A_2 = u)u + \widetilde{Q}(A_1 = x_1, A_2 = d)d = \widetilde{Q}(A_1 = x_1)(1 + r).$$

Analog zu oben folgt

$$\widetilde{Q}(A_1 = x_1, A_2 = u) = \widetilde{Q}(A_1 = x_1)q$$

und

$$\widetilde{Q}(A_1 = x_1, A_2 = d) = \widetilde{Q}(A_1 = x_1)(1 - q)$$

und damit

$$\widetilde{Q}(A_1 = x_1, A_2 = x_2) = q^{\#\{i \in \{1,2\} | x_i = u\}}(1 - q)^{\#\{i \in \{1,2\} | x_i = d\}}, \quad \forall x_i \in \{d, u\}.$$

Schließlich folgt mit Induktion, dass $\widetilde{Q}$ mit dem Maß Q aus (2.32) übereinstimmen muss.

□

Wegen Korollar 2.16 folgt aus der Eindeutigkeit des Martingalmaßes im Cox-Ross-Rubinstein Modell, dass jeder Claim replizierbar ist. Wir wollen die Replizierbarkeit jedoch nochmal unabhängig beweisen, da dies zusätzliche Einsichten in das Hedgen im CRR-Modell liefert.

Satz 2.19 (Martingaldarstellungssatz). *Sei Bedingung (2.33) erfüllt, d.h. $\widehat{S}^1$ ist ein Q-Martingal. Dann gibt es für* **jedes** *Q-Martingal M einen vorhersehbaren Prozess $(H_t)_{t=1,\dots,T}$, so dass $M = M_0 + H \bullet \widehat{S}^1$.*

Beweis. Da ΔM_t $\sigma(A_1 \dots, A_t)$-messbar ist, gibt es eine Funktion $f_t : \{d, u\}^t \to \mathbb{R}$ mit $\Delta M_t = f_t(A_1, \dots, A_t)$. Da M ein Q-Martingal ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= E_Q(\Delta M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= E_Q\left(f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, u)1_{\{A_t=u\}} + f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, d)1_{\{A_t=d\}} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= q f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, u) + (1-q) f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, d) \end{aligned}$$

und damit

$$f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, d) = \frac{-q}{1-q} f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, u) \tag{2.35}$$

Wähle nun

$$H_t := \frac{f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, u)}{\left(\frac{u}{1+r} - 1\right)(1+r)^{-(t-1)} \prod_{i=1}^{t-1} A_i} \quad t \geq 1 \tag{2.36}$$

Offenbar ist H_t $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar und wegen

$$\Delta \widehat{S}_t^1 = \left(\frac{A_t}{1+r} - 1\right) \frac{\prod_{i=1}^{t-1} A_i}{(1+r)^{t-1}},$$

(2.35) und (2.34) rechnet man leicht nach, dass

$$H_t \Delta \widehat{S}_t^1 = f_t(A_1 \dots, A_t) = \Delta M_t.$$

Es gilt nämlich für $A_t = u$

$$H_t \Delta \widehat{S}_t^1 = \frac{f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, u)}{\left(\frac{u}{1+r} - 1\right)(1+r)^{-(t-1)} \prod_{i=1}^{t-1} A_i} \left(\frac{u}{1+r} - 1\right) \frac{\prod_{i=1}^{t-1} A_i}{(1+r)^{t-1}} = f_t(A_1 \dots, A_{t-1}, u)$$

und für $A_t = d$

$$\begin{aligned}
H_t\Delta\widehat{S}_t^1 &= \frac{f_t(A_1\ldots,A_{t-1},u)}{\left(\frac{u}{1+r}-1\right)(1+r)^{-(t-1)}\prod_{i=1}^{t-1}A_i}\left(\frac{d}{1+r}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{t-1}A_i}{(1+r)^{t-1}} \\
&= f_t(A_1\ldots,A_{t-1},u)\frac{\frac{d}{1+r}-1}{\frac{u}{1+r}-1} \\
&\overset{(2.34)}{=} f_t(A_1\ldots,A_{t-1},u)\frac{-q}{1-q} \\
&\overset{(2.35)}{=} f_t(A_1\ldots,A_{t-1},d).
\end{aligned}$$

□

Sei H nun ein beliebiger europäischer Claim im Cox-Ross-Rubinstein Modell, d.h. eine Abbildung $\{d,u\}^T \to \mathbb{R}_+$. Wie kann man H nun hedgen ? Definiere das Q-Martingal M durch seinen Endwert $M_T = \frac{H}{(1+r)^T}$, d.h. $M_t = E_Q\left(\frac{H}{(1+r)^T}|\mathcal{F}_t\right)$ dann gibt es nach Satz 2.19 einen reellwertigen vorhersehbaren Prozess $(\varphi_t^1)_{t=1,\ldots,T}$ mit $E_Q\left(\frac{H}{(1+r)^T}\right)+\varphi^1\bullet\widehat{S}_T^1 = \frac{H}{(1+r)^T}$.

φ^1 ist also die Anzahl der risikobehafteten Aktien S^1, die man im Portfolio hält um sich gegen den Claim H (perfekt) abzusichern. Der Anteil φ^0 an dem risikolosen Bankkonto ergibt sich dann durch die Selbstfinanzierungsbedingung (vgl. (1.16))

$$\varphi_t^0 = E_Q\left(\frac{H}{(1+r)^T}|\mathcal{F}_{t-1}\right) - \varphi_t^1\widehat{S}_{t-1}^1.$$

Nun wollen wir damit eine europäische Call-Option bewerten, also $S_T^2 = (S_T^1-K)^+$. Wir wissen, dass sich der eindeutige No-Arbitrage-Preis zum Zeitpunkt t durch die Formel

$$S_t^2 = (1+r)^{-(T-t)}E_Q((S_T^1-K)^+|\mathcal{F}_t)$$

ergibt, wobei das Maß Q in (2.32) definiert ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
S_t^2 &= (1+r)^{-(T-t)}E_Q((S_T^1-K)^+|\mathcal{F}_t) \\
&= (1+r)^{-(T-t)}E_Q((S_t^1\prod_{i=t+1}^{T}A_i-K)^+|\mathcal{F}_t) \\
&= (1+r)^{-(T-t)}E_Q\left(\sum_{j=0}^{T-t}1_{\left\{\prod_{i=t+1}^T A_i=u^jd^{T-t-j}\right\}}(S_t^1u^jd^{T-t-j}-K)^+|\mathcal{F}_t\right) \\
&= (1+r)^{-(T-t)}\sum_{j=0}^{T-t}(S_t^1u^jd^{T-t-j}-K)^+E_Q\left(1_{\left\{\prod_{i=t+1}^T A_i=u^jd^{T-t-j}\right\}}|\mathcal{F}_t\right) \\
&= (1+r)^{-(T-t)}\sum_{j=0}^{T-t}\begin{pmatrix}T-t\\ j\end{pmatrix}q^j(1-q)^{T-t-j}\left(S_t^1u^jd^{T-t-j}-K\right)^+. \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Proposition 2.20. *Wenn $S_T^2 = H = g(S_T^1)$, wobei g eine nichtfallende Funktion ist (z.B. $g(x) = (x-K)^+$), dann ist $\varphi^1 \geq 0$, d.h. die (im Cox-Ross-Rubinstein Modell eindeutige) Hedging-Strategie benötigt keine Leerverkäufe in der Aktie. Analog folgt für nichtsteigende Funktionen g (z.B. $g(x) = (K-x)^+$), dass $\varphi^1 \leq 0$.*

Beweis. Das Martingal aus Satz 2.19 ist gegeben durch $M_t = (1+r)^{-T} E_Q(g(S_T^1)|\mathcal{F}_t)$. Wie in der Rechnung (2.37) folgt $(1+r)^{-T} E_Q(g(S_T^1)|\mathcal{F}_t) = h_t(S_t^1)$ mit

$$h_t(s) = (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^{T-t} \binom{T-t}{j} q^j (1-q)^{T-t-j} g(su^j d^{T-t-j}).$$

Offenbar sind mit g auch die Funktionen $s \mapsto h_t(s)$ nichtfallend. Damit ist $M_t = h_t(S_{t-1}^1 A_t)$ nichtfallend in A_t, d.h. für f_t aus dem Beweis von Satz 2.19 gilt

$$\begin{aligned} f_t(A_1, \ldots, A_{t-1}, u) &= h_t(S_{t-1}^1 u) - h_{t-1}(S_{t-1}^1) \\ &\geq h_t(S_{t-1}^1 d) - h_{t-1}(S_{t-1}^1) \\ &= f_t(A_1, \ldots, A_{t-1}, d) \end{aligned}$$

und damit

$$f_t(A_1, \ldots, A_{t-1}, u) \geq 0 \geq f_t(A_1, \ldots, A_{t-1}, d).$$

Dies bedeutet für den Integranden in Satz 2.19, dass $0 \leq H_t = \varphi_t^1$. □

3 Portfoliooptimierung

3.1 Einschub: Maßwechsel

Definition 3.1. *Sei $Q \sim P$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Unter dem* **Dichteprozeß** *von Q bzgl. P versteht man den Prozess $(Z_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ mit*

$$Z_t = E_P\left(\tfrac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t\right),$$

wobei die nichtnegative Zufallsvariable $\frac{dQ}{dP}$ die Radon-Nikodym-Ableitung von Q nach P bezeichnet, d.h. $Q(A) = E_P(1_A \frac{dQ}{dP})\ \forall A \in \mathcal{F}$ (vgl. Satz 0.35). Insbesondere gilt $E_P\left(\frac{dQ}{dP}\right) = Q(\Omega) = 1$.

Proposition 3.2. *Z ist ein P-f.s. (strikt) positives P-Martingal mit $Z_0 = 1$ und $Z_T = \frac{dQ}{dP}$.*

Proof. Für die Menge $\left\{\frac{dQ}{dP} = 0\right\} \in \mathcal{F}$ gilt

$$Q\left(\left\{\frac{dQ}{dP} = 0\right\}\right) = E_P\left(1_{\left\{\frac{dQ}{dP}=0\right\}}\frac{dQ}{dP}\right) = 0$$

und damit wegen $Q \sim P$

$$\frac{dQ}{dP} > 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Man beachte, dass für ein Martingal X die Implikation

$$P(X_T > 0) = 1 \implies P(X_t > 0) = 1, \quad \forall t \in \{0, 1, \ldots, T\}$$

gilt (folgt analog zum Beweis von Proposition 2.11). Wegen $E_P\left(\frac{dQ}{dP}\right) = 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ folgt die Behauptung. □

Proposition 3.3. *Für jede nichtnegative Zufallsvariable H gilt*

$$E_Q(H) = E_P(HZ_T) \tag{3.38}$$

(wobei der Fall $\infty = \infty$ nicht ausgeschlossen ist) und für jede Zufallsvariable H gilt $H \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, Q) \Leftrightarrow HZ_T \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Proof. Man zeige (3.38) zunächst für Elementarfunktionen $H = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k}$. Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt nämlich

$$\begin{aligned} E_Q\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k}\right) &= \sum_{k=1}^n \alpha_k Q(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k E_P\left(1_{A_k} Z_T\right) \\ &= E_P\left(\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k}\right) Z_T\right). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Nun approximiert man ein beliebiges $H \geq 0$ durch elementare H^n, wobei

$$H^n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{\{(k-1)2^{-n} \leq H < k2^{-n}\}}.$$

H^n steigt für $n \to \infty$ punktweise gegen H auf (und damit auch $H^n Z_T$ gegen HZ_T). Es folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und (3.39)

$$E_Q(H) = \lim_{n\to\infty} E_Q(H^n) = \lim_{n\to\infty} E_P(H^n Z_T) = E_P(HZ_T).$$

□

Proposition 3.4. *Für jede Zufallsvariable H mit $E_Q(|H|) < \infty$ und $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ gilt*

$$E_Q(H \mid \mathcal{F}_t) = \frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t}.$$

Proof. Die Zufallsvariable $\frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t}$ ist $\mathcal{F}_t$-messbar. Des weiteren gilt für alle $A \in \mathcal{F}_t$

$$\begin{aligned}
E_Q\left(1_A \frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t}\right) &= E_P\left(1_A \frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t} Z_T\right) \\
&= E_P\left(E_P\left(1_A \frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t} Z_T \mid \mathcal{F}_t\right)\right) \\
&= E_P\left(1_A \frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t} E_P\left(Z_T \mid \mathcal{F}_t\right)\right) \\
&= E_P\left(1_A \frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t} Z_t\right) \\
&= E_P\left(E_P(1_A HZ_T \mid \mathcal{F}_t)\right) \\
&= E_P\left(1_A HZ_T\right) \\
&= E_Q\left(1_A H\right).
\end{aligned}$$

Damit erfüllt die Zufallsvariable $\frac{E_P(HZ_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t}$ die Bedingungen, die den bedingten Erwartungswert von H unter der Information $\mathcal{F}_t$ bzgl. des Maßes Q charakterisieren. □

Proposition 3.5. *Sei $Q \sim P$ und $Z_t = E_P(\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t)$ der zugehörige Dichteprozess. Ein adaptierter Prozess X ist genau dann ein Q-(lokales) Martingal, wenn der Prozess XZ ein P-(lokales) Martingal ist.*

Proof. Schritt 1: Zunächst soll die Aussage ohne „lokal" gezeigt werden. Wegen $Z \geq 0$ gilt *ohne Voraussetzung von Integrierbarkeit*

$$\begin{aligned}
E_Q(|X_t|) &= E_P(Z_T|X_t|) \\
&= E_P\left(E_P\left(Z_T|X_t| \mid \mathcal{F}_t\right)\right) = E_P\left(|X_t| E_P\left(Z_T \mid \mathcal{F}_t\right)\right) = E_P\left(|X_t| Z_t\right) \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Die bedingten Erwartungswerte in (3.40) sind wegen Nichtnegativität stets wohldefiniert und der „Satz vom iterierten Erwartungswert" gilt (ohne Endlichkeit des bedingten Erwartungswertes vorauszusetzen). Aus (3.40) folgt die Äquivalenz

$$E_Q(|X_t|) < \infty \quad t = 1, \dots, T \quad \Leftrightarrow \quad E_P(|X_t Z_t|) < \infty \quad t = 1, \dots, T.$$

Unter dieser Integrierbarkeitsbedingung gilt

$$\begin{aligned}
X\ Q\text{-Martingal} \quad &\Leftrightarrow \quad E_Q(1_A(X_t - X_s)) = 0, \quad \forall s \leq t,\ A \in \mathcal{F}_s \\
&\Leftrightarrow \quad E_P(1_A(X_t - X_s)Z_T) = 0, \quad \forall s \leq t,\ A \in \mathcal{F}_s \\
{\scriptstyle \begin{array}{l} E[1_A X_s Z_T] \\ = E[1_A X_s E(Z_T \mid \mathcal{F}_s)] \\ = E[1_A X_s Z_s] \end{array}} \rightarrow \quad &\Leftrightarrow \quad E_P(1_A(X_t Z_t - X_s Z_s)) = 0, \quad \forall s \leq t,\ A \in \mathcal{F}_s \\
&\Leftrightarrow \quad XZ \text{ ist } P\text{- Martingal}
\end{aligned}$$

Schritt 2: Bleibt die entsprechende Äquivalenz für lokale Martingale zu zeigen. Da P und Q die gleichen Nullmengen haben, ändert sich die Menge der lokalisierenden Folgen von Stoppzeiten nicht und es gilt

$$\begin{aligned}
X \text{ ist } Q\text{-lokales Martingal} \quad &\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \quad \exists \text{ lokalisierende Folge } (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } X^{T_n} \text{ ist } Q\text{-Mart.} \\
&\overset{\text{Schritt 1}}{\Leftrightarrow} \quad \exists \text{ lokalisierende Folge } (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } X^{T_n}Z \text{ ist } P\text{-Mart.}
\end{aligned}$$

Aus der Aussage „$X^{T_n}Z$ sind P-Martingale" folgt offenbar, dass auch die Prozesse $X^{T_n}Z^{T_n}$ P-Martingale sind (da $X^{T_n}Z^{T_n} = (X^{T_n}Z)^{T_n}$ und abgestoppte Martingale wieder Martingale sind, siehe Aufgabe 3 auf Übungsblatt 1). Damit wäre XZ ein P-lokales Martingal. Für die Umkehrung bleibt noch zu zeigen, dass unter der Voraussetzung, dass $X^{T_n}Z^{T_n}$ P-Martingale sind, auch die Differenzprozesse

$$X^{T_n}\left(Z - Z^{T_n}\right) \tag{3.41}$$

P-Martingal sind. Wie Schritt 2 im Beweis von Proposition 2.10 zeigt, ist ein lokales Martingal genau dann ein Martingal, wenn der Absolutbetrag des Prozesses einen endlichen Erwartungswert besitzt. Da (3.41) offenbar für festes $n \in \mathbb{N}$ ein lokales Martingal mit Lokalisierungsfolge $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$,

$$\tau_m := \begin{cases} T_n : \text{wenn } |X_{T_n}| > m \\ T \ \ : \text{wenn } |X_{T_n}| \leq m \end{cases}$$

ist, bleibt zu zeigen, dass

$$E\left(|X_t^{T_n}|Z_t\right) \stackrel{!}{<} \infty, \quad t = 0, 1, \ldots, T \tag{3.42}$$

(von $|X_t^{T_n}|Z_t^{T_n}$ wissen wir die Integrierbarkeit bereits). (3.42) folgt aus einer ähnlichen Rechnung wie in (3.40), nämlich

$$\begin{aligned} E_P(|X_{T_n\wedge t}Z_t|) &= E_P(|X_{T_n\wedge t}|Z_t) \\ &= E_P\left(E_P(|X_{T_n\wedge t}|Z_t \mid \mathcal{F}_{T_n\wedge t})\right) \\ &= E_P\left(|X_{T_n\wedge t}|E_P(Z_t \mid \mathcal{F}_{T_n\wedge t})\right) \\ &= E_P\left(|X_{T_n\wedge t}|Z_{T_n\wedge t}\right) < \infty, \end{aligned}$$

wobei die Endlichkeit von $E_P\left(|X_{T_n\wedge t}|Z_{T_n\wedge t}\right)$ gilt, da vorausgesetzt wurde, dass der Prozess $X^{T_n}Z^{T_n}$ ein P-Martingal ist. □

Ende Einschub

Wir gehen nun von einer Agentin aus, die unter gegebenen Marktbedingungen „möglichst viel" aus ihrem Startkapital $v_0 \in \mathbb{R}$ machen möchte. Sie kann dabei in die am Markt verfügbaren Wertpapiere mit stochastischen Preisprozessen $S^0, \ldots, S^d$ investieren.

In diesem Abschnitt gehen wir o.B.d.A. davon aus, dass $S^0 = 1$. Wir fangen also schon gleich mit den diskontierten Größen an.

Da wir Arbitragefreiheit voraussetzen wollen, kann die Agentin ihr Startvermögen v_0 nicht mit Wahrscheinlichkeit 1 vermehren. Sie hat die Möglichkeit alles in S^0 zu investieren, so dass ihr Endvermögen gleich v_0 wäre. Möchte Sie mehr erreichen, muss sie riskieren, zum Zeitpunkt T eventuell weniger als v_0 zu haben. Welches zufällige Endvermögen ist nun unter allen realisierbaren Endvermögen $V_T(\varphi) = v_0 + \varphi \bullet S_T$ das optimale ? Um dies beurteilen zu können, braucht man ein Kriterium, das verschiedene zufällige Auszahlungen miteinander vergleicht. Eine erste Idee wäre, zufällige Endwerte $V_T(\varphi)$ gemäß ihrer Erwartungswerte $E_P(V_T(\varphi))$ zu ordnen. Dieses Kriterium würde aber das Risiko einer Anlagemöglichkeit völlig ausblenden. Ein hochspekulatives Investment würde einer risikolosen Anlage bereits dann vorgezogen, wenn sein erwarteter Gewinn geringfügig größer wäre. Da die meisten Menschen risikoscheu sind, wäre dies wenig sinnvoll. Die ,,Risikoaversion" der Agentin kann auf verschiedene Art und Weise in das Optimierungskriterium einfließen. In Abschnitt 3.2 geschieht dies auf eine recht direkte Weise, in Abschnitt 3.3 eher indirekt.

3.2 Mittelwert-Varianz-Optimierung

Ein in der Praxis recht verbreiteter Ansatz ist die *Markowitz-Optimierung* (Mittelwert-Varianz-Optimierung)

(1) Sei $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Maximiere $E(V_T(\varphi))$ über alle selbstfinanzierenden Strategien φ mit $\mathrm{Var}(V_T(\varphi)) = \sigma^2$.

(2) Sei $\mu \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Minimiere $\mathrm{Var}(V_T(\varphi))$ über alle selbstfinanzierenden Strategien φ mit $E(V_T(\varphi)) = v_0 + \mu$.

Satz 3.6. *Sei* $|\Omega| < \infty$*. Eine Strategie, die das Markowitz-Problem* (2) *für ein* $\mu \in \mathbb{R}_+$ *löst, löst auch das Problem* (1) *für ein* $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$*. Solche Strategien heißen* **Mittelwert-Varianz-effizient**.

Die Umkehrung gilt offenbar nicht. Nehme dazu das Cox-Ross Rubinstein Modell, Beispiel 2.17, mit $pu + (1-p)d = 1$ (d.h. die Aktie ist bereits unter P ein Martingal und $Q = P$). Alle erzielbaren Endvermögen haben dann den Erwartungswert v_0. D.h. *jede* Strategie φ mit $\mathrm{Var}(V_T(\varphi)) = \sigma^2$ löst Problem (1). Wenn $\mathrm{Var}(V_T(\varphi)) > 0$, dann ist φ aber keine Lösung für Problem (2). Da alle realisierbaren Endvermögen den Erwartungswert v_0 besitzen, kann der Fall $\mu \neq 0$ ausgeschlossen werden. Für $\mu = 0$ liefert aber die selbstfinanzierende Strategie $\widetilde{\varphi}$ mit $\widetilde{\varphi}^i = 0$, $i = 1, \dots, d$, das konstante Endvermögen v_0 und damit bereits $\mathrm{Var}(V_T(\widetilde{\varphi})) = 0$.

Wenn *nicht* alle S^i Martingale sind (wenn sich also Handelsgewinne mit positivem Erwartungswert generieren lassen), gilt aber auch die Umkehrung von Satz 3.6.

Beweis von Satz 3.6. Sei φ zu gegebenem $\mu \in \mathbb{R}_+$ eine varianzminimierende Strategie. Wir zeigen, dass φ zu gegebenem $\sigma^2 := \mathrm{Var}(V_T(\varphi))$ erwartungswertmaximierend ist.

1. Fall $\sigma^2 = 0$. Für jede Strategie $\widetilde{\varphi}$ mit $\mathrm{Var}(V_T(\widetilde{\varphi})) = 0$ gilt $P(V_T(\widetilde{\varphi}) = E(V_T(\widetilde{\varphi}))) = 1$. Da der Markt arbitragefrei ist, impliziert dies $E(V_T(\widetilde{\varphi}))) = v_0$. Ohne Risiko kann also nicht mehr als v_0 herauskommen und φ ist Lösung von Problem (1) mit vorgegebener Varianz $= 0$.

2. Fall: $\sigma^2 > 0$. Da φ (2) löst und der Erwartungswert v_0 bereits ohne Varianz erreicht werden kann folgt $\mu > 0$. Angenommen, es existiert eine selbstfinanzierende Strategie $\widetilde{\varphi}$ mit $\mathrm{Var}(V_T(\widetilde{\varphi})) = \sigma^2$ und $\widetilde{\mu} := E(V_T(\widetilde{\varphi})) - v_0 > \mu$. Wähle eine selbstfinanzierende Strategie ψ mit Startkapital $V_0(\psi) = v_0$ und $\psi^i := \frac{\mu}{\widetilde{\mu}}\widetilde{\varphi}^i$ für $i = 1, \ldots, d$. Dann ist $E(V_T(\psi)) = v_0 + \mu$ und $\mathrm{Var}(V_T(\psi)) = \left(\frac{\mu}{\widetilde{\mu}}\right)^2 \mathrm{Var}(V_T(\widetilde{\varphi}) = \left(\frac{\mu}{\widetilde{\mu}}\right)^2 \sigma^2 < \sigma^2$ im Widerspruch zur Optimalität von φ. □

Beispiel 3.7 (Markowitz-Optimierung für $T = 1$)**.** *Im Einperiodenmodell sind vorhersehbare Strategien lediglich reellwertige Vektoren, d.h. $\varphi = \varphi_1 \in \mathbb{R}^d$. Die nullte Komponente φ_1^0 ergibt sich wie üblich aus der Selbstfinanzierungsbedingung und kommt hier deshalb nicht explizit vor.*

Beachte, dass $E(V_1(\varphi)) = v_0 + \sum_{i=1}^d \varphi^i E(\Delta S_1^i)$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(V_1(\varphi)) &= \sum_{i,j=1}^d \varphi^i \varphi^j \mathrm{Cov}(\Delta S_1^i, \Delta S_1^j) \\ &= \sum_{i,j=1}^d \varphi^i \varphi^j \mathrm{Cov}(S_1^i, S_1^j). \end{aligned}$$

Das Problem (1) ist also in diesem Beispiel folgendes **endlichdimensionales Maximierungsproblem**

$$\sum_{i=1}^d \varphi^i E(\Delta S_1^i) \quad \max_{(\varphi^1,\ldots,\varphi^d)\in\mathbb{R}^d}! \quad \textit{unter der Nebenbedingung:} \quad \sum_{i,j=1}^d \varphi^i \varphi^j \mathrm{Cov}(S_1^i, S_1^j) = \sigma^2$$

Ableiten der Zielfunktion und der Nebenbedingung nach φ^k ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^d \varphi^i E(\Delta S_1^i)\right)}{\partial \varphi^k} &= E(\Delta S_1^k) \\ \frac{\partial \left(\sum_{i,j=1}^d \varphi^i \varphi^j \mathrm{Cov}(\Delta S_1^i, \Delta S_1^j)\right)}{\partial \varphi^k} &= 2\sum_{j=1}^d \varphi^j \mathrm{Cov}(\Delta S_1^k, \Delta S_1^j), \quad k = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

Es ergeben sich folgende Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung (die notwendig und hinreichend für die Optimalität von $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ sind):

$$E(\Delta S_1^k) - 2\lambda \sum_{j=1}^{d} \varphi^j \mathrm{Cov}(S_1^k, S_1^j) = 0, \quad k = 1, \dots, d,$$

oder äquivalent

$$E(\Delta S_1^k) - 2\lambda \mathrm{Cov}(S_1^k, V_1(\varphi)) = 0, \quad k = 1, \dots, d,$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. λ ist der Lagrange Multiplikator zu der Nebenbedingung $\mathrm{Var}(V_T(\varphi) = \sigma^2$ (siehe z.B. Forster [6], Satz I.8.4). Definiere die Kovarianzmatrix $C = (C_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ des Zufallsvektors $(S_1^1, \dots, S_1^d)$ durch $C_{i,j} := \mathrm{Cov}(S_1^i, S_1^j)$. C ist offenbar symmetrisch. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass C positiv definit ist (andernfalls gebe es redundante Wertpapiere, die man herausnehmen könnte). Definiere den Vektor $b \in \mathbb{R}^d$ durch $b_i := E(\Delta S_1^i)$ $i = 1, \dots, d$. Die optimale Strategie φ ergibt sich als Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$2C(\lambda\varphi) = b \tag{3.43}$$

$$\varphi^\top C \varphi = \sigma^2 \tag{3.44}$$

Wir setzen voraus, dass $b \neq 0$ (d.h. nicht alle Komponenten des Vektors b verschwinden).

In (3.43) geht σ^2 offenbar nicht ein. Löst man (3.43) nach φ auf, so erhält man

$$\varphi = \frac{1}{2\lambda} C^{-1} b.$$

Eingesetzt in (3.44) folgt

$$\lambda^2 = \frac{b^\top C^{-1} b}{4\sigma^2}$$

und damit

$$\varphi = \frac{\sigma}{\sqrt{b^\top C^{-1} b}} C^{-1} b. \tag{3.45}$$

Der optimale Vektor (3.45) hängt offenbar nur über einen Vorfaktor von der erlaubten Varianz σ^2 (entspricht der Risikoaversion der Agentin) ab. Zu jedem vorgegebenen σ^2 ist es also optimal, φ als ein Vielfaches von $C^{-1}b$ zu wählen.

Das optimale Portfolio lässt sich also stets als Vielfaches einer Investition in das risikobehaftete **Referenzportfolio** *mit Wert* $\sum_{i=1}^{d} \widetilde{\varphi}^i S^i$*, wobei* $\widetilde{\varphi}^i$ *die i-te Komponenete von* $C^{-1}b$ *bezeichnet, gewinnen**. *D.h. nur die Anzahl mit der das Referenzportfolio gekauft wird, hängt von der Risikoaversion ab. Diese Aussage bezeichnet man in der Literatur auch als "***mutual fund theorem***". In einer Welt, die nur aus Mittelwert-Varianz Optimierern besteht (mit möglicherweise unterschiedlichen Risikoaversionen), braucht man also neben einem risikolosen Bond nur einen einzigen Investmentfonds, um den Bedürfnissen aller Anleger gerecht zu werden.*

Eine extrem risikoaverse Agentin ($\sigma^2 = 0$) *würde nur in* S^0 *investieren, d.h.* $\varphi = 0$ *und* $\lambda = \infty$. *Währenddessen würde eine risikotolerante Agentin* (σ^2 *groß) viel in das risikobehaftete Referenzportfolio investieren (eventuell sogar bei einer Shortposition in* S^0*), d.h. der Vorfaktor* $\frac{\sigma}{\sqrt{b^\top C^{-1} b}}$ *ist groß und* λ *ist klein.*

Gibt man sich umgekehrt eine erwartete Rendite $\mu > 0$ *vor und möchte die Varianz minimieren, also*

$$\min_{\widetilde{\varphi} \in \mathbb{R}^d} \widetilde{\varphi}^\top C \widetilde{\varphi} \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \widetilde{\varphi}^\top b = \mu$$

dann führt dies auf das Gleichungssystem

$$2C\varphi - \widetilde{\lambda} b = 0 \quad \text{und} \quad \varphi^\top b = \mu$$

und damit auf die optimale Strategie

$$\widetilde{\varphi} = \frac{\mu}{b^\top C^{-1} b} C^{-1} b, \tag{3.46}$$

mit Varianz

$$\widetilde{\varphi}^\top C \widetilde{\varphi} = \frac{\mu^2}{(b^\top C^{-1} b)^2} (C^{-1} b)^\top C C^{-1} b = \frac{\mu^2}{b^\top C^{-1} b}. \tag{3.47}$$

Bemerkung 3.8. *Ein konzeptioneller Nachteil der Mittelwert-Varianz Optimierung ist die fehlende Monotonie im folgenden Sinne. Eine Strategie* $\widetilde{\varphi}$ *mit* $P(V_T(\widetilde{\varphi}) > V_T(\varphi)) = 1$

*Man beachte, dass der verbleibende Rest des (vorgegebenen) Startkapitals v_0 stillschweigend in die risikolose Anlage S^0 investiert wird. Man kann also auch von einer Linearkombination einer Investition in S^0 und in $\sum_{i=1}^{d} \widetilde{\varphi}^i S^i$ reden.

würde nicht notwendigerweise der Strategie φ vorgezogen, da $V_T(\widetilde{\varphi})$ eine höhere Varianz als $V_T(\varphi)$ haben könnte.

Sind jedoch im Einperiodenmodell die Preise $(S_1^1, \dots, S_1^d)$ zum Beispiel multivariat normalverteilt, dann gilt Monotonie, d.h. aus

$$P(V_1(\widetilde{\varphi}) > V_1(\varphi)) = 1 \tag{3.48}$$

folgt, dass ein Mittelwert-Varianz-Optimierer die Strategie $\widetilde{\varphi}$ der Strategie φ vorziehen würde. Die multivariate Normalverteilung des Zufallsvektors $(S_1^1, \dots, S_1^d)$ impliziert nämlich, dass $V_1(\widetilde{\varphi})$ und $V_1(\varphi)$ normalverteilt sind. (3.48) ist dann nur möglich, wenn $\mathrm{Var}(V_1(\widetilde{\varphi})) = \mathrm{Var}(V_1(\varphi))$ und $E(V_1(\widetilde{\varphi})) > E(V_1(\varphi))$ (wieso ?). Man beachte jedoch, dass selbst wenn Aktien (multivariat) normalverteilt sind, Auszahlungen von Optionen auf die Aktien dies wegen der Nichtlinearität der Auszahlungsfunktion nicht mehr sind, so dass die Klasse der Normalverteilung schnell verlassen wird.

Bemerkung 3.9 (Diversifikation). *Zum einen versuchen die optimalen Strategien (3.45) bzw. (3.46) einen guten Kompromiss zwischen einer möglichst hohen erwarteten Rendite und einem möglichst geringen ,,Risiko" im Sinne der Varianz zu finden. Zum anderen werden die verfügbaren Wertpapiere gemischt, um das Risiko zu streuen und damit zu verringern. Letzteres nennt man Diversifikation. Um Diversifikation zu analysieren, betrachte man den Fall, dass $d = 2$, $S_0^1 = S_0^2 = 1$ und beide risikobehafteten Wertpapiere haben den gleichen erwarteten Zuwachs $\mu_1 > 0$ und die gleiche Varianz $\sigma^2 > 0$, also $b^\top = (\mu_1, \mu_1)$ und*

$$C = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix},$$

wobei $\rho \in [-1, 1]$ die Korrelation zwischen den Wertpapieren bezeichnet, also

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(\mathrm{S}_1^1, \mathrm{S}_1^2)}{\sigma^2}.$$

Da C invertierbar sein soll, müssen die Grenzfälle $\rho = 1$ und $\rho = -1$ ausgeschlossen werden.

Mit der Formel

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $ad \neq bc$ folgt

$$C^{-1} = \frac{1}{\sigma^4(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma^2 & -\rho\sigma^2 \\ -\rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

Also gilt

$$(\mu_1, \mu_1)C^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \frac{2\mu_1^2}{\sigma^2(1-\rho^2)}(1-\rho) = \frac{2\mu_1^2}{\sigma^2(1+\rho)}.$$

Für die minimale erreichbare Varianz in (3.47) folgt

$$\frac{\mu^2\sigma^2(1+\rho)}{2\mu_1^2}.$$

Der Fall $\rho = 1$, der formal ausgeschlossen ist, würde keine Verbesserung zum Fall bringen, dass es statt zweien nur ein risikobehaftete Wertpapiere gäbe. Der Fall $\rho = -1$ würde dagegen sogar eine Arbitrage liefern (mehr noch: eine Gewinnmöglichkeit ohne Unsicherheit), da $\mu_1 > 0$. Allgemein ist die minimale Varianz steigend in der Korrelation ρ. Ein Portfoliomanager sollte also nach Aktien suchen, die untereinander negativ korreliert sind.

3.2.1 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Wenn alle Investoren Mittelwert-Varianz-Optimierer sind, halten also alle ein Vielfaches des risikolosen Wertpapiers S^0 und ein positives Vielfaches der Strategie $C^{-1}b$ in den Wertpapieren $S^1, \dots, S^d$ in ihrem Portfolio. Im Umkehrschluss muss im Gleichgewicht das sog. **Marktportfolio**, also die Gesamtheit aller verfügbaren Wertpapiere (ohne dem risikolosen Wertpapier), ein Vielfaches von $C^{-1}b$ sein.

Der Wert M des Marktportfolios im Einperiodenmodell aus Beispiel 3.7 ist also gegeben durch

$$M_t = \alpha \sum_{i=1}^{d} (C^{-1}b)^i S_t^i, \quad t \in \{0, 1\},$$

wobei sich der Proportionalitätsfaktor $\alpha \in \mathbb{R}_+$ in den folgenden Rechnungen herauskürzen wird. Definiere die (zufälligen) Renditen

$$R_i := \frac{S_1^i - S_0^i}{S_0^i}, \quad i = 1, \dots, d$$

und

$$R_M := \frac{M_1 - M_0}{M_0}.$$

Abweichend vom Rest des Kapitels setzen wir nun **nicht** voraus, dass ,,o.B.d.A. $S^0 = 1$”, sondern gehen von der Existenz einer risikolosen Rendite

$$-1 < r := (S_1^0 - S_0^0)/S_0^0$$

aus. Es gilt dann die sog. **CAPM-Gleichung**

$$\frac{E(R_i) - r}{E(R_M) - r} = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)} =: \beta^i, \quad i = 0, 1, \dots, d. \tag{3.49}$$

Gleichung (3.49) rechnet man nach, indem man zunächst für die *Zuwächse der diskontierten Preise*, die wir im vorherigen Abschnitt betrachtet haben, folgenden Zusammenhang herstellt

$$\frac{E(\Delta \widehat{S}_1^i)}{E(\Delta \widehat{M}_1)} = \frac{b^i}{\alpha b^\top C^{-1} b} = \frac{\alpha e_i^\top C C^{-1} b}{\alpha^2 (C^{-1}b)^\top C C^{-1} b} = \frac{\mathrm{Cov}(\Delta \widehat{S}_1^i, \Delta \widehat{M}_1)}{\mathrm{Var}(\Delta \widehat{M}_1)}, \quad i = 1, \dots, d, \tag{3.50}$$

wobei $e_i \in \mathbb{R}^d$ den Vektor bezeichnet, der in der i-ten Komponente 1 und sonst 0 ist. Nun beachte man, dass

$$\frac{S_1^0}{S_0^i} \Delta \widehat{S}_1^i = \frac{S_1^i}{S_0^i} - (1 + r) = R_i - r, \quad i = 1, \dots, d,$$

und entsprechend

$$\frac{S_1^0}{M_0} \Delta \widehat{M}_1 = \frac{M_1}{M_0} - (1 + r) = R_M - r.$$

Da die Vorfaktoren $\frac{S_1^0}{S_0^i}$ und $\frac{S_1^0}{M_0}$ deterministisch sind, folgt (3.49) für $i = 1, \ldots, d$ aus (3.50). Für $i = 0$ ist (3.49) offensichtlich.

Aus (3.49) folgt

$$E(R_i) = r + \beta^i(E(R_M) - r), \quad i = 0, 1, \ldots, d. \tag{3.51}$$

Die Geradengleichung (3.51) als Funktion von β wird **Wertpapierlinie** genannt (“security market line”, or SML). Mit

$$\mathrm{Corr}(R_i, R_M) := \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\sqrt{\mathrm{Var}(R_i)}\sqrt{\mathrm{Var}(R_M)}}, \quad i = 0, 1, \ldots, d.$$

ergibt dies

$$\frac{E(R_i) - r}{\sqrt{\mathrm{Var}(R_i)}} = \mathrm{Corr}(R_i, R_M)\frac{E(R_M) - r}{\sqrt{\mathrm{Var}(R_M)}}, \quad i = 0, 1, \ldots, d.. \tag{3.52}$$

Die linke Seite von (3.52) wird Marktpreis des Risikos des i-ten Wertpapiers genannt. Im Gleichgewicht muss der Marktpreis des Risikos jedes Wertpapiers also mit dem Produkt aus dem Marktpreis des Risikos (des Marktportfolios) und der Korrelation zwischen Wertpapier und Marktportfolio übereinstimmen. Eine Aktie, deren Wert also negativ korreliert zur Volkswirtschaft ist, besitzt einen negativen Marktpreis des Risikos. Die Erwartete Rendite ist geringer als die risikolose Rendite. Isoliert betrachtet wäre eine solche Aktie für einen Investor völlig unattraktiv, da sie trotz Risikos geringer rentieren würde als ein Bond. Zusammen mit den anderen Aktien kann sie aber das Gesamtrisiko sogar noch reduzieren, weshalb sie auch bei einer Rendite $< r$ von Interesse ist. Es kommt also nicht auf die Varianz einer Aktie sondern auf die Kovarianz der Aktie mit dem Marktportfolio an.

3.3 Erwartungsnutzenoptimierung

Ein in der ökonomischen Theorie sehr verbreiteter Ansatz ist die *Erwartungsnutzenoptimierung*. Die Agentin hat eine Nutzenfunktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Zunächst wird jedem möglichen Vermögen $x \in \mathbb{R}$ (zum Zeitpunkt T) ein Nutzen $u(x) \in \mathbb{R}$ zugeordnet. $u(x) = -\infty$ kann dabei so interpretiert werden, dass das Vermögensniveau x absolut nicht akzeptabel ist und demnach mit Wahrscheinlichkeit 1 verhindert werden muss (etwa weil es den Ruin bedeuten würde). Die Funktion u soll monoton wachsend sein, auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > -\infty\}$ streng monoton wachsend ("more is better than less") und sie soll auf $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > -\infty\}$ streng konkav sein, d.h. $u(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$, $u(x), u(y) > -\infty$ und $\lambda \in (0,1)$. Strenge Konkavität kann man so interpretieren, dass der Nutzenzuwachs bei Gewinn eines Geldbetrages kleiner ist als der Nutzenrückgang bei Verlust des gleichen Geldbetrages, also $u(x+h)-u(x) < u(x)-u(x-h)$ für $h > 0$ (der Marginalnutzen wird keiner bei höherem Wohlstandsniveau). Der Nutzen des zufälligen Vermögens X (zum Zeitpunkt T) sei nun der Erwartungswert des zufälligen Nutzens $u(X)$. Die Agentin möchte ein stochastisches Endvermögen $V_T(\varphi)$ finden, das ihr einen möglichst hohen Erwartungsnutzen $E_P(u(V_T(\varphi)))$ liefert. Das Startkapital $V_0 = v_0$ ist dabei vorgegeben. Strenge Konkavität von u besagt, dass eine deterministische Auszahlung der Höhe $\lambda x + (1-\lambda)y$ einer zufälligen Auszahlung von x oder y mit Wahrscheinlichkeit λ bzw. $1-\lambda$ vorgezogen wird. Mit der Krümmung von u wird die Risikoaversion der Agentin modelliert, siehe Bemerkung 3.14. Formal definieren wir.

Definition 3.10. *Eine Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt Nutzenfunktion, wenn sie monoton wachsend und auf $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > -\infty\}$ streng monoton wachsend und streng konkav ist.*

Ein vorhersehbarer Prozess φ heißt **erwartungsnutzenoptimal** *für u zum Startkapital v_0, wenn er die Funktion $\psi \mapsto E_P(u(v_0 + \psi \bullet S_T))$ über alle vorhersehbaren Prozesse ψ maximiert. Dabei setzen wir $E_P(u(v_0 + \psi \bullet S_T)) := -\infty$, wenn $E_P(-u(v_0 + \psi \bullet S_T) \vee 0) = \infty^*$.*

Bemerkung 3.11. *Der allgemeinste Ansatz für den Vergleich zufälliger Auszahlungen besteht in der Definition einer sog. Präferenzordnung $\succ$ auf der Menge der zufälligen Auszahlungen $\{X : \Omega \to \mathbb{R},\ X \text{ ist } \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R}) - \text{messbar}\}$. $X \succ Y$ bedeutet, dass ein Investor die zufällige Auszahlung X der zufälligen Auszahlung Y vorzieht. Zu $\succ$ definiert*

*Wenn $|\Omega| = \infty$, kann es passieren, dass sowohl der Positivanteil $u(v_0 + \psi \bullet S_T) \vee 0$ als auch der Negativanteil $-u(v_0 + \psi \bullet S_T) \vee 0$ unendlichen Erwartungswert besitzen. In diesem Fall wäre der Erwartungswert von $u(v_0 + \psi \bullet S_T)$ ohne obige Klärung nicht definiert.

man $\succeq$ *durch*

$$X \succeq Y :\Leftrightarrow Y \not\succ X.$$

$\succ$ *ist eine Präferenzordnung, wenn das zugehörige* $\succeq$ *transitiv und vollständig ist, d.h.* ($X \succeq Y$ *und* $Y \succeq Z$) $\implies$ $X \succeq Z$ *und für jedes Paar* (X, Y) *gilt* $X \succeq Y$ *oder* $Y \succeq X$.

Wenn zudem gewisse Axiome erfüllt sind, dann lässt sich $\succ$ *durch Erwartungsnutzen darstellen („Neumann-Morgenstern Darstellung"), d.h.*

$$X \succ Y \Leftrightarrow E_P(u(X)) > E_P(u(Y)), \quad \forall X, Y : \Omega \to \mathbb{R} \tag{3.53}$$

für eine geeignete Nutzenfunktion u. Siehe dazu Föllmer und Schied [5].

Bemerkung 3.12. *Eine leichter zu bekommende Darstellung als (3.53) wäre eine Darstellung durch eine Funktion*

$$U : \{X : \Omega \to \mathbb{R},\ X \text{ ist } \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R}) - \text{messbar}\} \to \mathbb{R},$$

also

$$X \succ Y \Leftrightarrow U(X) > U(Y), \quad \forall X, Y : \Omega \to \mathbb{R}. \tag{3.54}$$

(3.54) nennt man **numerische Darstellung** *der Präferenzordnung. Aber selbst diese existiert nicht immer wie das folgende Beispiel zeigt.*

Beispiel 3.13. *Betrachte für* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ *die* **lexikographische Ordnung**

$$X \succ Y :\Leftrightarrow X(\omega_1) > Y(\omega_1) \quad \text{oder} \quad (X(\omega_1) = Y(\omega_1) \quad \text{und} \quad X(\omega_2) > Y(\omega_2)). \tag{3.55}$$

Sei $U(x_1, x_2)$ *mit* $x_1 = X(\omega_1)$ *und* $x_2 = X(\omega_2)$ *eine Abbildung* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *die die Präferenzordnung (3.55) darstellt. Die Abbildung* $x \mapsto U(x, 1)$ *ist monoton steigend und hat daher höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Es gibt also ein* $x^\star \in \mathbb{R}$, *so dass* $x \mapsto U(x, 1)$ *in* $x^\star$ *stetig ist und wegen Monotonie gilt*

$$U(x^\star, 1) = \inf_{x > x^\star} U(x, 1).$$

Zusammen mit $U(x^\star, 2) < U(x, 1)$ *für alle* $x > x^\star$ *folgt* $U(x^\star, 1) = U(x^\star, 2)$. *Ein Widerspruch, da* $(x^\star, 2) \succ (x^\star, 1)$.

Bemerkung 3.14. *Für $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ wird der Quotient $r(x) := \frac{-u''(x)}{u'(x)}$ als die* **Risikoaversion** *der Agentin in Abhängigkeit vom Wohlstandsniveau $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Die exponentielle Nutzenfunktion $u(x) = 1 - \frac{1}{p}\exp(-px)$, $p \in (0, \infty)$ (siehe auch Satz 3.25), zeichnet sich dadurch aus, dass $r(x)$ nicht von x abhängt. Bei Potenz- und Logarithmusnutzenfunktionen (siehe Satz 3.24) nimmt $r(x)$ mit steigendem x ab. $r(x)$ kann wie folgt interpretiert werden: Zu jedem $(x, a) \in \mathbb{R}^2$ existiert ein eindeutiges $b = b(x, a)$ mit*

$$u(x - b) = \frac{1}{2}\left[u(x + a) + u(x - a)\right]. \tag{3.56}$$

*Wegen der strengen Konkavität von u folgt aus $a \neq 0$, dass $b > 0$. Die risikolose Auszahlung x wäre nämlich mehr wert, als eine Auszahlung von $x + a$ bzw. $x - a$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. $-b(x, a)$ wird auch als "***certainty equivalent***" zu der zufälligen Auszahlung "a bzw. $-a$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$" bezeichnet. Allgemein ist das* certainty equivalent *zu einer zufälligen Auszahlung Y (bei Startkapital v_0) als das eindeutige $c \in \mathbb{R}$ definiert, das*

$$u(v_0 + c) = E_P(u(v_0 + Y))$$

erfüllt, also $c := u^{-1}\left(E_P(u(v_0 + Y))\right) - v_0$. Man halte nun $x \in \mathbb{R}$ fest und betrachte b als eine Funktion von $a \in \mathbb{R}$. Es gilt natürlich $b(0) = 0$. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt die Diffbarkeit von $a \mapsto b(a)$. Leitet man beide Seiten von (3.56) nach a ab, so folgt

$$-b'(a)u'(x - b(a)) = \frac{1}{2}\left[u'(x + a) - u'(x - a)\right].$$

Nochmaliges Ableiten beider Seiten nach a ergibt

$$-b''(a)u'(x - b(a)) + [b'(a)]^2 u''(x - b(a)) = \frac{1}{2}\left[u''(x + a) + u''(x - a)\right].$$

Auflösung nach $b'(a)$ bzw. $b''(a)$ ergibt

$$b'(a) = -\frac{1}{2}\frac{u'(x + a) - u'(x - a)}{u'(x - b(a))}$$

bzw.

$$b''(a) = \frac{[b'(a)]^2 u'(x - b(a)) - \frac{1}{2}\left[u''(x + a) + u''(x - a)\right]}{u'(x - b(a))}.$$

Also insbesondere $b'(0) = 0$. D.h. für kleine a ist jeder Erwartungsnutzenoptimierer annähernd risikoneutral. Des weiteren gilt $b''(0) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = r(x)$, d.h.

$$b(x,a) = r(x)\left(\frac{1}{2}a^2 + o(a^2)\right) \quad \text{für } a \to 0.$$

Standardvoraussetzung: $u(v_0) > -\infty$

v_0 entspricht dem Endvermögen, das man erhält, wenn man sein gesamtes Startkapital in das risikolose Bankkonto $S^0 = 1$ investiert. Würde dies bereits einen unendlich schlechten Nutzen implizieren, würde das Optimierungsproblem keinen Sinn ergeben.

Satz 3.15. *Sei u eine Nutzenfunktion. Alle erwartungsnutzenoptimalen Strategien besitzen P-f.s. denselben Endwert $V_T(\varphi)$.*

Beweis. Annahme: Es gibt zwei optimale Strategien $\varphi, \widetilde{\varphi}$ mit $V_T(\varphi) = v_0 + \varphi \bullet S_T \neq V_T(\widetilde{\varphi}) = v_0 + \widetilde{\varphi} \bullet S_T$. Für $\psi := \frac{1}{2}(\varphi + \widetilde{\varphi})$ gilt dann

$$\begin{aligned}
E\left(u(v_0 + \psi \bullet S_T)\right) &= E\left(u\left(\frac{1}{2}(v_0 + \varphi \bullet S_T) + \frac{1}{2}(v_0 + \widetilde{\varphi} \bullet S_T)\right)\right) \\
&> E\left(\frac{1}{2}u(v_0 + \varphi \bullet S_T) + \frac{1}{2}u(v_0 + \widetilde{\varphi} \bullet S_T)\right) \\
&= \frac{1}{2}E\left(u(v_0 + \varphi \bullet S_T)\right) + \frac{1}{2}E\left(u(v_0 + \widetilde{\varphi} \bullet S_T)\right) \\
&= E\left(u(v_0 + \varphi \bullet S_T)\right).
\end{aligned}$$

Ein Widerspruch zur Optimalität von φ. □

Satz 3.16 (Fundamentalsatz der Nutzenoptimierung)**.** *Sei u eine stetig differenzierbare Nutzenfunktion mit $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > -\infty\}$ offen und φ eine selbstfinanzierende Strategie.*

(i) Wenn $E(-u(v_0 + \varphi \bullet S_T) \vee 0) < \infty$ und das durch die Dichte

$$\frac{dP^\star}{dP} = \frac{1}{E(u'(v_0 + \varphi \bullet S_T))}\, u'(v_0 + \varphi \bullet S_T), \tag{3.57}$$

definierte Maß $P^\star$ ein äquivalentes Martingalmaß ist, dann ist φ erwartungsnutzenoptimal für u zum Startkapital v_0.

(ii) Für $|\Omega| < \infty$ gilt auch die Umkehrung von (i): wenn φ optimal ist, dann ist das durch (3.57) definierte Maß ein äquivalentes Martingalmaß.

Bemerkung 3.17. *Satz 3.16 liefert kein Verfahren, das die optimale Handelsstrategie bestimmt. Er liefert allerdings ein Kriterium mit dem eine (geratene) Kandidatenstrategie auf Optimalität überprüft werden kann ("guess and verify").*

Der Satz zeigt erneut die fundamentale Rolle von Martingalmaßen in der Finanzmathematik. $P^\star$ lässt sich auch als das Optimum eines "dualen" Minimierungsproblems charakterisieren, bei dem über alle Martingalmaße ein gewisser Abstand zu P minimiert wird (Abstand hängt von der Nutzenfunktion u ab). Hierauf werden wir aber in der Vorlesung nicht eingehen.

Bemerkung 3.18. *Die Voraussetzung, dass die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > -\infty\}$ offen sein muss, erscheint wenig überraschend. Betrachte etwa für $p \in (0,1)$ die CRRA-Nutzenfunktion ("constant relativ risk aversion")*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-p}}{1-p} : \text{wenn } x \geq 0 \\ -\infty : x < 0. \end{cases} \tag{3.58}$$

Es gilt $u(0) = 0$ aber $u(x) = -\infty$ für alle $x < 0$. Nehme an, in dem Optimierungsproblem gilt für das optimale Endvermögen $V_T(\varphi)$, dass $P(\widehat{V}_T(\varphi) = 0) > 0$. Da die Ableitung von u in 0 nicht existiert, lässt sich (3.57) gar nicht formulieren. Nimmt man stattdessen die rechtsseitige Ableitung (die auch in 0 existiert), so wird man kaum erwarten können, dass (3.57) gilt, da die rechtsseitige Ableitung von u in 0 das Absacken auf $-\infty$ natürlich nicht wiedergibt.

Bemerkenswert ist allerdings, dass Satz 3.16 für $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > -\infty\}$ offen, etwa $u = \log$, und $|\Omega| = \infty$ auch nicht gelten muss. Sogar wenn man die Aktienpreisprozesse S^i als beschränkt voraussetzt. In Fall logarithmischen Nutzens muss für das optimale Endvermögen $V_T(\varphi)$ natürlich gelten $P(\widehat{V}_T(\varphi) > 0) = 1$. Aber $\frac{u'(\widehat{V}_T(\varphi))}{E\left(u'(\widehat{V}_T(\varphi))\right)}$ muss nicht die Dichte eines äquivalenten Martingalmaßes sein[†]*.*

Beweis von Satz 3.16. Ad (i): O.B.d.A. kann angenommen werden, dass $E((u(v_0 + \varphi \bullet S_T))^+) < \infty$, da andernfalls φ sowieso optimal wäre. Sei ψ eine weitere selbstfinanzierende

[†] Für Gegenbeispiel siehe Example 5.1 in Kramkov und Schachermayer [15].

Strategie mit $E((u(v_0 + \psi \bullet S_T)^-)) < \infty$. Wegen der Konkavität von u gilt

$$\begin{aligned} u(v_0 + \psi \bullet S_T) - u(v_0 + \varphi \bullet S_T) &\leq u'(v_0 + \varphi \bullet S_T)(\psi - \varphi) \bullet S_T \\ &= E(u'(v_0 + \varphi \bullet S_T))\frac{dP^\star}{dP}(\psi - \varphi) \bullet S_T. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$E_{P^\star}((\psi - \varphi) \bullet S_T) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.60)$$

Wenn ψ und φ beschränkt wären (was im Fall $|\Omega| < \infty$ automatisch gegeben wäre), würde (3.60) sofort aus Proposition 1.5(iii) folgen, da S ein $P^\star$-Martingal ist. Der allgemeine Fall muss auf Integrale mit beschränkten Integranden zurückgeführt werden, was im folgenden gemacht wird und was das schwierigste am Beweis ist.

Der Negativanteil der Zufallsvariablen auf der linken Seite von (3.59) ist integrierbar (d.h. Integral des Negativanteils ist endlich) und es lässt sich das P-Martingal $t \mapsto E((u(v_0+\psi \bullet S_T))^- + (u(v_0+\varphi \bullet S_T))^+ \mid \mathcal{F}_t)$ konstruieren. Sei $Z_t = E_P(\frac{dP^\star}{dP} \mid \mathcal{F}_t)$ der Dichteprozess zu $P^\star$. Insbesondere gilt $Z_T = \frac{dP^\star}{dP}$. Nach Proposition 2.9 und Proposition 3.5 ist der Prozess

$$t \mapsto Z_t(v_0 + (\psi - \varphi) \bullet S_t) + E((u(v_0 + \psi \bullet S_T))^- + (u(v_0 + \varphi \bullet S_T))^+ \mid \mathcal{F}_t) \quad (3.61)$$

mit nichtnegativem Endwert ein P-lokales Martingal. Da der Endwert von (3.61) wegen (3.59) nichtnegativ ist, ist der Prozess nach Proposition 2.11 ein (echtes) P-Martingal und damit auch der Prozess $Z((\psi - \varphi) \bullet S)$. Es folgt

$$E\left(\frac{dP^\star}{dP}((\psi - \varphi) \bullet S_T)\right) = 0.$$

Ad (ii): Im Fall $|\Omega| < \infty$ kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $\{\omega\} \in \mathcal{F}$ und $P(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Sei φ erwartungsnutzenoptimal. Wegen der Offenheit von $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > -\infty\}$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $u(v_0 + \varphi \bullet S_T - \varepsilon) > -\infty$. Sei $s \leq t$, $A \in \mathcal{F}_s$. Für $\delta > 0$ klein genug gilt $u(v_0 + \varphi \bullet S_T + \delta 1_A(S_t - S_s)) > -\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in [v_0 + \varphi \bullet S_T, v_0 + \varphi \bullet S_T + \delta 1_A(S_t - S_s)]$ bzw. $\xi \in [v_0 + \varphi \bullet S_T + \delta 1_A(S_t - S_s), v_0 + \varphi \bullet S_T]$, je nach Vorzeichen von $S_t - S_s$, mit

$$\begin{aligned} 0 &\geq E(u(v_0 + \varphi \bullet S_T + \delta 1_A(S_t - S_s))) - E(u(v_0 + \varphi \bullet S_T)) \\ &= \delta E(u'(\xi) 1_A(S_t - S_s)). \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von u' folgt mit $\delta \to 0$ $E(u'(v_0 + \varphi \bullet S_T)1_A(S_t - S_s)) \leq 0$. Die Vertauschbarkeit von Limes- und Erwartungswerbildung ist auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum natürlich unkritisch. Ersetzt man δ durch $-\delta$, so folgt insgesamt

$$E(u'(v_0 + \varphi \bullet S_T)1_A(S_t - S_s)) = 0.$$

$\square$

Wir wollen die Aussage an einem einfachen Beispiel demonstrieren.

Beispiel 3.19. *Man betrachte das Erwartungsnutzenoptimierungsproblem im Einperioden-Binomialmodell aus Beispiel 2.17 mit* $r = 0$. *Also*

$$\max_{\varphi \in \mathbb{R}} \Big(pu(x + \varphi(\overline{a} - 1)) + (1-p)u(x + \varphi(\underline{a} - 1)) \Big)$$

Die Optimalitätsbedingung für φ *lautet offenbar*

$$p(\overline{a} - 1)u'(x + \varphi(\overline{a} - 1)) + (1-p)(\underline{a} - 1)u'(x + \varphi(\underline{a} - 1)) = 0. \tag{3.62}$$

Typischerweise ist $p(\overline{a} - 1) > (1-p)(1-\underline{a})$, *d.h. die Aktie hat unter dem Maß* P *eine positive Drift. Der Investor kauft gemäß (3.62) so viele Aktien, bis dieser Effekt durch die Abnahme des Marginalnutzens, also* $u'(x + \varphi(\overline{a} - 1)) < u'(x + \varphi(\underline{a} - 1))$, *kompensiert ist. Aus (3.62) folgt*

$$\frac{u'(x + \varphi(\overline{a} - 1))}{u'(x + \varphi(\underline{a} - 1))} = \frac{1-p}{p} \frac{1-\underline{a}}{\overline{a} - 1} \overset{(2.34)}{=} \frac{1-p}{p} \frac{q}{1-q} = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{1-q}{1-p}}.$$

Bemerkung 3.20. *Im* **vollständigen** *Markt lässt sich aus (3.57) das optimale Endvermögen bereits gewinnen.* $P^\star$ *ist dort eindeutig und die Dichte* $\frac{dP^\star}{dP}$ *i.A. bekannt. Man mache für das optimale Endvermögen* X *den Ansatz* $X = (u')^{-1}(\kappa \frac{dP^\star}{dP})$. *Das unbekannte* $\kappa \in \mathbb{R}_+$ *bestimmt sich aus* $E_{P^\star}(u')^{-1}(\kappa \frac{dP^\star}{dP}) = E_{P^\star} X = v_0$. *Das Entscheidende ist nun, dass im vollständigen Markt die Bedingung* $E_{P^\star} X = v_0$ *bereits garantiert, dass sich das Endvermögen* X *mit einer Strategie* φ *und dem gegebenen Startkapital* v_0 *erzeugen lässt.*

Für das (vollständige) Cox-Ross-Rubinstein Modell (vgl. Beispiel 2.17) ergibt dies folgendes: Die eindeutige Dichte ist gegeben durch

$$\frac{dP^*}{dP}(\omega) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\#\{i | x_i = \overline{a}\}} \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{\#\{i | x_i = \underline{a}\}} , \quad \text{für } x_1 = A_1(\omega), \ldots, x_T = A_T(\omega) \ ,$$

wobei p die "objekte" Wahrscheinlichkeit ist und q die durch (2.34) gegebene Wahrscheinlichkeit unter dem eindeutigen Martingalmaß ("risikolose Wahrscheinlichkeit"). Insbesondere hängt die Zufallsvariable $\frac{dP^*}{dP}$ nur vom Endwert *S_T^1 der Aktie ab (d.h. von der Anzahl der i mit $x_i = \overline{a}$) und nicht auch von deren Werten vorher.* **Auch das optimale Endvermögen $\widehat{X}(\omega)$ hängt damit von ω nur über $S_T^1(\omega)$ ab, d.h. $\widehat{X} = h(S_T^1)$.** *Es folgt*

$$\widehat{X} = h(S_T^1) = (u')^{-1}\left(c\left(\frac{q}{p}\right)^j\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{T-j}\right), \quad \text{wobei } j \text{ durch } S_T^1 = \overline{a}^j\underline{a}^{T-j} \text{ gegeben ist}$$

und die Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ sich aus der Finanzierbarkeitsbedingung

$$E_Q(\widehat{X}) = \sum_{j=0}^{T}\begin{pmatrix} T \\ j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{T-j}(u')^{-1}\left(c\left(\frac{q}{p}\right)^j\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{T-j}\right) \overset{!}{=} v_0$$

ergibt ($v_0 \in \mathbb{R}$ ist das gegebene Startkapital).

$\widehat{X} = h(S_T^1)$ impliziert natürlich **nicht**, *dass die optimale Strategie statisch ist (buy-and-hold). h ist meistens nichtlinear.*

Derivate *haben für Investoren auch die Funktion, eine nichtlineare Auszahlung wie etwas $h(S_T^1)$ zu generieren, ohne dass die Investoren tatsächlich (selber) dynamisch handeln müssen (letzteres wäre für die meisten viel zu aufwendig bzw. mit zu hohen Transaktionskosten verbunden). Den dynamischen Handel übernimmt somit die emittierende Bank, indem sie die Derivate (in großer Anzahl) hedged . Voraussetzung ist natürlich, dass der Claim $h(S_T^1)$ zu dem fairen Preis $E_{P^*}(h(S_T^1))$ verkauft wird.*

Obiges Resultat könnte uns nun suggerieren, dass Investoren, die Derivate nicht als Absicherungs- sondern Investitionsinstrumente einsetzen, keine **pfadabhängigen** *Derivate[‡] benötigen. Wegen der sehr restriktiven Modellannahmen ist die Schlußfolgerung allerdings mit Vorsicht zu genießen.*

Bemerkung 3.21. *Nehme an, dass die Prozesse S^i schon Martingale bzgl. des ursprünglichen Maßes P sind. Es gilt natürlich*

$$\frac{dP}{dP} = \frac{u'(v_0)}{Eu'(v_0)}.$$

[‡]Ein Derivat heißt pfadabhängig, wenn die Auszahlung nicht nur vom Endpreis des Underlyings abhängt, sondern vom gesamten Kursverlauf.

Aus Satz 3.16 folgt, dass v_0 das optimale Endvermögen ist (Natürlich ließe sich diese Aussagen auch direkt aus der Konkavität von u gewinnen !). Ebenso folgt die Umkehrrichtung. Wenn v_0 das optimale Endvermögen ist, dann muss es mit Satz 3.16 ein äquivalentes Martingalmaß P^* geben, so dass $\frac{dP^*}{dP}$ eine Konstante ist. Dies kann aber nur sein, wenn P selber Martingalmaß ist.

Bemerkung 3.22. *Zumindest im vollständigen Markt, in dem jeder Claim replizierbar ist und es ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß $P^\star$ gibt, hat Satz 3.16 eine einfache Interpretation. Der Wunsch, im Zustand ω_0 eine Geldeinheit mehr zu besitzen (und in den anderen Zuständen genauso viel wie vorher), ist realisierbar, wenn man ein um den Betrag*

$$E_{P^\star}\left(1_{\{\omega_0\}}\right) = P^\star(\{\omega_0\})$$

erhöhtes Startkapital zur Verfügung hat . Der Mehrnutzen, den die zusätzliche Geldeinheit liefert, wäre bei linearisierter Nutzenfunktion proportional zu $E_P\left(1_{\{\omega_0\}}\right) = P(\{\omega_0\})$, also der "tatsächlichen" Wahrscheinlichkeit, dass $\{\omega_0\}$ eintritt. Für ω_0 mit **kleiner Dichte**

$$\frac{P^\star(\{\omega_0\})}{P(\{\omega_0\})}$$

wäre also das **Kosten-/Nutzenverhältnis günstig**. *Man würde also versuchen, in einem solchen Zustand möglichst reich zu sein. Um dies zu finanzieren, würde man in Kauf nehmen, in einem anderen Zustand ω_1 mit großer Dichte $\frac{P^\star(\{\omega_1\})}{P(\{\omega_1\})}$ ärmer zu sein. Man beachte in Formel (3.57), dass ein hohes Endvermögen einem kleinen Marginalnutzen entspricht. Die Konkavität von u sorgt dann dafür, dass man in die "günstigen" Zustände auf Kosten der "ungünstigen" Zustände nicht zu viel Kapital transferiert.*

Bemerkung 3.23. *Wir haben bisher noch keine Aussage über die* Existenz *einer optimalen Strategie φ gemacht. Allgemein folgt aus der Existenz eines Martingalmaßes (Arbitragefreiheit) und der Konkavität von u noch* **nicht**, *dass das Optimierungsproblem $E_P(u(V_T(\varphi)))$ beschränkt ist, d.h. es könnte eine Folge $(\varphi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von Strategien geben mit $\lim_{n\to\infty} E_P(u(V_T(\varphi^{(n)}))) = \infty$.*

3.3.1 Zeitlich homogenes Marktmodell

Wir betrachten nun als Verallgemeinerung des Cox-Ross-Rubinstein Modells einen zeitlich homogenen Markt, in dem die (diskontierten) Wertpapierpreisprozesse gegeben sind durch:

$$S_t^i = s_0^i \prod_{j=1}^{t} (1 + A_j^i), \quad t = 1, \dots, T, \ i = 1, \dots, d,$$

wobei $(A_j)_{j=1,\dots,T}$ nun eine Folge von i.i.d. d-dimensionalen Zufallsvektoren $A_j = (A_j^1, \dots, A_j^d)$ ist ($S^0 = 1$). A_j^i sind beliebige Zufallsvariablen mit $A_j^i > -1$. Für festes j dürfen $A_j^{i_1}$ und $A_j^{i_2}$ auch stochastisch abhängig sein. A_j^i nennt man auch die zufällige *Rendite* des Wertpapiers i in der j-ten Periode. Zeitliche Homogenität bedeutet, dass die **realisierbaren Gewinnverteilungen** in jeder Periode gleich sind und nicht von dem Preisverlauf der Vergangenheit abhängen. Sie bedeutet aber **nicht**, dass das Halten einer bestimmten Anzahl an Wertpapieren in jeder Periode zu der gleichen Gewinnverteilung führt.

Für bestimmte Nutzenfunktionen, nämlich Potenz-, Logarithmus- und exponentielle Nutzenfunktionen, kann man in diesem Modell die optimale Strategie φ explizit berechnen und gut beschreiben.

Satz 3.24 (Potenz- und Logarithmusnutzenfunktion)**.** *Sei $u : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{x^{1-p}}{1-p}$ für ein $p \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$. Für $p = 1$ sei die Funktion u gegeben durch $x \mapsto \log(x)$ (man kann sich vorstellen, dass $u = -\infty$ auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ bzw. $(-\infty, 0]$). Es existiere ein $\gamma \in \mathbb{R}^d$ mit $\gamma^\top A_t > -1$ und*

$$E\left(\frac{A_1^i}{(1 + \gamma^\top A_1)^p}\right) = 0, \quad i = 1, \dots, d. \tag{3.63}$$

Dann ist

$$\varphi_t^i = \frac{\gamma^i}{S_{t-1}^i} V_{t-1}, \quad i = 1, \dots, d \tag{3.64}$$

mit

$$V_t := v_0 \prod_{j=1}^{t} (1 + \gamma^\top A_j) \tag{3.65}$$

eine erwartungsnutzenoptimale Strategie und V ist der zu φ gehörende Vermögensprozess mit Startkapital v_0, d.h. $V_t = v_0 + \varphi \bullet S_t$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} v_0 + \varphi \bullet S_t &= v_0 + \sum_{j=1}^{t} \varphi_j^\top \Delta S_j \\ &= v_0 + \sum_{j=1}^{t} V_{j-1} \sum_{i=1}^{d} \frac{\gamma^i}{S_{j-1}^i} \Delta S_j^i \\ &= v_0 + \sum_{j=1}^{t} V_{j-1} \gamma^\top A_j \\ &= v_0 + \sum_{j=1}^{t} (V_j - V_{j-1}) \\ &= V_t, \end{aligned}$$

wobei in der dritten Gleichung benutzt wird, dass $\frac{\Delta S_j^i}{S_{j-1}^i} = A_j^i$. Damit ist gezeigt, dass V der zu φ gehörige Vermögensprozess ist.

Definiere $\alpha := (E((1+\gamma^\top A_1)^{-p}))^{1/p}$ und das Maß $P^\star$ durch

$$\frac{dP^\star}{dP} := \alpha^{-pT} \prod_{j=1}^{T} (1+\gamma^\top A_j)^{-p} = \alpha^{-pT} u'(\prod_{j=1}^{T} (1+\gamma^\top A_j)) = v_0^p \alpha^{-pT} u'(V_T(\varphi)) =: \frac{1}{\kappa} u'(V_T(\varphi)).$$

Des weiteren setze

$$L_t := \alpha^{-pt} \prod_{j=1}^{t} (1+\gamma^\top A_j)^{-p}, \quad t = 0, 1, \ldots, T.$$

Nach Konstruktion von L gilt $L_T = \frac{dP^\star}{dP}$ und

$$\begin{aligned} E(L_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) &= \alpha^{-pt} \prod_{j=1}^{t-1} (1+\gamma^\top A_j)^{-p} E\left((1+\gamma^\top A_t)^{-p} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= \alpha^{-pt} \prod_{j=1}^{t-1} (1+\gamma^\top A_j)^{-p} E\left((1+\gamma^\top A_1)^{-p}\right) \\ &= \alpha^{-p(t-1)} \prod_{j=1}^{t-1} (1+\gamma^\top A_j)^{-p} \\ &= L_{t-1}, \qquad t = 1, \ldots, T, \end{aligned}$$

d.h. L ist (unter P) ein Martingal. Also ist L der zu $P^\star$ gehörige Dichteprozess. Aus

$L_0 = 1$ folgt, dass $P^\star$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
E(L_t S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}) &= E(L_t \Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}) + E(L_t S_{t-1}^i \mid \mathcal{F}_{t-1}) \\
&= L_{t-1}\alpha^{-p} E((1+\gamma^\top A_t)^{-p} \Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}) + S_{t-1}^i E(L_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) \\
&= L_{t-1}\alpha^{-p} S_{t-1}^i E((1+\gamma^\top A_t)^{-p} A_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}) + L_{t-1} S_{t-1}^i \\
&= L_{t-1}\alpha^{-p} S_{t-1}^i E((1+\gamma^\top A_1)^{-p} A_1^i) + L_{t-1} S_{t-1}^i \\
&\overset{(3.63)}{=} L_{t-1} S_{t-1}^i, \qquad t = 1, \dots, T,\ i = 1, \dots, d.
\end{aligned}$$

Also sind die Prozesse LS^i, $i = 1, \dots, d$, P-Martingale. Mit Proposition 3.5 sind S^i $P^\star$-Martingale. Aus Satz 3.16(i) folgt, dass φ optimal ist. □

Satz 3.25 (Exponentialnutzenfunktion)**.** *Sei* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $x \mapsto 1 - \frac{1}{p}\exp(-px)$ *für ein* $p \in (0, \infty)$. *Es existiere ein* $\gamma \in \mathbb{R}^d$ *mit*

$$E(A_1^i \exp(-\gamma^\top A_1)) = 0, \quad i = 1, \dots, d. \tag{3.66}$$

Dann ist

$$\varphi_t^i = \frac{\gamma^i}{p S_{t-1}^i}, \quad i = 1, \dots, d \tag{3.67}$$

eine erwartungsnutzenoptimale Strategie und

$$V_t := v_0 + \frac{1}{p}\gamma^\top \left(\sum_{j=1}^t A_j \right) \tag{3.68}$$

der dazugehörige Vermögensprozess mit Startkapital v_0.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
v_0 + \varphi \bullet S_t &= v_0 + \sum_{j=1}^t \varphi_j^\top \Delta S_j \\
&= v_0 + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^d \frac{\gamma^i}{S_{j-1}^i} \Delta S_j^i \\
&= v_0 + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^t \gamma^\top A_j \\
&= v_0 + \frac{1}{p}\gamma^\top \left(\sum_{j=1}^t A_j \right) \\
&= V_t,
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass V der zu φ gehörige Vermögensprozess ist.

Definiere $\alpha := \log(E(\exp(-\gamma^\top A_1)))$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß $P^\star$ durch

$$\frac{dP^\star}{dP} := \exp(-\alpha T + pv_0)\exp(-pv_0 - \gamma^\top(\sum_{j=1}^{T} A_j)) = \exp(-\alpha T + pv_0)u'(V_T(\varphi))$$

Nun wollen wir zeigen, dass S^i $P^\star$-Martingale sind. Wie im vorigen Beweis ist dafür zu zeigen, dass $E(\exp(-\gamma^\top A_t)A_t^i|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Dies gilt wegen (3.66) und der i.i.d.-Annahme an $(A_j)_{j=1,\ldots,T}$. □

Bemerkung 3.26. *Man sieht sofort, dass die optimale Strategien (3.64) und (3.67) nicht vom Zeithorizont T abhängen. D.h. alle Rechnungen gingen durch, wenn man z.B. bei $t_0 < T$ abbrechen würde. Das optimale Endvermögen wäre dann V_{t_0} und das zugehörige Martingalmaß $\widetilde{P}^*$ wäre durch*

$$\frac{d\widetilde{P}^*}{dP} = \alpha^{-pt_0}\prod_{j=1}^{t_0}(1+\gamma^\top A_j)^{-p} = L_{t_0}$$

gegeben. Hier gehen die zeitliche Homogenität des Modells und die konstante relative Risikoaversion

$$R(x) := -\frac{xu''(x)}{u'(x)}$$

ein. Die gängige Anlegerregel, bei längerem Anlagehorizont stärker in risikobehaftete Aktien zu investierten als bei einem kurzen Anlagehorizont, wird durch dieses Modell offenbar nicht gerechtfertigt.

In Abschnitt 3.3.3 werden wir sehen, dass bei logarithmischem Nutzen (der dem Fall $p = 1$ entspricht) die Eigenschaft, dass der Anlagehorizont nicht in die optimale Handelsstrategie eingeht, auch für den allgemeinen Fall gilt, dass die Renditen $(A_t)_{t=0,\ldots,T}$ nicht mehr unabhängig und identisch verteilt sein müssen.

3.3.2 Zwischenzeitlicherer Konsum

Wir werden das Optimierungsproblem aus Definition 3.10 etwas verallgemeinern, indem wir zwischenzeitlichen Konsum einführen. $k_t \in \mathbb{R}_+$ gibt den ,,Konsumbedarf" zum Zeitpunkt t an und ist im Optimierungsproblem vorgegeben. Wir fordern

$$\sum_{t=0}^{T} k_t > 0.$$

Eine Strategie ist ein Paar (φ, c) bestehend aus einer Handelsstrategie φ und einem Konsumprozess $(c_t)_{t=0,1,\dots,T}$. c ist ein adaptierter, nichtnegativer Prozess. c_t modelliert die Konsumintensität bzgl. k_t. Der Konsum in Geldeinheiten zum Zeitpunkt t ist also das Produkt $c_t k_t$. Der modifizierte Vermögensprozess ist gegeben durch

$$V_t = v_0 + \varphi \bullet S_t - \sum_{j=0}^{t} c_j k_j.$$

V_t ist das Vermögen **nach** dem Konsum, der zum Zeitpunkt t stattfindet. Man beachte, dass i.A. $V_0 \neq v_0$, da bereits zum Zeitpunkt 0 konsumiert werden kann. (φ, c) heißt **zulässig**, wenn $V \geq 0$. Das Optimierungsproblem lautet

$$\sup_{(\varphi,c) \text{ zulässig}} E\left(\sum_{t=0}^{T} k_t u(c_t)\right). \tag{3.69}$$

Bemerkung 3.27. *Offenbar ist dies eine Verallgemeinerung des vorherigen Optimierungsproblems. Setzt man*

$$k_t = \begin{cases} 0 & \text{für } t < T \\ 1 & \text{für } t = T \end{cases}$$

so findet der Konsum nur zum Zeitpunkt T statt und wegen der Monotonie der Nutzenfunktion wird in T das gesamte Endvermögen $v_0 + \varphi \bullet S_T$ verkonsumiert.

Satz 3.28 (Fundamentalsatz der Nutzenoptimierung mit zwischenzeitlichem Konsum)**.** *Sei u eine stetig differenzierbare Nutzenfunktion mit $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > -\infty\}$ offen und (φ, c) eine zulässige Strategie.*

(i) Wenn $V_T(\varphi, c) = 0$ und $E(-u(c_t) \vee 0) < \infty$ für alle t und die Prozesse

$$(u'(c_t))_{t=0,1,\dots,T} \quad \textit{und} \quad (u'(c_t)S_t^i)_{t=0,1,\dots,T}, \quad i = 1, \dots, d \tag{3.70}$$

unter P Martingale sind, dann optimiert (φ, c) das Problem (3.69).

(ii) Für $|\Omega| < \infty$ und $k_t > 0$ gilt auch die Umkehrung von (i): wenn (φ, c) optimal ist, dann ist $V_T(\varphi, c) = 0$ und die Prozesse in (3.70) sind unter P Martingale.

Bemerkung 3.29. *Die Martingalbedingung bedeutet, dass der Prozess*

$$L_t = \frac{u'(c_t)}{u'(c_0)}, \quad t = 0, 1, \dots, T$$

der Dichteprozess (im Sinne von Definition 3.1) eines Martingalmaßes ist. Mit Proposition 3.5 sieht man, dass Satz 3.28 eine Verallgemeinerung von Satz 3.16 ist.

Bemerkung 3.30. *Für den Fall, dass es nur das Wertpapier $S^0 = 1$ gibt (also keine Handelsgewinne erzielt werden können), bedeutet die Aussage, dass das Startkapital v_0 gleichmäßig in der Zeit konsumiert werden soll, also $c_t = \frac{v_0}{\sum_{j=0}^T k_j}$. Dies heißt, dass zum Zeitpunkt t $\frac{v_0 k_t}{\sum_{j=0}^T k_j}$ Geldeinheiten konsumiert werden.*

Bemerkung 3.31. *Für $k_t = 0$ kann c_t beliebig gewählt werden. Daher kann aus der Optimalität die Martingalbedingung nur folgen, wenn $k_t > 0$ für alle t.*

Beweis von Satz 3.28. Der Beweis geht natürlich ähnlich wie der für Satz 3.16. Deshalb sollen die technischen Feinheiten (Integrierbarkeit, Unterscheidung zwischen lokalen und echten Martingalen) nicht noch einmal wiederholt werden.

Ad (i): Sei $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{c})$ eine weitere zulässige Strategie. Wegen der Konkavität von u gilt

$$\begin{aligned}
&E\left[\sum_{t=0}^T k_t u(\widetilde{c}_t)\right] - E\left[\sum_{t=0}^T k_t u(c_t)\right] \\
&\le E\left[\sum_{t=0}^T k_t u'(c_t)(\widetilde{c}_t - c_t)\right] \\
&\overset{\text{(3.70) \& iterierter Erwartungswert}}{=} E\left[\sum_{t=0}^T k_t u'(c_T)(\widetilde{c}_t - c_t)\right] \\
&\le E\left[((\widetilde{\varphi} - \varphi) \bullet S_T) u'(c_T)\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen $v_0 + \widetilde{\varphi} \bullet S_T - \sum_{t=0}^T k_t \widetilde{c}_t \ge 0$ und $v_0 + \varphi \bullet S_T - \sum_{t=0}^T k_t c_t =$

0. Die letzte Gleichung folgt aus (3.70) z.B. mit der Rechnung

$$\begin{aligned} E\left[\psi_t^i \Delta S_t^i u'(c_T)\right] &= E\left[\psi_t^i S_t^i u'(c_T)\right] - E\left[\psi_t^i S_{t-1}^i u'(c_T)\right] \\ &= E\left[\psi_t^i S_t^i u'(c_t)\right] - E\left[\psi_t^i S_{t-1}^i u'(c_{t-1})\right] \\ &= E\left[\psi_t^i S_{t-1}^i u'(c_{t-1})\right] - E\left[\psi_t^i S_{t-1}^i u'(c_{t-1})\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ad (ii): Im Fall $|\Omega| < \infty$ kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $\{\omega\} \in \mathcal{F}$ und $P(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Sei (φ, c) optimal. Wegen der Offenheit von $\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > -\infty\}$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $u(c_t - \varepsilon) > -\infty$. Ähnlich wie im Beweis von Satz 3.16 werden wir die optimale Strategie etwas stören. Nun aber zweifach. Erstmal behalten wir die Handelsstrategie φ bei und konsumieren in $t-1$ etwas weniger (mehr) und dafür in t etwas mehr (weniger). Dann konsumieren wir in t etwas mehr/weniger in Abhängigkeit von Handelsgewinnen durch ein zusätzliches Investment in das i-te Wertpapier zwischen $t-1$ und t.

Sei $A \in \mathcal{F}_{t-1}$. Betrachte den modifizierten Konsum $\widetilde{c}_{t-1} := c_{t-1} - \frac{\varepsilon}{k_{t-1}} 1_A$ und $\widetilde{c}_t := c_t + \frac{\varepsilon}{k_t} 1_A$. Nach dem Zwischenwertsatz existieren $\xi_{t-1} \in [c_{t-1} - \frac{\varepsilon}{k_{t-1}}, c_{t-1}]$ und $\xi_t \in [c_t, c_t + \frac{\varepsilon}{k_t}]$ mit

$$\begin{aligned} 0 &\geq E\left[k_{t-1} u(c_{t-1} - \frac{\varepsilon}{k_{t-1}} 1_A) + k_t u(c_t + \frac{\varepsilon}{k_t} 1_A)\right] - E\left[k_{t-1} u(c_{t-1}) + k_t u(c_t)\right] \\ &= -E\left[k_{t-1} u'(\xi_{t-1}) 1_A \frac{\varepsilon}{k_{t-1}}\right] + E\left[k_t u'(\xi_t) 1_A \frac{\varepsilon}{k_t}\right] \\ &= \varepsilon \left(E\left[u'(\xi_t) 1_A\right] - E\left[u'(\xi_{t-1}) 1_A\right]\right). \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von u' folgt mit $\varepsilon \to 0$ $E\left[u'(c_t) 1_A\right] - E\left[u'(c_{t-1}) 1_A\right] \leq 0$. Die Vertauschbarkeit von Limes- und Erwartungswerbildung ist auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum natürlich unkritisch. Ersetzt man ε durch $-\varepsilon$, so folgt insgesamt

$$E\left[1_A (u'(c_t) - u'(c_{t-1}))\right] = 0. \tag{3.71}$$

Also ist der Prozess $(u'(c_t))_{t=0,1,\ldots,T}$ ein P-Martingal.

Bleibt der zweite Teil von (3.70) zu zeigen. Für $\delta > 0$ klein genug gilt $u(c_t + \delta 1_A(S_t^i - S_{t-1}^i)) > -\infty$. Betrachte nun die modifizierte Strategie $\widetilde{\varphi}_t^i := \varphi_t^i + \delta 1_A$ sowie $\widetilde{c}_t := c_t + \frac{\delta}{k_t} 1_A(S_t^i - S_{t-1}^i)$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in \left[c_t - \frac{\delta}{k_t} 1_A(S_t^i - S_{t-1}^i), c_t\right]$ bzw. $\xi \in \left[c_t, c_t + \frac{\delta}{k_t} 1_A(S_t^i - S_{t-1}^i)\right]$, je nach Vorzeichen von $S_t^i - S_{t-1}^i$, mit

$$\begin{aligned} 0 &\geq E\left[k_t u\left(c_t + \frac{\delta}{k_t} 1_A\left(S_t^i - S_{t-1}^i\right)\right)\right] - E\left[k_t u(c_t)\right] \\ &= \delta E\left[u'(\xi) 1_A(S_t^i - S_{t-1}^i)\right]. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von u' folgt mit $\delta \to 0$ $E\left[u'(c_t) 1_A(S_t^i - S_{t-1}^i)\right] \leq 0$. Ersetzt man δ durch $-\delta$, so folgt insgesamt

$$E\left[u'(c_t) 1_A(S_t^i - S_{t-1}^i)\right] = 0$$

Zusammen mit (3.71) folgt, dass die Prozesse $(u'(c_t) S_t^i)_{t=0,1,\dots,T}$, $i = 1, \dots, d$, P-Martingale sind. □

3.3.3 Logarithmische Nutzenfunktion

Es stellt sich die Frage, wann die nette Eigenschaft, dass der Anlagehorizont nicht in die optimale Handelsstrategie eingeht, auch für den **allgemeinen Fall** gilt, dass $(A_t)_{t=0,\dots,T}$ nicht mehr unabhängig sein müssen (auch nicht identisch verteilt). Im folgenden werden wir uns überlegen, dass dies, wenn $u(x) = \ln(x)$ bzw. $p = 1$ der Fall ist. Man sieht zunächst, dass für $p = 1$ der Faktor α im Beweis von Satz 3.24 für alle $\gamma \in \mathbb{R}^d$ 1 ist. Dies ist der Grund dafür, dass man für die logarithmische Nutzenfunktion wie im unabhängigen Fall vorgehen kann. $\gamma \in \mathbb{R}^d$ wird nun durch einen $\mathbb{R}^d$-wertigen vorhersehbaren stochastischen Prozess $(\gamma_t)_{t=1,\dots,T}$ ersetzt, wobei sich γ_t analog zu (3.63) bestimmt durch

$$E\left(\frac{A_t^i}{1 + \gamma_t^\top A_t} | \mathcal{F}_{t-1}\right) = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

Beachte, dass γ_t $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar sein soll, d.h. in den obigen Gleichungen wie ein Element aus dem $\mathbb{R}^d$ fungiert. (Für andere Nutzenfunktionen würde α dann von ω abhängen, was die Bedingung mit dem Marginalnutzen kaputt machen würde.) Der Beweis im logarithmischen Fall geht nun analog mit $(\gamma_t)_{t=1,\dots,T}$ statt γ.

Für den logarithmischen Nutzen ist die optimale Strategie im **allgemeinen Fall** gegeben durch

$$\varphi_t^i = \frac{\gamma_t^i}{S_{t-1}^i} V_{t-1}, \quad i = 1, \dots, d$$

Das Optimierungsproblem ist also **myopisch** ("kurzsichtig"). Zur Bestimmung der optimalen Strategie braucht man nur das (optimale) Vermögen zum Zeitpunkt $t-1$ und die lokalen "stochastischen Charakteristiken" für den Sprung zwischen $t-1$ und t zu kennen (d.h. die bedingte Verteilung von A_t gegeben die Information $\mathcal{F}_{t-1}$). Die stochastische Verteilung des Aktienpreisprozesse *nach* t muss der Optimierer gar nicht kennen. Insbesondere geht der Zeithorizont nicht in die optimale Lösung ein.

Alternativ kann man die ,,Kurzsichtigkeit" des Problems an folgender Rechnung erkennen. Sei $V_t = V_t(\varphi) = v_0 + \varphi \bullet S_t$ der Vermögensprozess zu einer Strategie φ. Es gilt

$$\begin{aligned} E\left(\ln(V_T)\right) &= E\left(\ln\left(v_0 \frac{V_1}{v_0} \frac{V_2}{V_1} \cdot \ldots \cdot \frac{V_T}{V_{T-1}}\right)\right) \\ &= E\left(\ln(v_0) + \sum_{t=1}^{T} \ln\left(\frac{V_t}{V_{t-1}}\right)\right) \\ &= \ln(v_0) + \sum_{t=1}^{T} E\left(\ln\left(\frac{V_t}{V_{t-1}}\right)\right) \\ &= \ln(v_0) + \sum_{t=1}^{T} E\left(\ln\left(1 + \frac{\varphi_t^\top \Delta S_t}{V_{t-1}}\right)\right). \qquad (3.72) \end{aligned}$$

Da der Raum der Strategien homogen ist, hängt das Optimum $\sup_{\varphi_t} E\left(\ln\left(1 + \frac{\varphi_t^\top \Delta S_t}{V_{t-1}}\right)\right)$ offenbar nicht von V_{t-1} ab. Folglich ist das Maximum über alle φ der Summe auf der rechten Seite von (3.72) die Summe der maximierten Summanden über φ_t. Man bestimme für jedes t einen $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren Zufallsvektor η_t, der den Ausdruck

$$E\left(\ln\left(1 + \eta_t^\top \Delta S_t\right)\right)$$

maximiert. Dann setze man

$$\varphi_t^i := V_{t-1} \eta_t^i, \quad i = 1, \dots, d.$$

Die Vergangenheit geht also *multiplikativ* über das Vermögen ein, mit dem man in die Periode $(t-1,t]$ hineingeht, und die Zukunft ist gar nicht relevant.

Wir schreiben wieder

$$S_t^i = s_0^i \prod_{j=1}^t (1+A_j^i), \quad t=1,\dots,T, \ i=1,\dots,d, \tag{3.73}$$

d.h. A_j^i ist die zufällige Rendite des Wertpapiers i in der j-ten Periode. Im Gegensatz zu Abschnitt 3.3.1 fordern wir aber **nicht**, dass die Renditevektoren i.i.d. sind. (3.73) ist also der allgemeine Fall (mit der kleinen Einschränkung, dass Wertpapierpreise die null werden dort bleiben).

Satz 3.32 (Logarithmischer Nutzen aus Konsum)**.** *Es existiere ein $\mathbb{R}^d$-wertiger vorhersehbarer Prozess $\gamma = (\gamma_t)_{t=1,\dots,T}$ mit $\gamma_t^\top A_t > -1$ und*

$$E\left(\frac{A_t^i}{1+\gamma_t^\top A_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = 0, \quad i=1,\dots,d, \ t=1,\dots,T \tag{3.74}$$

(Offenbar ist (3.74) die dynamische Version von (3.63) für $p=1$).
Setze

$$V_t := \frac{\sum_{j=t+1}^T k_j}{\sum_{j=0}^T k_j} v_0 \prod_{j=1}^t (1+\gamma_j^\top A_j) \qquad \textit{(mit der Konvention } \textstyle\sum_{j=T+1}^T \dots = 0\textit{).} \tag{3.75}$$

Die optimale Strategie ist dann gegeben durch

$$\varphi_t^i := \frac{\gamma_t^i}{S_{t-1}^i} V_{t-1}, \quad i=1,\dots,d$$

und

$$c_t := \frac{1}{\sum_{j=0}^T k_j} v_0 \prod_{j=1}^t (1+\gamma_j^\top A_j) \quad \overset{\textit{für } t<T}{=} \quad \frac{V_t}{\sum_{j=t+1}^T k_j}.$$

V aus (3.75) ist der zu (φ, c) gehörende Vermögensprozess mit Startkapital v_0, d.h. $V_t = v_0 + \varphi \bullet S_t - \sum_{j=0}^t c_j k_j$.

Bemerkung 3.33. *Satz 3.32 bedeutet, dass das Optimierungsproblem als reines Vorwärts-Problem gelöst werden kann. Die optimale Handelsstrategie in der ersten Periode hängt nicht von der stochastischen Verteilung der Preiszuwächse in den späteren Perioden ab. Bei Powernutzenfunktionen $u(x) = x^{1-p}$ ist dies i.A. nicht so (das homogene Marktmodell aus Abschnitt 3.3.1 bildet hier eine Ausnahme).*

Bemerkung 3.34. *Bei logarithmischem Nutzen können das Investitionsproblem und das Konsumproblem getrennt voneinander gelöst werden. Der Agent teilt zum Zeitpunkt* 0 *das Startkapital* v_0 *gedanklich auf. Für den Konsum zum Zeitpunk* t *wird der Betrag* $v_0 \frac{k_t}{\sum_{j=0}^T k_j}$ *reserviert (also gleichmäßige Verteilung des Startkapitals* v_0 *auf die verschiedenen Perioden gemäß der Gewichte* k_t*).* $v_0 \frac{k_t}{\sum_{j=0}^T k_j}$ *wird nun zwischen* 0 *und* t *am Markt investiert und zwar genauso wie sich der logarithmische Optimierer verhalten würde, wenn er das Startkapital* $v_0 \frac{k_t}{\sum_{j=0}^T k_j}$ *zur Verfügung hätte und ausschließlich am ,,Endvermögen" zum Zeitpunkt* t *interessiert wäre. Das so aus* $v_0 \frac{k_t}{\sum_{j=0}^T k_j}$ *resultierende Vermögen zum Zeitpunkt* t *wird in* t *konsumiert (dieses ist dann natürlich i.A. zufällig).* **Insbesondere hängt der optimale Konsum zum Zeitpunkt** 0 **nicht von der stochastischen Verteilung der Wertpapierpreisprozesse ab.**

Einen logarithmischen Nutzenoptimierer kann z.B. eine günstige Analgemöglichkeit zwischen $t-1$ *und* t *nicht dazu bewegen, zum Zeitpunkt* $t-1$ *etwas weniger zu konsumieren und stattdessen zu investieren, um zum Zeitpunkt* t *mit hoher Wahrscheinlichkeit deutlich mehr konsumieren zu können.*

Beweis. Mit partieller Integration (vgl. Proposition 1.5(ii)) gilt für den in (3.75) definierten Prozess mit $X_t := \frac{\sum_{j=t+1}^T k_j}{\sum_{j=0}^T k_j}$ und $Y_t := v_0 \prod_{j=1}^t (1 + \gamma_j^\top A_j)$

$$\begin{aligned}
V_t - V_{t-1} &= X_t Y_t - X_{t-1} Y_{t-1} \\
&= X_{t-1}(Y_t - Y_{t-1}) + Y_t(X_t - X_{t-1}) \\
&= \frac{\sum_{j=t}^T k_j}{\sum_{j=0}^T k_j} v_0 \left(\prod_{j=1}^{t-1} (1 + \gamma_j^\top A_j) \right) \gamma_t^\top A_t + v_0 \prod_{j=1}^{t} (1 + \gamma_j^\top A_j) \frac{-k_t}{\sum_{j=0}^T k_j} \\
&= V_{t-1} \gamma_t^\top A_t - V_t \frac{k_t}{\sum_{j=t+1}^T k_j} \\
&= \varphi_t^\top \Delta S_t - c_t k_t, \qquad t = 1, 2, \dots, T,
\end{aligned}$$

wobei für die letzte Gleichung benutzt wird, dass $\frac{\Delta S_j^i}{S_{j-1}^i} = A_j^i$. Beachte, dass $V_T = 0$ mit der Konvention $\sum_{j=T+1}^{T} \ldots = 0$. Des weiteren gilt

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{\sum_{j=1}^{T} k_j}{\sum_{j=0}^{T} k_j} v_0 \\ &= v_0 - v_0 \frac{k_0}{\sum_{j=0}^{T} k_j} \\ &= v_0 - c_0 k_0. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $V_t = v_0 + \varphi \bullet S_t - \sum_{j=0}^{t} c_j k_j$, d.h. V ist der zu (φ, c) gehörige Vermögensprozess. Es gilt

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{c_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) &= \frac{1}{c_{t-1}} E\left(\frac{1}{1+\gamma_t^\top A_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= \frac{1}{c_{t-1}} \left[1 - E\left(\frac{\gamma_t^\top A_t}{1+\gamma^\top A_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{c_{t-1}} \left[1 - \sum_{i=1}^{d} \gamma_t^i \underbrace{E\left(\frac{A_t^i}{1+\gamma_t^\top A_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}_{=0 \text{ wegen } (3.74)}\right] \\ &= \frac{1}{c_{t-1}}. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Also ist $\frac{1}{c}$ ein Martingal. Des weiteren gilt

$$E\left(\frac{1}{c_t} \Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = \frac{S_{t-1}^i}{c_{t-1}} E\left(\frac{A_t^i}{1+\gamma_t^\top A_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \overset{(3.74)}{=} 0. \tag{3.77}$$

Aus (3.77) und (3.76) folgt

$$E\left(\frac{1}{c_t} S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \overset{(3.77)}{=} E\left(\frac{1}{c_t} S_{t-1}^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = S_{t-1}^i E\left(\frac{1}{c_t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \overset{(3.76)}{=} \frac{1}{c_{t-1}} S_{t-1}^i.$$

Also sind auch die Prozesse $\frac{S^i}{c}$, $i = 1, \ldots, d$, Martingale. Des weiteren gilt $V_T = 0$. Damit folgt aus Satz 3.28(i), dass (φ, c) optimal ist. □

3.3.4 Existenz einer optimalen Strategie

Zum Schluss des Kapitels werden wir (wieder für allgemeine Nutzenfunktionen) die Existenz einer optimalen Strategie für die Optimierungierung des Erwartungsnutzen aus dem Endkonsum diskutieren.

Satz 3.35. *Wir nehmen wieder an, dass $u(v_0) > -\infty$*

(a) *Wenn eine erwartungsnutzenoptimale Strategie φ existiert, dann ist der Markt arbitragefrei.*

(b) *Nehme an, dass der Markt arbitragefrei ist und eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist*

(i) $u(x_0) = -\infty$ *für ein* $x_0 < v_0$ *(damit natürlich auch* $u = -\infty$ *auf ganz* $(-\infty, x_0]$*)*

(ii) $\sup_{x \in \mathbb{R}} u(x) < \infty$

Dann existiert eine erwartungsnutzenoptimale Strategie φ.

Beweis. Ad (a): Nehme an es gibt eine Arbitragestrategie ψ, d.h. $\psi \bullet S_T \geq 0$ und $P(\psi \bullet S_T > 0) > 0$, und eine erwartungsnutzenoptimale Strategie φ. Wegen $u' > 0$ gilt $u(v_0 + (\varphi + \psi) \bullet S_T) \geq u(v_0 + \varphi \bullet S_T)$ und $P(u(v_0 + (\varphi + \psi) \bullet S_T) > u(v_0 + \varphi \bullet S_T)) > 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von φ.

Ad (b): Sei der Markt arbitragefrei.

Vorüberlegung: Wir betrachten den linearen Unterraum $N = \{\eta | \eta \bullet S_T = 0\}$. Da es in dem Markt *redundante Wertpapiere* geben kann besteht i.A. N nicht nur aus der Null. Mit der Identifizierung der vorhersehbaren Prozesse mit dem $\mathbb{R}^n$ können wir zu N einen Orthogonalraum $N^\perp$ definieren. Jede vorhersehbare Strategie φ lässt sich somit schreiben als $\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$, wobei $\varphi^{(1)} \in N$ und $\varphi^{(2)} \in N^\perp$. Da $\varphi^{(1)}$ in das Endvermögen nicht eingeht, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\varphi \in N^\perp$, d.h. o.B.d.A. $N = \{0\}$. Aus $\varphi \bullet S_T = 0$ folgt also stets, dass $\varphi = 0$.

ad (i): Nehme zunächst an, dass (i) gilt. Wir wollen zeigen, dass die Menge der zufälligen Endvermögen, die man mit gegebenem Startkapital v_0 erzeugen kann und die x_0 nicht unterschreiten, kompakt ist, d.h. $\mathcal{X}(v_0) = \{X \subset \mathbb{R}^\Omega | \exists \psi \text{ so dass } X = v_0 + \psi \bullet S_T \text{ und } X \geq x_0\}$ ist kompakt. Nehme an, dies wäre nicht der Fall. Dann existiert eine Folge $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}(v_0)$ mit $\lambda_n := \sup_{\omega \in \Omega} |X^{(n)}(\omega)|$ und $\lambda_n \to \infty$, wenn $n \to \infty$. Wegen der Vorüberlegung existiert zu jedem $X^{(n)}$ ein **eindeutiges** $\psi^{(n)}$ mit $X^{(n)} = v_0 + \psi^{(n)} \bullet S_T$.

O.B.d.A. konvergiert $\frac{X^{(n)}}{\lambda_n}$ gegen eine Zufallsvariable $\widetilde{X}$ und $\frac{\psi^{(n)}}{\lambda_n}$ gegen ein $\widetilde{\psi}$ mit $\widetilde{X} = \widetilde{\psi} \bullet S_T$. Es folgt also

$$\frac{x_0}{\lambda_n} \leq \frac{X^{(n)}}{\lambda_n} \to \widetilde{\psi} \bullet S_T, \quad n \to \infty$$

Es folgt daraus, dass $\widetilde{\psi} \bullet S_T \geq 0$ und damit $\widetilde{\psi} \bullet S_T = 0$ (No-Arbitrage) und schließlich $\widetilde{\psi} = 0$ (Vorbemerkung). Da $||\frac{X_n}{\lambda_n}||_{L^\infty} = 1$ kann dies aber nicht sein. Damit ist $\mathcal{X}(v_0)$ kompakt. Wegen Stetigkeit der Abbildung $\psi \mapsto E(u(V_T(\psi)))$ existiert eine optimale Strategie φ.

Sei nun (ii) vorausgesetzt. Der Beweis im Fall (i) war darauf aufgebaut, dass $V_T(\psi) \geq x_0$, für alle Strategien ψ mit $Eu(V_T(\psi)) > -\infty$ Statt alle Vermögensprozesse mit $Eu(V_T(\psi)) > -\infty$ betrachten wir nun alle Vermögensprozesse, die zumindest den (erwarteten) Nutzen von v_0 liefern. Also $Eu(V_T(\psi)) \geq u(v_0)$. Natürlich können wir uns bei der Maximierung auf diese Strategien beschränken.

Da $\sup_{x\in\mathbb{R}} u(x) - u(v_0) < \infty$, aber $\inf_{x\in\mathbb{R}} u(x) = -\infty$ folgt wegen $|\Omega| < \infty$ und $P(\{\omega\}) > 0$, dass es ein x_0' geben muss, so dass folgende Implikation gilt

$$Eu(V_T(\psi)) \geq u(v_0) \Rightarrow V_T(\psi) \geq x_0'.$$

Für x_0' hinreichend klein ist nämlich $V_T(\psi)(\omega) < x_0'$, für ein einziges ω, bereits ein Verlust im Erwartungswert im Vergleich zu $u(v_0)$, der auf $\Omega \setminus \{\omega\}$ wegen der Beschränktheit nach oben von u nicht wieder gutgemacht werden kann. Formal: $u(x_0') \leq u(v_0) - \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} u(x) - u(v_0)}{\min_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})}$. Damit folgt der Fall (ii) analog zu Fall (i). □

4 Risikomaße

Zum Schluss der zweistündigen Vorlesung soll eine kurze Einführung in die Theorie der Risikomaße geben werden. Für eine intensivere Beschäftigung mit diesem Thema sei das Buch von Föllmer und Schied [5] empfohlen. Im folgenden seien $|\Omega| < \infty$ und $T = 1$. Letzteres heißt, dass es nur zwei Zeitpunkte, nämlich 0 und 1 gibt. Der Einfachheit halber betrachten wir alle Wertgrößen als diskontierte Wertgrößen, d.h. wir gehen von der Existenz eines Wertpapiers mit Preisprozess $S_0^0 = S_1^0 = 1$ aus (ansonsten soll es keine weiteren handelbaren Wertpapiere geben).

Ein Riskomaß ρ ist eine Abbildung, die jeder zufälligen Auszahlung X, die zum Zeitpunkt 1 stattfinden soll, eine reelle Zahl $\rho(X)$ zuordnet.

Im Zuge von **Basel II**[§] müssen Banken, wenn sie risikoreiche Geschäfte tätigen (z.B. Kredite vergeben oder auf eigene Rechnung am Kapitalmarkt investieren), über hinrei-

[§]Eigenkapitalvorschriften, die vom Basler Ausschuss für Bankenaufsicht vorgeschlagen wurden. Die chend viel Eigenkapital verfügen, das ihre Geschäfte absichert. Wenn $\mathbf{X}$ der **zufällige Gewinn** der Bank ist (etwa der zum Zeitpunkt 1 zurückgezahlte Geldbetrag aus einem Kreditgeschäft mit Ausfallrisiko abzüglich des zum Zeitpunkt 0 verliehenen Betrags), dann kann $\rho(\mathbf{X})$ als **Eigenkapital** interpretiert werden, das die Bank zum Zeitpunkt 0 dafür ,,reservieren" muss. Sinn dieser Eigenkapitalhinterlegung ist es, die Wahrscheinlichkeit, dass der Verlust aus X das Eigenkapital übersteigt, klein zu halten. ,,Reservierung" oder ,,Hinterlegung" bedeuten nur, dass für die Geschäftstätigkeit genügend Eigenkapital vorhanden ist (und der Anteil an Fremdkapital nicht zu hoch ist). Der Geldbetrag $\rho(X)$ muss hier **nicht** ,,beiseite gelegt werden" oder risikolos investiert werden. Die Summe aus Eigen- und Fremdkapital könnte z.B. vollständig in einem Wertpapier investiert (und damit gebunden) sein, das mit einem moderaten Risiko behaftet ist.

Jede Bank ist bestrebt, den zu reservierenden Betrag möglichst gering zu halten, um bei gegebenem Eigenkapital ein möglichst großes Geschäftsvolumen zu ermöglichen (und damit das Potential für hohe Eigenkapitalrenditen zu haben). Daher ist die von der Bankenaufsicht geforderte Eigenkapitalhinterlegung $\rho(X)$ i.d.R. auch nicht so groß, dass damit jeder mögliche Verlust abgesichert ist.

Definition 4.1. *Eine Abbildung* $\rho : \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ *heißt* **kohärentes Risikomaß**, *falls folgende Bedingungen erfüllt sind*

(1) **Translationsinvarianz**: *Für alle* $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $y \in \mathbb{R}$ *gilt* $\rho(X+y) = \rho(X)-y$

(2) **Subadditivität**: *Für alle* $X, Y \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *gilt* $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

(3) **Positive Homogenität**: *Für alle* $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *gilt* $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$

(4) **Monotonie**: *Für alle* $X, Y \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *mit* $X \leq Y$ *gilt* $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

Bemerkung 4.2. *Aus der positiven Homogenität folgt* $\rho(0) = \rho(2 \cdot 0) = 2\rho(0)$ *und damit* $\rho(0) = 0$. *Zusammen mit der Translationsinvarianz ergibt dies für alle* $y \in \mathbb{R}$

$$\rho(y) = \rho(0+y) = \rho(0) - y = -y. \tag{4.78}$$

Regeln müssen gemäß EU-Richtlinien seit dem 1. Januar 2007 in den Mitgliedsstaaten der Europäischen Union für alle Kreditinstitute und Finanzdienstleistungsinstitute angewendet werden. Unter der Überschrift Basel III wurde im Dezember 2010 ein neues Regelwerk veröffentlicht, das ab 2013 schrittweise in Kraft treten soll und das die bisherigen Regelungen von Basel II ergänzt und weiterentwickelt.

Bemerkung 4.3. *Axiom 2 besagt, dass der zu hinterlegende Geldbetrag für ein Portfolio an Geschäften die Summe der Sicherheiten, die für die Einzelgeschäfte zu hinterlegen wären, nicht übersteigen darf (Diversifikation wird nicht bestraft). Wenn Axiom 2 nicht gölte, könnte sich eine Bank zerschlagen und die Einzelteile müssten dann zusammen weniger Sicherheiten aufbringen als zuvor die Gesamtbank. Axiom 3 besagt, dass die Sicherheiten nicht von der Größenordnung des Geschäfts abhängen, also der Geldbetrag mit dem Volumen linear anwächst. Dieses Axiom ist umstritten. Eine Abschwächung dieser Forderung führt von kohärenten zur größeren Klasse der konvexen Risikomaße, die wir aber in dieser Vorlesung nicht behandel werden.*

Bemerkung 4.4. *$\rho(X)$ kann als eine monetäre Einheit interpretiert werden. Dies ist ein Vorteil zu Nutzenfunktionen: der erwartete Nutzen der Auszahlung X, also $E(u(X))$, lässt sich nicht als Geldeinheit interpretieren. Allerdings liefert ρ i.A. noch kein sinnvolles Entscheidungskriterium. D.h. $\rho(Y) < \rho(X)$ bedeutet noch nicht, dass das Geschäft mit Auszahlung Y dem mit Auszahlung X vorzuziehen ist.*

Bemerkung 4.5. *Bei der Menge $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ der P-f.s. endlichen Zufallsvariablen spielt das Maß P keine wesentliche Rolle. Es spezifiziert nur die Menge der Nullmengen. Im Fall von endlichen Grundräumen, auf den wir uns in diesem Kapitel beschränken, könnte man P in der Definition auch ganz weglassen. Wir brauchen also nicht die Existenz eines "universellen" Wahrscheinlichkeitsmaßes, das von niemandem in Frage gestellt wird, vorauszusetzen. Vielmehr kann es eine ganze Reihe sog.* subjektiver Wahrscheinlichkeitsmaße *geben, die etwa verschiedene Markteinschätzungen der Mitarbeiter einer Bank widerspiegeln.*

Beispiel 4.6. *Ein Beispiel für ein kohärentes Risikomaß ist das Worst-Case-Risikomaß*

$$\rho_{\max}(X) := -\min_{\omega \in \Omega} X(\omega) = \max_{\omega \in \Omega}(-X(\omega)), \quad \forall X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Unter allen kohärenten Risikomaßen ordnet $\rho_{\max}$ einer zufälligen Auszahlung X das größte Risiko zu. Für ein kohärentes Risikomaß ρ gilt nämlich wegen $X \geq \min_{\widetilde{\omega} \in \Omega} X(\widetilde{\omega})$, Monotonie und (4.78)

$$\rho(X) \leq \rho(\min_{\widetilde{\omega} \in \Omega} X(\widetilde{\omega})) = -\min_{\widetilde{\omega} \in \Omega} X(\widetilde{\omega}) = \rho_{\max}(X).$$

Definition 4.7 (Value-at-risk). *Sei $\alpha \in (0,1)$. Die Abbildung*

$$\mathrm{VaR}_\alpha : \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto -\inf\{y \in \mathbb{R} \mid P(X \leq y) > \alpha\}$$

wird als Value-at-risk zum Niveau α bezeichnet.

Der Value-at-risk ist natürlich nichts anderes als $-q_\alpha$, wobei q_α das (größte) α-Quantil der Verteilung der Auszahlung ist. Der Value-at-risk ist offenbar translationsinvariant, positiv homogen und monoton. Er ist aber **nicht** subadditiv und damit **kein** kohärentes Risikomaß im Sinne von Definition 4.1 wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.8. *Setze $\alpha = 0.05$. X_1, X_2 seien zwei voneinander stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit*

$$X_i = \begin{cases} 0 & \textit{mit Wahrscheinlichkeit} \quad 0.96 \\ -1 & \textit{mit Wahrscheinlichkeit} \quad 0.04 \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Es folgt

$$X_1 + X_2 = \begin{cases} 0 & \textit{mit Wahrscheinlichkeit} \quad (0.96)^2 \\ -1 & \textit{mit Wahrscheinlichkeit} \quad 2 \times 0.96 \times 0.04 > 0.05 \\ -2 & \textit{mit Wahrscheinlichkeit} \quad (0.04)^2 < 0.05 \end{cases}$$

Es gilt $\mathrm{VaR}_{0.05}(X_1) = \mathrm{VaR}_{0.05}(X_2) = 0$ *aber* $\mathrm{VaR}_{0.05}(X_1 + X_2) = 1$. *Also ist der Value-at-risk nicht subadditiv. Das Problem ist, dass Verluste, die mit einer kleineren Wahrscheinlichkeit als* 0.05 *eintreten, nicht mehr interessieren.*

Beispiel 4.9. *Sei $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Die Abbildung*

$$\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto -E(X) + a\sqrt{\mathrm{Varianz}(X)}$$

ist offenbar translationsinvariant, subadditiv und positiv homogen, aber **nicht monoton** *und damit auch kein kohärentes Risikomaß. Subadditivität folgt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung. Es gilt nämlich*

$$\begin{aligned} \mathrm{Varianz}(X+Y) &= \mathrm{Varianz}(X) + 2\mathrm{Kovarianz}(X,Y) + \mathrm{Varianz}(Y) \\ &\overset{\textit{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \mathrm{Varianz}(X) + 2\sqrt{\mathrm{Varianz}(X)\mathrm{Varianz}(Y)} + \mathrm{Varianz}(Y) \\ &= \left(\sqrt{\mathrm{Varianz}(X)} + \sqrt{\mathrm{Varianz}(Y)}\right)^2. \end{aligned}$$

Satz 4.10. *$\rho : \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ ist genau dann ein kohärentes Risikomaß, wenn es eine nichtleere Menge $\mathcal{P}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{F})$ gibt mit*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} E_Q(-X), \quad \forall X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P). \tag{4.79}$$

Die Maße Q können als mögliche **Szenarien** interpretiert werden. Verschiedene Experten haben unterschiedliche subjektive Wahrscheinlichsmaße Q. Das Risiko ist nun der Erwartungswert des Verlustes $-X$ unter dem ungünstigsten der vorkommenden Wahrscheinlichkeitsmaße.

Lemma 4.11. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, konvexe Menge und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \notin U$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^\top u < \lambda^\top x$ für alle $u \in U$ (vgl. die Aussage mit Lemma 1.19).*

Der Beweis des Lemmas befindet sich z.B. in [17], Theorem 2.39.

Beweis von Satz 4.10. $\Leftarrow$: Wenn ρ die Darstellung (4.79) besitzt, rechnet man die Eigenschaften in Definition 4.1 schnell nach.

$\Rightarrow$: Sei ρ ein kohärentes Risikomaß. Für jedes feste $X_0 \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wollen wir ein Wahrscheinlichkeitmaß Q finden mit

$$E_Q(-X_0) = \rho(X_0) \quad \text{und} \quad E_Q(-X) \leq \rho(X), \quad \forall X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P). \tag{4.80}$$

Aus (4.80) folgt offenbar die Behauptung: wähle z.B. die Menge

$$\mathcal{P} := \{Q \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß} \mid E_Q(-X) \leq \rho(X), \ \forall X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)\}.$$

Bei dieser Wahl von $\mathcal{P}$ gilt in (4.79) stets $\geq$. Wenn Aussage (4.80) gilt, ist $\mathcal{P}$ zudem nichtleer und es existiert zu jedem X_0 ein $Q \in \mathcal{P}$, so dass der Wert $\rho(X_0)$ angenommen wird.

Zeigen wir also (4.80) für $X_0 \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Wegen der Translationsinvarianz von ρ und $X \mapsto E_Q(-X)$ reicht es Aussage (4.80) für X_0 mit

$$\rho(X_0) = 1 \tag{4.81}$$

zu zeigen. Definiere

$$U := \{X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid \rho(X) < \rho(X_0) = 1\}.$$

U besteht also aus allen Auzahlungen, die „risikoärmer" sind als X_0. Für $X \in U$ und $\widetilde{X} \geq X - \frac{\varepsilon}{2}$ mit $\varepsilon := \rho(X_0) - \rho(X) > 0$ gilt wegen der Monotonie und der Translationsinvarianz $\rho(\widetilde{X}) \leq \rho\left(X - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \rho(X) + \frac{\varepsilon}{2} < \rho(X_0)$, d.h. $\widetilde{X} \in U$. U ist also offen. Wegen der Subadditivität und der positiven Homogenität von ρ gilt für $X_1, X_2 \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\lambda \in [0, 1]$

$$\rho(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \rho(\lambda X_1) + \rho((1-\lambda)X_2) = \lambda\rho(X_1) + (1-\lambda)\rho(X_2).$$

Die Menge U ist also konvex. Des weiteren gilt $X_0 \neq U$. Damit ist Lemma 4.11 auf U und X_0 anwendbar (mit der üblichen Identifikation von reellwertigen Zufallsvariablen auf endlichen Grundräumen mit Elementen aus dem $\mathbb{R}^n$). Es existiert also eine lineare Abbildung

$$l : \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad l(X) < l(X_0), \quad \forall X \in U. \tag{4.82}$$

Wegen $0 \in U$ gilt $0 \overset{l \text{ linear}}{=} l(0) < l(X_0)$. Damit können wir l so normieren, dass

$$l(X_0) = 1 = \rho(X_0). \tag{4.83}$$

Für $\varepsilon > 0$ gilt $(-1 + \varepsilon) \in U$ und damit wegen (4.82)

$$(-1 + \varepsilon)l(1) \overset{l \text{ linear}}{=} l(-1 + \varepsilon) < l(X_0) = 1$$

also

$$(1 - \varepsilon)l(1) > -1.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt $l(1) \geq -1$. Andererseits gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$\rho(2X_0 + \rho(X_0) + \varepsilon) = 2\rho(X_0) - \rho(X_0) - \varepsilon < \rho(X_0).$$

Also ist die Auszahlung $(2X_0 + \rho(X_0) + \varepsilon)$ in der Menge U und wegen (4.82) folgt

$$2l(X_0) + (\rho(X_0) + \varepsilon)l(1) = l(2X_0 + \rho(X_0) + \varepsilon) < l(X_0).$$

Mit (4.83) bedeutet dies

$$(1 + \varepsilon)l(1) < -1.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt $l(1) \leq -1$ und damit insgesamt

$$l(1) = -1. \tag{4.84}$$

Für alle $\omega_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$\rho\left(1_{\{\omega_0\}} - \rho(X_0) + \varepsilon\right) = \rho\left(1_{\{\omega_0\}}\right) + \rho(X_0) - \varepsilon \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \rho(X_0) - \varepsilon < \rho(X_0)$$

also $\left(1_{\{\omega_0\}} - \rho(X_0) + \varepsilon\right) \in U$. Aus (4.82) folgt, dass

$$l\left(1_{\{\omega_0\}}\right) - \rho(X_0)l(1) + \varepsilon l(1) = l\left(1_{\{\omega_0\}} - \rho(X_0) + \varepsilon\right) < l\left(X_0\right)$$

und damit, wegen $l(1) = -1$, $l\left(1_{\{\omega_0\}}\right) < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt

$$l\left(1_{\{\omega_0\}}\right) \leq 0. \tag{4.85}$$

Wegen (4.84) und (4.85) können wir vermöge

$$Q(A) := l(-1_A), \quad A \in \mathcal{F}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß definieren. Wegen der Linearität von l gilt $E_Q(-X_0) = l(X_0) = \rho(X_0)$. Bleibt zu zeigen, dass Q die Ungleichung in (4.80) erfüllt. Sei $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\varepsilon > 0$. Definiere $\widetilde{X} := X + \rho(X) - \rho(X_0) + \varepsilon$. Es gilt

$$\rho(\widetilde{X}) = \rho(X) - \rho(X) + \rho(X_0) - \varepsilon < \rho(X_0)$$

also $\widetilde{X} \in U$. Damit folgt aus (4.82) und $l(1) = -1$

$$l(X) - \rho(X) + \rho(X_0) - \varepsilon = l(X + \rho(X) - \rho(X_0) + \varepsilon) < l(X_0).$$

Also wegen $\rho(X_0) = 1 = l(X_0)$ folgt $l(X) < \rho(X) + \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt

$$E_Q(-X) = l(X) \leq \rho(X)$$

und damit die Behauptung. □

Beispiel für ein interessantes kohärentes Risikomaß ist der „schlimmste bedingte Erwartungswert"

Definition 4.12. *Sei $\alpha \in (0,1)$. Die Abbildung*

$$\mathrm{WCE}_\alpha : \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto \sup_{\{A \in \mathcal{F} \mid P(A) > \alpha\}} E_P(-X \mid A)$$

wird als **schlimmster bedigter Erwartungswert** *zum Niveau α bezeichnet ($E_P(Y \mid A) := \frac{E_P(1_A Y)}{P(A)}$).*

Proposition 4.13. WCE_α *ist ein kohärentes Risikomaß mit* $\mathrm{VaR}_\alpha \leq \mathrm{WCE}_\alpha$.

Proof. WCE_α besitzt nach Konstruktion die Darstellung (4.79) mit $\mathcal{P} := \{P(\cdot|A) \,|P(A) > \alpha\}$ ($P(B \mid A) := \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$, es gilt $E_P(-X \mid A) = E_{P(\cdot|A)}(-X)$) . Mit Satz 4.10 ist WCE_α kohärent. Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $P(\{X \leq y\}) > \alpha$. Dann gilt

$$\mathrm{WCE}_\alpha(X) \geq E_P(-X \mid \{X \leq y\}) = \frac{E_P(-1_{\{X \leq y\}} X)}{P(\{X \leq y\})} \geq \frac{E_P(-1_{\{X \leq y\}} y)}{P(\{X \leq y\})} = -y.$$

Damit folgt $\mathrm{WCE}_\alpha(X) \geq \sup\{-y \mid P(X \leq y) > \alpha\} = -\inf\{y \mid P(X \leq y) > \alpha\} = \mathrm{VaR}_\alpha(X)$. □

Der WCE_α ist recht ähnlich zum Average Value at Risk zum Niveau α

$$\mathrm{AVaR}_\alpha(X) := \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \mathrm{VaR}_\lambda(X) \, d\lambda.$$

Es gilt $\mathrm{AVaR}_\alpha(X) \geq \mathrm{WCE}_\alpha(X)$, wobei auf einem atomlosen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Gleichheit gelten würde (ein Wahrscheinlichkeitsraum heißt atomlos, wenn zu jedem $A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) > 0$ ein $B \in \mathcal{F}$, $B \subset A$ existiert mit $0 < P(B) < P(A)$, endliche Wahrscheinlichkeitsräume sind allerdings nie atomlos). Siehe dazu Föllmer und Schied [5].

5 Neutrale Derivatebewertung

In unvollständigen Märkten reichen Arbitrageargumente i.A. nicht aus, um eindeutige Derivatepreise zu bestimmen. Man erhält ein ganzes Intervall von No-Arbitrage-Preisen. Jeder Preis in diesem Intervall ist vereinbar mit der Bedingung, dass es keine risikolose Gewinnmöglichkeit geben soll. In vielen Modellen von praktischer Relevanz ist das Intervall dieser No-Arbitrage-Preise jedoch sehr groß und liefert nur “triviale Schranken” (wie die in Übungsaufgabe 1, Blatt 2). Daher ist man natürlich bemüht, einen Preis aus diesem Intervall herauszupicken, der besonders plausibel erscheint. Dies erfordert natürlich stärkere Annahmen an das Modell. Bei No-Arbitrage Argumenten reicht es aus, dass für die Agenten "mehr" besser als "weniger" ist, bzw. dass ein riskoloser Gewinn von niemandem ausgeschlagen würde.

Statt Arbitrageure, die nur an risikolosen Gewinnen interessiert sind, betrachten wir nun Nutzenoptimierer. Nehme an, dass eine *typische Marktteilnehmerin* eine Nutzenfunktion u hat und ausgehend von einem Startkapital $v_0 \in \mathbb{R}$ ihren Erwartungsnutzen $Eu(V_T(\varphi))$ maximieren möchte.

Definition 5.1. *Wir nennen Derivatepreisprozesse $S^{d+1}, \dots, S^{d+n}$ mit $S_T^{d+i} = H^i$, $i = 1, \dots, n$,* neutral*, wenn die repräsentative Nutzenmaximiererin bei diesem Preisprozess weder Short- noch Longpositionen des Derivates in ihrem Portfolio halten möchte. D.h. es existiert eine Strategie*
$\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d, \varphi^{d+1}, \dots, \varphi^{d+n})$, die $Eu(V_T(\cdot))$ maximiert und für die gilt $\varphi^{d+i} = 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Da die Nutzenmaximiererin das Derivat zu einem neutralen Preis weder kaufen noch verkaufen will, erscheint es weder unter- noch überbewertet zu sein.

Satz 5.2. *Sei u eine auf einem offenen Intervall definierte, streng monoton wachsende, streng konkave, differenzierbare Nutzenfunktion. Es existiere eine optimale Strategie $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ im Markt $(S^0, S^1, \dots, S^d)$. Dann hat jede endliche Folge von Optionen $(H^1, \dots, H^n)$ eindeutige neutrale Derivatepreisprozesse. Diese sind gegeben durch*

$$S_t^{d+i} = E_{P^\star}(H^i | \mathcal{F}_t), \tag{5.86}$$

wobei

$$\frac{dP^\star}{dP} = \frac{u'(V_T(\varphi^1, \dots, \varphi^d)}{E_P(u'(V_T(\varphi^1, \dots, \varphi^d)))}. \tag{5.87}$$

Beweis. Existenz: Seien S_t^{d+i} wie in (5.86) definiert. Damit ist $P^\star$ auch ein ÄMM im vergrößerten Markt $(S^0, S^1, \dots, S^d, S^{d+1}, \dots, S^{d+n})$. Wegen

$$V_T((\varphi^1, \dots, \varphi^d, 0, \dots, 0)) = V_T((\varphi^1, \dots, \varphi^d,))$$

und Satz 3.16 ist $(\varphi^1, \dots, \varphi^d, 0, \dots, 0)$ eine optimale Strategie im vergrößerten Markt $(S^0, S^1, \dots, S^d, S^{d+1}, \dots, S^{d+n})$.

Eindeutigkeit: Seien nun $(\widetilde{S}^{d+1}, \dots, \widetilde{S}^{d+n})$ neutrale Derivatepreisprozesse und $(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d, 0, \dots, 0)$ eine optimale Strategie im vergrößerten Markt $(S^0, S^1, \dots, S^d, \widetilde{S}^{d+1}, \dots, \widetilde{S}^{d+n})$. Dann ist natürlich $(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)$ optimal im kleinen Markt $(S^0, S^1, \dots, S^d)$. Somit gilt wegen der Eindeutigkeit des optimalen Endvermögens (Satz 3.15), dass $V_T((\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)) = V_T((\varphi^1, \dots, \varphi^d))$. Somit stimmt das durch

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP} = \frac{u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d))}{E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)))}$$

definierte Maß mit $P^\star$ aus (5.87) überein. Da nach Satz 3.16 die $\widetilde{S}^{d+i}$ $\widetilde{P}$-Martingale sind und wegen der Endbedingung $\widetilde{S}^{d+i}_T = H^i$ folgt die Eindeutigkeit. □

6 Amerikanische Optionen

Definition 6.1. *Ein Amerikainischer Claim ist durch einen nichtnegativen Prozess* $L = (L_t)_{t=0,\dots,T}$ *gegeben.* L_t *ist die* **diskontierte** *Auszahlung des Claims zum Zeitpunkt* t.

Der *Käufer* eines amerikanischen Claims kann diesen jederzeit bis zum Verfallszeitpunkt T ausüben. Der Claim kann jedoch nur einmal ausgeübt werden. Sobald er ausgeübt ist, erhält der Käufer die entsprechende Auszahlung und alle weiteren Rechte verfallen. Anderseits kann der Claim auch nicht rückwirkend ausgeübt werden. Der Käufer kann also nicht zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ die Auszahlung L_{t_1} einfordern. Damit korrespondiert die optimale Ausübung mit einem optimalen Stopp-Problem.

Definition 6.2. *Eine Ausübungsstrategie für einen Amerikainischen Claim* L *ist eine Stoppzeit* τ*, die Werte in* $\{0, \dots, T\}$ *annehmen kann. Die Auszahlung ist dann gegeben durch* $L_{\tau(\omega)}(\omega)$.

Beispiel 6.3. *Bei amerikanischen Put bzw. Call Optionen ist die diskontierte Auszahlung gegeben durch* $L_t = e^{-rt}(K - S^1_t)^+$ *bzw.* $L_t = e^{-rt}(S^1_t - K)^+$ *(*r *ist der "risikolose" Zinsatz, d.h.* $S^0_t = e^{rt}$*).*

Bei gleichem Strike K ist die amerikanische Put Option genau dann "out of the money", wenn die Call Option "in the money" ist. Deshalb ist klar, dass die optimale

Ausübung in der Regel zu unterschiedlichen Zeitpunkten erfolgt. Insbesondere gilt die Put-Call-Parität für europäische Optionen (vgl. Blatt2, Aufgabe 2) hier nicht.

Beispiel 6.4. *Russische Optionen lassen sich als amerikanische Claims darstellen. Die Auszahlung bei Ausübung zum Zeitpunkt $t \in \{0, \dots, T\}$ ist gegeben durch*

$$L_t := (\max_{j=0,\dots,t} S_j^1 - c_1 t) \vee c_2, \quad c_1 > 0, c_2 \geq 0$$

Bemerkung 6.5. *Man kann natürlich jeden europäischen Claim H als Spezialfall eines amerikanischen Claims interpretieren kann. Setze dazu einfach*

$$L_t := \begin{cases} 0 & \text{für } t < T \\ H & \text{für } t = T \end{cases} \tag{6.88}$$

Beispiel 6.6 (Bermuda Option)**.** *Eine Bermuda Option kann vom Käufer jederzeit innerhalb einer vorbestimmten Teilmenge $\mathcal{T} \subset \{0, \dots, T\}$ ausgeübt werden. Zum Beispiel zahlt die Option den Betrag $(S_t^1 - K)^+$, wenn sie zum Zeitpunkt t ausgeübt wird. Eine Bermuda Option kann also auch als eine spezielle amerikanische Option betrachtet werden mit $L_t = 0$ für $t \notin \mathcal{T}$. Damit ist eine Bermuda Option ein Finanzinstrument irgendwo zwischen einer amerikanischen Option mit $\mathcal{T} = \{0, \dots, T\}$ und einer europäischen Option mit $\mathcal{T} = \{T\}$ – ganz ähnlich wie Bermuda zwischen Amerika und Europa liegt.*

Beispiel 6.7 (Installment Option)**.** *Eine Installment Option ist einerseits eine Option europäischen Typs, d.h. die (mögliche) Auszahlung an den Besitzer erfolgt zum Zeitpunkt T. Andererseits wird die fällige Prämie für eine Installment Option in verschiedenen Raten gezahlt und es besteht die Möglichkeit, die Prämienzahlung vorzeitig einzustellen – allerdings um den Preis, dass dann eine mögliche Auszahlung zum Zeitpunkt T entfällt. Da also sowohl die Einzahlungen als auch die mit der Option verbundene Auszahlung von der Stoppstrategie τ des Besitzers beeinflusst werden können, ist es sinnvoll mit L_t die Differenz aus Aus- und Einzahlungen zu modellieren (in Geldeinheiten zum Zeitpunkt t ausgedrückt), wenn der Besitzer den Vertrag zum Zeitpunkt t aufkündigt. Wenn r die risikolose Zinsrate pro Zeiteinheit ist, sieht L im Falle einer Call Option wie folgt aus:*

$$L_t = -\sum_{i=0}^{t-1} (1+r)^{t-i}, \quad t = 1, \dots, T-1$$

$$L_T = (S_T^1 - K)^+ - \sum_{i=0}^{T-1} (1+r)^{T-i}.$$

Um amerikanische Optionen analysieren zu können, brauchen wir zunächst ein paar weitere Hilfsmittel.

Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{X}$ eine nichtleere Menge von $\mathcal{G}$-messbaren reellwertigen Zufallsvariablen ($\mathcal{X}$ ist i.A. überabzählbar) Wir wollen nun das Supremum der Zufallsvariablen $X \in \mathcal{X}$ bilden. Wenn $\mathcal{X}$ abzählbar ist, können wir einfach das *punktweise Supremum* der Zufallsvariablen $X \in \mathcal{X}$ bilden, d.h. $X^\star(\omega) := \sup_{X\in\mathcal{X}} X(\omega)$. $X^\star$ ist dann auch wieder ($\mathcal{G}$-)messbar, also eine Zufallsvariable. Im überabzählbaren Fall muss dies nicht mehr der Fall sein. Aber auch in Fällen, in denen das punktweise Supremum messbar ist, kann es zu unerwünschten Ergebnissen kommen, wenn man auf "P-fast-sicher"-Aussagen hinaus will. Betrachte dazu das folgende Beispiel: $\Omega = [0,1]$ und $\mathcal{X} = \{1_{\{y\}} | y \in [0,1]\}$ und P ist das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$. Dann gilt $\sup_{X\in\mathcal{X}} X(\omega) = 1$, $\forall\omega \in [0,1]$, aber $P(X = 0) = 1$ für jedes einzelne $X \in \mathcal{X}$.

Definition 6.8. *Eine Zufallsvariable Z ist ein essentielles Supremum von $\mathcal{X}$ bezüglich einer σ-Algebra $\mathcal{G}$ und eines Maßes P, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllt*

(i) Z ist $\mathcal{G}$-messbar

(ii) $P(Z \geq X) = 1 \ \forall X \in \mathcal{X}$

(iii) Für jede $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable Z' die Eigenschaft (ii) erfüllt, gilt $P(Z' \geq Z) = 1$

Wir werden sehen, dass es P-f.s. ein eindeutiges essentielles Supremum gibt. Wir schreiben dann ess sup$\mathcal{X} := Z$. Das essentielle Infimum kann man dann durch ess inf$\mathcal{X} := -$ess sup$(-\mathcal{X})$ definieren.

Bemerkung 6.9. *Das Maß P brauchen wir bei der Definition nur zur Festlegung der Nullmengen, d.h. der Mengen $N \in \mathcal{G}$ mit $P(N) = 0$. Gehen wir also zu einem äquivalenten Martingalmaß Q über, so ändert sich die Definition nicht.*

Bemerkung 6.10. *Analog zu dem Supremum in $\mathbb{R}$ sucht man hier auch die kleinste Schranke, die alle $X \in \mathcal{X}$ dominiert. Nur sucht man diese Schranke in der Menge der $\mathcal{G}$-messbaren Zufallsvariablen und versteht Dominanz im P-f.s. Sinne.*

Satz 6.11. *Für jede nichtleere Menge $\mathcal{X}$ von $\mathcal{G}$-messbaren reellwertigen Zufallsvariablen, gibt es ein bis auf P-Nullmengen eindeutiges essentielles Supremum bzgl. $\mathcal{G}$ (mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Ist darüberhinaus $\mathcal{X}$ maximumsstabil, d.h. $X_1, X_2 \in \mathcal{X} \implies X_1 \vee X_2 \in \mathcal{X}$, dann existiert eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ mit $\lim_{n\in\mathbb{N}} X_n = \text{ess sup}\mathcal{X}$ P-f.s.*

Beweis. Eindeutigkeit: Seinen Z_1, Z_2 zwei Zufallsvariablen, die (i)-(iii) erfüllen. Dann gilt $P(Z_2 \geq Z_1) = P(Z_1 \geq Z_2) = 1$.
Existenz: Sei $f : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \to [0, 1]$ eine strikt monotone, stetige Funktion. Definiere folgende Menge $\widetilde{\mathcal{X}} := \{X_1 \vee \ldots \vee X_k | X_i \in \mathcal{X},\ k \in \mathbb{N}\}$. Sei $m := \sup_{X\in\widetilde{\mathcal{X}}} E_P f(X)$. Wegen $f \leq 1$ gilt auch $m \leq 1$. Es existiert eine monoton aufsteigende Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{\mathcal{X}}$ mit $m = \sup_{n\in\mathbb{N}} E_P f(Y_n)$. Wir wollen zeigen, dass $Z := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ eine Version des essentiellen Supremums ist. Z kann Werte in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ annehmen. Offenbar ist Z $\mathcal{G}$-messbar. Sei $X \in \mathcal{X}$. Da $Y_n \vee X \in \widetilde{\mathcal{X}}$ folgt $E_P f(X \vee Z) = \sup_{n\in\mathbb{N}} E_P f(X \vee Y_n) \leq m = E_P f(Z)$. Wegen $P(X \vee Z \geq Z) = 1$ und der strikten Monotonie von f folgt daraus, dass $P(X > Z) = P(f(X \vee Z) > f(Z)) = 0$ und damit (ii). Sei nun Z' eine Zufallsvariable mit $P(Z' \geq X) = 1$ $\forall X \in \mathcal{X}$. Dann gilt $P(Z' \geq Y_n) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und damit $P(Z' \geq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} Y_n) = P(Z' \geq Z) = 1$. □

In unseren Anwendungen ist $\mathcal{X}$ eine Menge von bedingten Erwartungswerten, genauer $\mathcal{X} = \{E_Q(L_\tau|\mathcal{F}_t)|\tau \in \mathcal{S}_t\}$, wobei $\mathcal{S}_t$ die Menge der Stoppzeiten mit Werten in $\{t, t+1, \ldots, T\}$ ist. $\text{ess sup}_{\tau\in\mathcal{S}_t} E_Q(L_\tau|\mathcal{F}_t)$ bezeichne dann das essentielle Supremum der Menge $\mathcal{X} = \{E_Q(L_\tau|\mathcal{F}_t)|\tau \in \mathcal{S}_t\}$ bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ und des Maßes P (letzteres kommt in der Notation nicht explizit zum Ausdruck. Da hierfür nur die Nullmengen ausschlaggebend sind, kann man auch bezüglich $Q \sim P$ sagen).

Definition 6.12. *Ein Q-*Supermartingal *X ist ein adaptierter Prozess mit $E_Q|X_t| < \infty$, $t = 0, \ldots, T$ und $E_Q(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$ für $s \leq t$.*
*X ist ein Q-*Submartingal*, wenn $-X$ ein Q-Supermartingal ist.*

6.1 Amerikanische Optionen in vollständigen Märkten

Sei U_t der minimale Betrag, den der Verkäufer zum Zeitpunkt t braucht, um sich gegen einen bis zum Zeitpunkt $t-1$ noch nicht ausgeübten amerikanischen Claim L absichern zu können. Zum Zeitpunkt T gilt natürlich

$$U_T = L_T. \tag{6.89}$$

Zum Zeitpunkt $T-1$ ist die erste Voraussetzung, dass $U_{T-1} \geq L_{T-1}$. Ausserdem muss U_{T-1} groß genug sein, um L_T hedgen zu könne (für den Fall, dass die Option zum Zeitpunkt $T-1$ noch nicht ausgeübt wird), d.h. $U_{T-1} \geq E_Q(L_T|\mathcal{F}_{T-1}) = E_Q(U_T|\mathcal{F}_{T-1})$, wobei Q das *eindeutige* ÄMM ist. Es gilt also

$$U_{T-1} = L_{T-1} \vee E_Q(U_T|\mathcal{F}_{T-1}).$$

Man kann dieses Argument iterativ fortsetzen und erhält die Rückwärtsrekursion

$$U_T = L_T, \qquad U_{t-1} = L_{t-1} \vee E_Q(U_t|\mathcal{F}_{t-1}),\ t = 1, \dots, T. \tag{6.90}$$

Definition 6.13. *Sei L ein adaptierter Prozess mit $E_Q(\max_{t=0,\dots,T} L_t) < \infty$. Der Prozess $U^Q := U$ definiert in (6.90) heißt auch die Snell-Einhüllende des Prozesses L (bzgl. des Maßes Q).*

Beispiel 6.14. *Sei L wie in (6.88) definiert, d.h. wir haben den Spezialfall eines europäischen Claims, dann gilt $U_t^Q = E_Q(H|\mathcal{F}_t),\ t = 0, \dots, T$, d.h. U^Q ist der Wertprozess einer den Claim H replizierenden Strategie.*

Proposition 6.15. *Die Snell-Einhüllende U^Q eines stochastischen Prozesses $L = (L_t)_{t=0,\dots,T}$ (bzgl. eines Maßes Q), erfüllt folgende Eigenschaften*

(i) U^Q *ist ein Q-Supermartingal*

(ii) $U_t^Q \geq L_t\ \forall t = 0, \dots, T$

(iii) Für jeden Prozess $\widetilde{U}$ der (i) und (ii) erfüllt, gilt $\widetilde{U}_t \geq U_t^Q\ \forall t = 0, \dots, T$.

Beweis. Ad (i): Wir müssen nur zeigen, dass $E_Q(U^Q_{t+1}|\mathcal{F}_t) \leq U^Q_t$. Direkt aus (6.90) folgt

$$U^Q_t = L_t \vee E_Q(U^Q_{t+1}|\mathcal{F}_t) \geq E_Q(U^Q_{t+1}|\mathcal{F}_t).$$

Ad (ii): auch klar.

Ad (iii): Sei $\widetilde{U}$ ein Supermartingal, das L dominiert. Dann gilt $\widetilde{U}_T \geq L_T = U^Q_T$. Wir fahren mit einer Rückwärtsinduktion fort. Nehme an, wir wüssten bereits, dass $\widetilde{U}_t \geq U^Q_t$. Zu zeigen: $\widetilde{U}_{t-1} \geq U^Q_{t-1}$. Da $\widetilde{U}$ ein Supermartingal ist, gilt

$$\widetilde{U}_{t-1} \geq E_Q(\widetilde{U}_t|\mathcal{F}_{t-1}).$$

Zusammen mit $\widetilde{U}_{t-1} \geq L_{t-1}$ und der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\widetilde{U}_{t-1} \geq L_{t-1} \vee E_Q(U^Q_t|\mathcal{F}_{t-1}) = U^Q_{t-1}.$$

□

Satz 6.16 (Absicherung amerikanischer Optionen)**.** *Sei Q das eindeutige ÄMM in einem vollständigen Markt und L die diskontierte Auszahlung eines amerikanischen Claims mit Snell-Einhüllenden U^Q. Dann existiert ein d-dimensionaler, vorhersehbarer stochastischer Prozess φ (Hedging-Strategie) mit*

$$U^Q_t + \sum_{j=t+1}^{u} \varphi_j^\top \Delta S_j \geq L_u, \qquad u = t, \dots, T, \tag{6.91}$$

mit der Konvention $\sum_{j=t+1}^{t} := 0$. Außerdem gilt für alle $\mathcal{F}_t$-messbaren Zufallsvariablen $\widetilde{U}_t$, die (6.91) mit einer Strategie $\widetilde{\varphi}$ erfüllen, dass $\widetilde{U}_t \geq U^Q_t$. Also ist U^Q_t in der Tat das minimale Kapital, dass man zum Zeitpunkt t braucht, um L von t bis T zu hedgen.

Bemerkung 6.17. *Es macht natürlich auch Sinn, obige Aussage nur für $t = 0$ zu betrachten.*

Beweis. (1) Zur Gültigkeit von (6.91): Betrachte die Doob-Meyer-Zerlegung $U^Q_t = U^Q_0 + M_t + A_t$ (vgl. Theorem 1.6). Da U^Q ein Supermartingal ist, ist A_t nichtsteigend und daher gilt für $u \geq t$, dass $U^Q_t + M_u - M_t \geq U^Q_u \geq L_u$ Wegen der Vollständigkeit des Marktes gibt es eine Darstellung $M_u = \varphi \bullet S_u$, d.h. $M_u - M_t = \sum_{j=t+1}^{u} \varphi_j^\top \Delta S_j$. Damit folgt $U^Q_t + \sum_{j=t+1}^{u} \varphi_j^\top \Delta S_j \geq U^Q_u \geq L_u$.

(ii) Zur Minimalität von U_t^Q: Erfülle $\widetilde{U}_t$ Bedingung (6.91) mit einer Strategie $\widetilde{\varphi}$. Definiere

$$V_u := \widetilde{U}_t + \sum_{j=t+1}^{u} \widetilde{\varphi}_j^\top \Delta S_j \geq L_u$$

$(V_u)_{u=t,\dots,T}$ ist als Integral nach einem Q-Martingal ein lokales Q-Martingal (Proposition 2.9) und damit wegen Beschränktheit nach unten ein Q-Martingal (Proposition 2.10), also insbesonders ein Q-Supermartingal. Da zudem $(V_u)_{u=t,\dots,T}$ den Prozess $(L_u)_{u=t,\dots,T}$ dominiert, dominiert er mit Proposition 6.15 auch $(U_u^Q)_{u=t,\dots,T}$. Insbesondere gilt $\widetilde{U}_t = V_t \geq U_t^Q$. □

Satz 6.18. *Für die Snell-Einhüllende U^Q von L gibt es folgenden Ausdruck*

$$U_t^Q = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{S}_t} E_Q(L_\tau | \mathcal{F}_t) = E_Q(L_{\tau^t} | \mathcal{F}_t), \tag{6.92}$$

wobei $\tau^t := \inf\{j \geq t | U_j^Q = L_j\}$ (es gilt $\tau_t \in \mathcal{S}_t$). Insbesondere gilt also

$$U_0^Q = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q(L_\tau) = E_Q(L_{\tau^0}).$$

Bemerkung 6.19. *Im* vollständigen *Markt ist also die minimale Prämie, die der Verkäufer braucht, um sich gegen die Option abzusichern, gegeben durch $U_0^Q = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q(L_\tau)$. Wäre die Prämie strikt größer als U_0^Q, könnte der Verkäufer stets einen risikolosen Gewinn machen – völlig unabhängig von der Ausübungsstrategie des Käufers. Der Käufer dürfte sogar ein Insider sein, der zur optimalen Ausübung mehr Informationen zur Verfügung hat als durch die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ modelliert. Der Vermögensprozess des Verkäufers dominiert nämlich den Auszahlungsprozess auf dem gesamten Pfad und nicht nur für bestimmte Stoppzeiten, siehe Ungleichung (6.91) für $t = 0$. Würde der Käufer die Option zum Beispiel zum Zeitpunkt $\tau = \min\{t \geq 0 | L_t = \max_j L_j\}$ ausüben (was keine Stoppzeit ist !), so wäre der Verkäufer mit seiner Hedging-Strategie φ aus (6.91) trotzdem auf der sicheren Seite.*

Wäre umgekehrt die Prämie für den amerikanischen Claim strikt kleiner als $\sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q(L_\tau)$, dann existierte natürlich eine Stoppzeit τ, so dass $E_Q(L_\tau)$ strikt größer als der Options-Preis. In diesem Fall könnte der Käufer des amerikanischen Claims einen risikolosen

Gewinn machen: er könnte den Claim $-L_\tau$ mit dem Startkapital $-E_Q(L_\tau)$ replizieren und die Option zum Zeitpunkt τ ausüben. Damit wäre der Gewinn $E_Q(L_\tau) -$ Prämie *gemacht.*

In diesem Sinne ist U_0^Q der eindeutige No-Arbitrage-Preis des amerikanischen Claims.

Beweis von Satz 6.18. Da U^Q ein Q-Supermartingal ist, gilt für alle Stoppzeiten $\tau \in \mathcal{S}_t$, dass

$$U_t^Q \geq E_Q(U_\tau^Q|\mathcal{F}_t) \geq E_Q(L_\tau|\mathcal{F}_t)$$

(Optional Stopping Theorem). Damit gilt natürlich auch

$$U_t^Q \geq \text{ess sup}_{\tau\in\mathcal{S}_t} E_Q(L_\tau|\mathcal{F}_t).$$

Es bleibt in dem Beweis nur noch zu zeigen, dass $U_t^Q = E_Q(L_{\tau^t}|\mathcal{F}_t)$. Dies wiederum würde folgen, wenn man zeigen kann

$$U_t^Q = E_Q(U_{\tau^t}^Q|\mathcal{F}_t). \tag{6.93}$$

Wir müssen zeigen, dass der gestoppte Prozess $(U_s^Q)_{s=t,\dots,T}^{\tau^t}$ mit $(U_s^Q)^{\tau^t} := U_{s\wedge\tau^t}^Q$ ein Martingal ist. Sei $s \in \{t,\dots,T-1\}$. Auf der Menge $\{\tau^t > s\}$ gilt $U_s^Q > L_s$. Daher gilt auf der Menge $\{\tau^t > s\}$ P-f.s.

$$(U_s^Q)^{\tau^t} = U_s^Q = L_s \vee E_Q(U_{s+1}^Q|\mathcal{F}_s) = E_Q(U_{s+1}^Q|\mathcal{F}_s) = E_Q((U_{s+1}^Q)^{\tau^t}|\mathcal{F}_s).$$

Auf der Menge $\{\tau^t \leq s\}$ gilt $(U_{s+1}^Q)^{\tau^t} = U_{\tau^t}^Q = (U_s^Q)^{\tau^t}$. Damit ist der gestoppte Prozess $(U^Q)^{\tau^t}$ ein Martingal und es gilt insbesondere (6.93). □

Definition 6.20. *Zu einem Prozess Z mit $Z \geq L$ definieren wir die Prozesse $Z^>$ und $Z^=$ durch*

$$Z_t^> = 1_{\{Z_->L_-\}} \bullet Z_t \tag{6.94}$$

bzw.

$$Z_t^= = 1_{\{Z_-=L_-\}} \bullet Z_t \tag{6.95}$$

Es gilt natürlich $Z_t = Z_0 + Z_t^> + Z_t^=$.

Lemma 6.21. *(i) Setzen wir $Z = U^Q$ für U^Q aus (6.92), dann ist $U^{Q,>}$ ein Martingal und $U^{Q,=}$ ein Supermartingal.*

(ii) Sei umgekehrt $\widetilde{Z} \geq L$ ein Prozess mit $\widetilde{Z}_T = L_T$, so dass $\widetilde{Z}^>$ ein Q-Martingal und $\widetilde{Z}^=$ ein Q-Supermartingal ist, dann folgt bereits $\widetilde{Z} = U^Q$.

Bemerkung 6.22. *Lemma 6.21 kann als Verallgemeinerung der folgenden Aussage interpretiert werden: Es gibt genau ein Q-Martingal mit Endwert H, nämlich den Prozess $t \mapsto E_Q(H|\mathcal{F}_t)$. Ein Preisprozess für einen europäischen Claim ist also dadurch eindeutig bestimmt, dass der Endwert H ist und der Prozess ein Q-Martingal sein soll. Lemma 6.21 wird dagegen, wie wir später sehen werden, bei amerikanischen Claims eine wichtige Rolle spielen.*

Beweis von Lemma 6.21. Es gilt

$$\begin{aligned} E_Q(\Delta U_t^{Q,>}|\mathcal{F}_{t-1}) &= E_Q(1_{\{U_{t-1}^Q > L_{t-1}\}} \Delta U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= E_Q(1_{\{U_{t-1}^Q > L_{t-1}\}}(U_t^Q - E_Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}))|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= 1_{\{U_{t-1}^Q > L_{t-1}\}} E_Q(U_t^Q - E_Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1})|\mathcal{F}_{t-1}) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $U^{Q,>}$ ein Martingal. Da mit Proposition 6.15 U^Q ein Q-Supermartingal ist, ist auch $U^{Q,=} = U^Q - U^{Q,>} - U_0^Q$ ein Q-Supermartingal.

Seien $Z, \widetilde{Z}$ zwei Prozesse mit $Z_T = \widetilde{Z}_T = L_T$, die die in (ii) formulierten Bedingungen erfüllen. Sei $t \in \{0, \dots, T-1\}$. Definiere $A_t := \{\widetilde{Z}_t < Z_t\}$ und $\tau_t := \inf\{s \geq t | \widetilde{Z}_s = Z_s\}$. Es gilt natürlich $\tau_t \leq T$. Der bei τ_t gestoppte Prozess $(Z_u)_{u=t,\dots,T}^{\tau_t}$ ist entweder konstant (wenn $t = \tau_t$) oder es gilt auf der Menge A_t, dass $Z_{s-1}^{\tau_t} > (\widetilde{Z})_{s-1}^{\tau_t} \geq L_{s-1}^{\tau_t}$ für $s = t+1, \dots, \tau_t$. Daraus folgt mit der Voraussetzung, dass $(1_{A_t}(u) Z_u)_{u=t,\dots,T}^{\tau_t}$ ein Martingal ist (weil Prozess auf der Menge A_t strikt größer als untere Schranke L), also

$$E_Q\left(1_{A_t}(Z_{\tau_t} - Z_t)\right) = 0. \tag{6.96}$$

Da $\widetilde{Z}$ ein Supermartingal ist, gilt

$$E_Q\left(1_{A_t}(\widetilde{Z}_{\tau_t} - \widetilde{Z}_t)\right) \leq 0. \tag{6.97}$$

Definiere die Zufallsvariable

$$X := 1_{A_t}\left[Z_{\tau_t} - \widetilde{Z}_{\tau_t} - (Z_t - \widetilde{Z}_t)\right]$$

Es gilt $1_{A_t}(Z_t - \widetilde{Z}_t) \geq 0$ und $Z_{\tau_t} - \widetilde{Z}_{\tau_t} = 0$. Also $X \leq 0$ und $Q(X < 0) = Q(A_t)$. Da aber wegen (6.96) und (6.97) $E_Q(X) \geq 0$ kann dies nur sein, wenn $Q(A_t) = 0$ (und damit auch $P(A_t) = 0$). Analog folgt, dass $P(\widetilde{Z}_t > Z_t) = 0$ und damit die P-f.s.-Eindeutigkeit. □

6.2 Amerikanische Optionen in unvollständigen Märkten

Definition 6.23. *Für einen amerikanischen Claim* $(L_t)_{t=0,\dots,T}$ *nennen wir einen adaptierten Prozess* $(\widetilde{S}_t)_{t=0,\dots,T}$ *einen Derivatepreisprozess, wenn* $\widetilde{S}_t \geq L_t$, $t = 0, \dots, T-1$ *und* $\widetilde{S}_T = L_T$.

Analog zu europäischen Claims wollen wir nun "neutrale" Preise für amerikanische Claims definieren. Diese haben sich ja dadurch ausgezeichnet, dass unter ihnen die Nachfrage nach Optionen dem Angebot von Optionen entspricht.

Möchte man nun amerikanische Optionen handeln, so kommt der zusätzliche Aspekt hinzu, dass die Option vorzeitig ausgeübt werden kann. Nehmen wir an, eine Agentin möchte eine Short-Position der amerikanischen Option in ihrem Portfolio halten. Sie verkauft z.B. die Option zum Zeitpunkt t_1 und beschließt, sie erst zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ wieder zurückzukaufen. Dies entspräche einer Handelsstrategie $\varphi_t^{d+1} = -1_{\{t_1+1,\dots,t_2\}}(t)$. Nun kann es aber natürlich sein, dass die amerikanische Option zwischenzeitlich vom Halter (Käufer) ausgeübt wird. Damit wäre die Agentin in ihrer Strategie φ^{d+1} "gestört". Man kann aber argumentieren, dass, wenn $\widetilde{S}_{t-1} > L_{t-1}$ (d.h. zum Zeitpunkt $t-1$ ist der Marktpreis $\widetilde{S}_{t-1}$ der amerikanischen Option strikt größer als der Ausübungswert) die Agentin nicht fürchten muss, dass die Option in $t-1$ ausgeübt wird. Würde die Option nämlich in $t-1$ ausgeübt, müsste die Agentin den Betrag L_{t-1} an den Besitzer der Option zahlen, könnte aber zum gleichen Zeitpunkt (also in $t-1$) die Option wieder neu auf dem Markt verkaufen und bekäme dafür den Preis $\widetilde{S}_{t-1}$. Die Agentin hätte also den risikolosen Gewinn $\widetilde{S}_{t-1} - L_{t-1} > 0$ erzielt, ohne dass sich ihre Positionen in der Option verändert hätten. **Also kann man annehmen, dass, wenn $\widetilde{S}_{t-1} > L_{t-1}$, die Option zum Zeitpunkt $t-1$ nicht ausgeübt wird.** In diesem Fall kann φ_t^{d+1} (Investition in den Sprung $\Delta\widetilde{S}_t$) frei gewählt werden (positiv oder negativ).

Dieses Argument kann aber in sich zusammenbrechen, wenn $\widetilde{S}_{t-1} = L_{t-1}$. Daher fordert wir, dass $\varphi_t^{d+1} \geq 0$ auf der Menge $\{\omega \in \Omega | \widetilde{S}_{t-1}(\omega) = L_{t-1}(\omega)\} \in \mathcal{F}_{t-1}$. Long-Positionen in amerikanischen Optionen sind dagegen generell unproblematisch, da der Besitzer der Option ja von niemandem gezwungen werden kann, die Option auszuüben.

Formal definieren wir folgende Handelsbeschränkungen.

Definition 6.24.

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} := \ & \{\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d, \varphi^{d+1}) \text{ vorhersehbar und für alle } t = 1, \dots, T \text{ gilt} \\ & \qquad \varphi_t^{d+1} \geq 0 \text{ auf der Menge } S_{t-1}^{d+1} = L_{t-1}\}\end{aligned}$$

Um die Notationen zu vereinfachen nehmen wir an, dass es nur einen amerikanischen Claim gibt. Die Argumente lassen sich aber ohne irgendwelche Probleme, auf den mehrdimensionalen Fall übertragen.

Definition 6.25. *Ein Derivatepreiprozess $\widetilde{S}^{d+1}$ für einen amerikanischen Claim L heißt neutral, wenn eine zulässige Strategie $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d, \varphi^{d+1}) \in \mathfrak{S}$ existiert, die $Eu(V_T(\cdot))$ unter der Nebenbedingung $\mathfrak{S}$ maximiert und für die gilt $\varphi^{d+1} = 0$.*

Satz 6.26. *Sei $|\Omega| < \infty$. Des weiteren sei u eine streng monoton wachsende, streng konkave, differenzierbare Nutzenfunktion und die Menge $\{x \in \mathbb{R} | u(x) > -\infty\}$ sei offen. Es existiere eine optimale Strategie $(\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ im Markt $(S^0, S^1, \dots, S^d)$. Dann hat jede amerikanische Option L einen eindeutigen neutralen Derivatepreisprozess. Dieser ist gegeben durch*

$$S_t^{d+1} = \text{ess sup}_{\tau \in \mathcal{S}_t} E_{P^\star}(L_\tau | \mathcal{F}_t), \tag{6.98}$$

wobei

$$\frac{dP^\star}{dP} = \frac{u'(V_T(\varphi^1, \dots, \varphi^d))}{E_P(u'(V_T(\varphi^1, \dots, \varphi^d)))}.$$

Zum Beweis benötigen wir

Lemma 6.27. *Sei $\widetilde{\mathfrak{S}} \subset \{\varphi | \varphi \text{ vorhersehbar}\}$ die Menge der zulässigen Strategien in einem Erwartungsnutzen-Optimierungsproblem. Sei $\widetilde{\mathfrak{S}}$ konvex und $\varphi \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ eine zulässige Strategie mit $u(v_0 + \varphi \bullet S_T) > -\infty$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) φ ist optimal unter der Nebenbedingung $\widetilde{\mathfrak{S}}$

(ii) $u'(V_T(\varphi))((\psi-\varphi)\bullet S_T)$ *hat nichtpositiven Erwartungswert für alle zulässigen Strategien* $\psi \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ *mit* $u(v_0+\psi\bullet S_T) > -\infty$.

Beweis. (ii)⇒(i): Sei $\psi \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ eine zulässige Strategie mit $u(v_0+\psi\bullet S_T) > -\infty$. Da u konkav ist gilt

$$\begin{aligned} E(u(v_0+\psi\bullet S_T)) &\leq E(u(v_0+\varphi\bullet S_T)) + E(u'(v_0+\varphi\bullet S_T)((\psi-\varphi)\bullet S_T)) \\ &\leq E(u(v_0+\varphi\bullet S_T)), \end{aligned}$$

woraus (i) folgt.

(i)⇒(ii): Sei $\psi \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ mit $u(v_0+\psi\bullet S_T) > -\infty$. Definiere $\psi^{(\lambda)} := \varphi + \lambda(\psi-\varphi)$ für $\lambda \in [0,1]$. Da $\widetilde{\mathfrak{S}}$ konvex und u konkav ist gilt $\psi^{(\lambda)} \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ und $u(V_T(\psi^{(\lambda)})) > -\infty$. Wegen der Optimalität von φ gilt

$$0 \geq E(u(v_0+\psi^{(\lambda)}\bullet S_T)) - E(u(v_0+\varphi\bullet S_T)),$$

was gleich dem Ausdruck $\lambda E(\xi^{(\lambda)}((\psi-\varphi)\bullet S_T))$ für eine Zufallsvariable $\xi^{(\lambda)}$ mit Werten in $[u'(v_0+\varphi\bullet S_T), u'(v_0+\psi^{(\lambda)}\bullet S_T)]$ bzw. $[u'(v_0+\psi^{(\lambda)}\bullet S_T), u'(v_0+\varphi\bullet S_T)]$ ist. Da $\psi^{(\lambda)}\bullet S_T \to \varphi\bullet S_T$, gilt $\xi^{(\lambda)} \to u'(v_0+\varphi\bullet S_T)$ fast sicher für $\lambda \to 0$. Da $|\Omega| < \infty$ folgt sofort, dass

$$E(\xi^{(\lambda)}((\psi-\varphi)\bullet S_T)) \to E(u'(v_0+\varphi\bullet S_T)((\psi-\varphi)\bullet S_T)),$$

für $\lambda \to 0$ und damit $E(u'(v_0+\varphi\bullet S_T)((\psi-\varphi)\bullet S_T)) \leq 0$. □

Beweis von Satz 6.26. Existenz: Betrachte zu S^{d+1} aus (6.98) den Prozess $(S^{d+1})^>$ bezüglich der unteren Schranke L. Mit Lemma 6.21 folgt, dass $(S^{d+1})^>$ ein $P^\star$-Martingal ist. Sei $\psi \in \mathfrak{S}$ eine beliebige zulässige Strategie im vergrößerten Markt. Da $S^1,\dots,S^d$ $P^\star$-Martingale sind, ist mit Proposition 1.5(iii) auch das Integral $(\psi^1,\dots,\psi^d)\bullet(S^1,\dots,S^d)$ ein $P^\star$-Martingal. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \psi^{d+1}\bullet S^{d+1} &= \psi^{d+1}\bullet(S^{d+1})^= + \psi^{d+1}\bullet(S^{d+1})^> \\ &= \psi^{d+1}1_{\{S^{d+1}_-=L_-\}}\bullet(S^{d+1})^= + \psi^{d+1}1_{\{S^{d+1}_->L_-\}}\bullet(S^{d+1})^> \end{aligned}$$

ein $P^\star$-Supermartingal. $(S^{d+1})^>$ ist nämlich ein $P^\star$-Martingal und somit das Integral $\psi^{d+1}1_{\{S^{d+1}_->L_-\}}\bullet(S^{d+1})^>$ und $(S^{d+1})^=$ ist ein $P^\star$-Supermartingal und wegen der Nichtnegativität des Integranden $\psi^i 1_{\{S^{d+1}_-=L_-\}}$ auch das Integral $\psi^{d+1}1_{\{S^{d+1}_-=L_-\}}\bullet(S^{d+1})^=$.

Es folgt also, dass für jede Strategie $\psi \in \mathfrak{S}$ das Integral $\psi \bullet (S^1, \dots, S^{d+1})$ ein $P^\star$-Supermartingal ist, also insbesondere

$$E_{P^\star}(\psi \bullet (S^1, \dots, S^{d+1})_T) \leq 0.$$

Ausserdem ist $(\varphi^1, \dots, \varphi^d, 0) \bullet (S^1, \dots, S^{d+1})$ ein $P^\star$-Martingal, also

$$E_{P^\star}((\varphi^1, \dots, \varphi^d, 0) \bullet (S^1, \dots, S^{d+1})_T) = 0.$$

Wegen

$$\frac{dP^\star}{dP} = \frac{u'(V_T(\varphi_1, \dots, \varphi^d))}{E_P(u'(V_T(\varphi_1, \dots, \varphi^d)))}$$

folgt daraus $E_P(u'(V_T(\varphi_1, \dots, \varphi^d, 0))(\psi - (\varphi^1, \dots, \varphi^d, 0)) \bullet S_T) \leq 0$. Mit Lemma 6.27 folgt, dass $(\varphi^1, \dots, \varphi^d, 0)$ eine optimale Strategie im Gesamtmarkt ist. Damit ist S^{d+1} aus (6.98) ein neutraler Preisprozess.

Eindeutigkeit: Sei $\widetilde{S}^{d+1}$ ein neutraler Preisprozess und $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d, 0)$ eine im Markt $(S^1, \dots, S^d, \widetilde{S}^{d+1})$ optimale Strategie. Dann ist natürlich $(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)$ optimal im kleinen Markt $(S^1, \dots, S^d)$. Somit gilt wegen der Eindeutigkeit des optimalen Endvermögens (Satz 3.15), dass $V_T((\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)) = V_T((\varphi^1, \dots, \varphi^d))$. Das durch

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP} = \frac{u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d))}{E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)))}$$

definierte Maß stimmt mit $P^\star$ aus (5.87) überein.

Betrachte die Strategie ψ mit

$$\psi^i = \widetilde{\varphi}^i, \qquad i = 1, \dots, d$$

und

$$\psi^{d+1} = c 1_A 1_{\{\widetilde{S}^{d+1}_{t_0-1} > L_{t_0-1}\}} 1_{\{t_0\}},$$

für $c \in \{-\varepsilon, \varepsilon\}$ und eine Menge $A \in \mathcal{F}_{t_0-1}$, $t_0 \in \{1, \dots, T\}$. $\varepsilon > 0$ muss hinreichend klein gewählt werden, so dass sichergestellt ist, dass $u(V_T(\psi)) > -\infty$. Da $u(V_T(\widetilde{\varphi})) > -\infty$, $|\Omega| < \infty$ und die Menge $\{x \in \mathbb{R} | u(x) > -\infty\}$ offen ist, klappt dies immer. Aus der

Optimalität der Strategie $(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d, 0)$ und der Zulässigkeit der Strategie ψ folgt mit Lemma 6.27, dass

$$\begin{aligned}
0 &\geq E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d))(\psi - \widetilde{\varphi}) \bullet (S^1, \dots, S^d, \widetilde{S}^{d+1})_T) \\
&= \frac{1}{E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)))} E_{P^\star}((\psi - \widetilde{\varphi}) \bullet (S^1, \dots, S^d, \widetilde{S}^{d+1})_T) \\
&= \frac{1}{E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)))} E_{P^\star}(\psi^{d+1} \bullet \widetilde{S}^{d+1}_T) \\
&= \frac{1}{E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)))} c E_{P^\star}(1_A 1_{\{\widetilde{S}^{d+1}_{t_0-1} > L_{t_0-1}\}} \Delta \widetilde{S}^{d+1}_{t_0}).
\end{aligned}$$

Da $c \in \{-\varepsilon, \varepsilon\}$ gewählt werden kann, folgt $E_{P^\star}(1_A 1_{\{\widetilde{S}^{d+1}_{t_0-1} > L_{t_0-1}\}} \Delta \widetilde{S}^{d+1}_{t_0}) = 0$ für alle $A \in \mathcal{F}_{t_0-1}$. Damit ist $(\widetilde{S}^{d+1})^{>}$ ein $P^\star$-Martingal.

Analog definiert man sich Strategien

$$\psi^i = \widetilde{\varphi}^i, \qquad i = 1, \dots, d$$

und

$$\psi^{d+1} = \varepsilon 1_A 1_{\{\widetilde{S}^{d+1}_{t_0-1} = L_{t_0-1}\}} 1_{\{t_0\}}.$$

Statt $c \in \{-\varepsilon, \varepsilon\}$ kann man hier nur $c = \varepsilon$ wählen, wegen des Verbots von Leerverkäufen. Man erhält analog

$$0 \geq \frac{1}{E_P(u'(V_T(\widetilde{\varphi}^1, \dots, \widetilde{\varphi}^d)))} E_{P^\star}\left(1_A 1_{\{\widetilde{S}^{d+1}_{t_0-1} = L_{t_0-1}\}} \Delta \widetilde{S}^{d+1}_{t_0}\right).$$

Damit ist $(\widetilde{S}^{d+1})^{=}$ ein $P^\star$-Supermartingal.

Insgesamt folgt mit Lemma 6.21(ii), dass $\widetilde{S}^{d+1} = S^{d+1}$. □

6.3 Optimale Ausübung einer amerikanischen Option

Gegben die Formel (6.98) stellt sich die Frage, wann man denn eine amerikanische Option ausüben soll, bzw. welche Stoppzeit $\tau \in \mathcal{S}_0$ den maximalen Erwartungswert liefert. Für Call-Optionen (ohne Dividenden) gibt es da eine einfache Antwort.

Proposition 6.28. *Sei Q irgendein ÄMM (im unvollständigen Markt z.B. das neutrale Maß aus (5.87)), $r, K \geq 0$. Dann gilt*

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q(e^{-r\tau}(S^1_\tau - K)^+) = E_Q(e^{-rT}(S^1_T - K)^+).$$

Beweis. Sei $\tau \in \mathcal{S}_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} & E_Q(e^{-rT}(S_T^1 - K)^+) \\ = \; & E_Q\left[E_Q((e^{-rT}S_T^1 - e^{-rT}K)^+|\sigma(S_\tau))\right] \\ \geq \; & E_Q\left[(E_Q(e^{-rT}S_T^1|\sigma(S_\tau)) - e^{-rT}K)^+)\right] \\ = \; & E_Q\left[(e^{-r\tau}S_\tau^1 - e^{-rT}K)^+\right] \\ \geq \; & E_Q\left[e^{-r\tau}(S_\tau^1 - K)^+\right]. \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt aus der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungswerte und die zweite aus $r, K \geq 0$. □

Bei amerikanischen Put-Optionen gibt es i.A. keine triviale Lösung. Nehme dazu wieder das Cox-Ross-Rubinstein-Modell. Wir nehmen an, dass $r \geq 0$. A_i kann die Werte d oder u annehmen. $0 < d < u$. Aus Arbitragegründen folgt $d < 1 + r < u$. Wir nehmen zusätzlich an, dass $d < 1$. Q ist das eindeutige ÄMM aus (2.32).

Betrachte den Wert einer Put Option in Abhängigkeit vom Startwert x des Underlyings:

$$\pi(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q\left[\frac{(K - x\prod_{i=1}^{\tau} A_i)^+}{(1+r)^\tau}\right].$$

$(K-x)^+$ wird auch als **intrinsischer Wert** und $\pi(x) - (K-x)^+$ als **Zeitwert** der Option bezeichnet. Bei amerikanischen Optionen ist der Zeitwert natürlich nichtnegativ.

π ist offenbar eine konvexe, monoton fallende Funktion. Für $x \leq \frac{K}{u^T}$ "very deep in the money" gilt auf jeden Fall

$$\pi(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q\left[\frac{(K - x\prod_{i=1}^{\tau} A_i)^+}{(1+r)^\tau}\right] = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q\left[\frac{K - x\prod_{i=1}^{\tau} A_i}{(1+r)^\tau}\right] = K - x.$$

Hier ist es also optimal, die Option sofort auszuüben. Für $x \geq \frac{K}{d^T}$ "very deep out of the money" gilt $\pi(x) = 0$. Für $x \in [K, \frac{K}{d^T})$ hat die Option keinen intrinsischen aber einen Zeitwert, d.h. $\pi(x) > 0$. Insgesamt folgt:

Es existiert ein $x^\star \in [\frac{K}{u^T}, K]$ mit $\pi(x) = (K-x)^+$ für $x \leq x^\star$ und $\pi(x) > (K-x)^+$ für $x \in (x^\star, K/d^T)$.

Sei die diskontierte Auszahlung L eines amerikanischen Claims gegeben durch $L_t = (1+r)^{-t}h(t,S_t)$, $h : \{0,\dots,T\} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Beispiele $h(t,x) = (x-K)^+$ oder $h(t,x) = (K-x)^+$.

Dann lässt sich der Preis des Claims durch eine Wertfunktion $v : \{0,\dots,T\} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ beschreiben. Der stochastische Prozess $v(t,S_t)$ ist der Preisprozess der Option. v lässt sich rekursiv bestimmen durch,

$$v(T,x) = h(T,x) \tag{6.99}$$

und

$$v(t,x) = \max\{h(t,x), \frac{qv(t+1,xu)+(1-q)v(t+1,xd)}{1+r}\}. \tag{6.100}$$

(6.99) und (6.100) liefern einen Algorithmus für die Berechnung des Preises einer amerikanischen Option: Zunächst wertet man (6.99) für alle möglichen Zustände $x = u^k d^{T-k}$, $k = 0,\dots,T$ aus. Dann berechne man $v(T-1,x)$ für $x = u^k d^{T-1-k}$, $k = 0,\dots,T-1$ durch Gleichung (6.100). Bei Anwendungen in der Praxis ist von mindestens $T = 30$ Zeitschritten auszugehen. Bei Derivaten, deren Auszahlung – wie hier – nur vom Aktienpreis am Ausübungszeitpunkt abhängt, wächst der Rechenaufwand mit der Größenordnung T^2. Bei Derivaten deren Auszahlung von der gesamten Vergangenheit des Aktienkurses abhängen kann, wächst der Rechenaufwand dagegen mit der Größenordnung 2^T.

6.4 Δ-Hedging für amerikanische Claims

Der diskontierte Preisprozess $\frac{v(t,S_t)}{(1+r)^t}$ ist ein Q-Supermartingal. Seine Sprünge lassen sich wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned}
\Delta\left[\frac{v(t,S_t)}{(1+r)^t}\right] &= \frac{v(t,S_t)}{(1+r)^t} - \frac{v(t-1,S_{t-1})}{(1+r)^{t-1}} \\
&= \frac{1}{(1+r)^{t-1}}\left[(1+r)^{-1}v(t,S_t) - \max\{h(t-1,S_{t-1}),(1+r)^{-1}E_Q(v(t,S_t)|\mathcal{F}_{t-1})\}\right] \\
&= \frac{1}{(1+r)^t}\left[v(t,S_t) - E_Q(v(t,S_t)|\mathcal{F}_{t-1})\right] \\
&\quad - \frac{1}{(1+r)^{t-1}}[h(t-1,S_{t-1}) - (1+r)^{-1}E_Q(v(t,S_t)|\mathcal{F}_{t-1})]^+ \\
&= \varphi_t^1 \Delta\left[\frac{S_t}{(1+r)^t}\right] - \underbrace{\frac{1}{(1+r)^{t-1}}[h(t-1,S_{t-1}) - (1+r)^{-1}E_Q(v(t,S_t)|\mathcal{F}_{t-1})]^+}_{\geq 0}.
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die Hedging-Strategie φ_t^1 (Anzahl der Aktien) analog zu der Hedging-Strategie für europäische Claims (vgl. (2.36)) durch

$$\begin{aligned} \varphi_t^1 &= \frac{v(t, S_{t-1}u) - E_Q(v(t, S_t)|\mathcal{F}_{t-1})}{(1+r)\left(\frac{u}{1+r} - 1\right) S_{t-1}} \\ &= \frac{(1-q)[v(t, S_{t-1}u) - v(t, S_{t-1}d)]}{(1+r)\left(\frac{u}{1+r} - 1\right) S_{t-1}} \quad t \geq 1. \end{aligned} \tag{6.101}$$

φ_t^0 ergibt sich dann durch

$$\varphi_t^0 = \frac{v(t-1, S_{t-1}) - \varphi_t^1 S_{t-1}}{(1+r)^{t-1}}.$$

Bei einer amerikanischen Option sichert der Verkäufer natürlich nur solange ab, bis die Option ausgeübt wird. D.h., wenn die Option zum Zeitpunkt $t-1$ noch nicht ausgeübt ist, hält sich der Verkäufer zwischen $t-1$ und t φ_t^1 Aktien.

7 Superhedging

Eine zentrale Rolle für das Superhedging in unvollständigen Märkten spielt eine simultane Doob-Meyer-Zerlegung (vgl. Satz 1.6). "Simultan" bedeutet, dass die Zerlegung nicht bzgl. eines einzigen Maßes durchgeführt wird, sondern simultan bzgl. einer ganzen Familie von Maßen.

Zur Vorbereitung brauchen wir noch einige mathematische Hilfsmittel.

Proposition 7.1. *Sei Q ein zu P äquivalentes Martingalmaß mit Dichte Y (d.h. $Q(A) = E_P(1_A Y)$ $\forall A \in \mathcal{F}$) und sei $\mathcal{G}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Dann gelten folgende Aussagen*

(a) $\frac{dQ}{dP}\,|_{\mathcal{G}} = E_P(Y|\mathcal{G})$

(b) Es gilt $\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{Y}$.

(c) Es gilt für alle $\mathcal{F}$-messbaren Zufallsvariablen $F \geq 0$

$$E_Q(F|\mathcal{G}) = \frac{E_P(FY|\mathcal{G})}{E_P(Y|\mathcal{G})}.$$

Bemerkung 7.2. *Bezeichnet man mit $Z_t := E_P(Y|\mathcal{F}_t)$ den Dichteprozess von Q bzgl. P, dann besagt die Proposition 7.1 Teil (c), dass*

$$E_Q(F|\mathcal{F}_t) = \frac{E_P(FZ_T|\mathcal{F}_t)}{Z_t}.$$

Beweis. Ad (a): Sei $A \in \mathcal{G}$. Es gilt $Q(A) = \int_A Y\,dP = \int_A E_P(Y|\mathcal{G})\,dP$. Da $E_P(Y|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-messbar folgt die Behauptung.

Ad (b): Wegen $Q \sim P$ gilt $P(Y > 0) = 1$ und $Q(Y > 0) = 1$.

Eine Zufallsvariable $X \geq 0$ ist Dichte von Q_2 bzgl. Q_1 genau dann, wenn $E_{Q_2}(F) = E_{Q_1}(FX)$ für alle Zufallsvariablen $F \geq 0$. Es gilt also $E_Q(F) = E_P(FY)$ für alle $F \geq 0$. Mit F durchläuft auch $F' := FY$ alle nichtnegativen Zufallsvariablen und es gilt $E_Q(F'/Y) = E_P(F')$.

Ad (c): Sei $G \geq 0$ eine $\mathcal{G}$-messbare Zufallsvariable. Es gilt

$$E_Q[GF] = E_P[GFY] = E_P[GE_P(FY|\mathcal{G})]. \tag{7.102}$$

Nach Teil (a) und Teil (b) ist die Dichte von P bzgl. Q auf der σ-Algebra $\mathcal{G}$ gegeben durch $1/E_P(Y|\mathcal{G})$. Dies ergibt

$$E_P[GE_P(FY|\mathcal{G})] = E_Q\left[G\frac{1}{E_P(Y|\mathcal{G})}E_P(FY|\mathcal{G})\right]. \tag{7.103}$$

(7.102) und (7.103) ergeben, dass

$$\begin{aligned} E_Q[GE_Q(F \mid \mathcal{G})] &= E_Q[E_Q(GF \mid \mathcal{G})] \\ &= E_Q[GF] \\ &\overset{(7.102)\&(7.103)}{=} E_Q\left[G\frac{1}{E_P(Y|\mathcal{G})}E_P(FY|\mathcal{G})\right], \quad \forall G\ \mathcal{G}-\text{messbar.} \end{aligned} \tag{7.104}$$

Aus (7.104) folgt, dass die beiden $\mathcal{G}$-messbaren Zufallsvariablen $E_Q(F \mid \mathcal{G})$ und $\frac{1}{E_P(Y|\mathcal{G})}E_P(FY|\mathcal{G})$ Q-fast sicher übereinstimmen müssen. Dies liegt daran, dass die Mengen

$$M_1 := \left\{E_Q(F \mid \mathcal{G}) > \frac{1}{E_P(Y|\mathcal{G})}E_P(FY|\mathcal{G})\right\}$$

und

$$M_2 := \left\{E_Q(F \mid \mathcal{G}) < \frac{1}{E_P(Y|\mathcal{G})}E_P(FY|\mathcal{G})\right\}$$

in $\mathcal{G}$ sind. Aus (7.104) folgt mit $G = 1_{M_1}$ bzw. $G = 1_{M_2}$, dass M_1 und M_2 Q-Nullmengen sein müssen. Es gilt also Aussage (c). □

Lemma 7.3. *Seien P_1 und P_2 zu P äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße, $t_0 \in \{0, \ldots, T\}$ und $B \in \mathcal{F}_{t_0}$. Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitmaß $\widetilde{P}$ mit folgenden Eigenschaften*

(a) $\widetilde{P}(A) = P_1(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}_{t_0}$.

(b) Für jede Zufallsvariable $F \geq 0$ gilt

$$E_{\widetilde{P}}(F|\mathcal{F}_{t_0}) = E_{P_1}(F|\mathcal{F}_{t_0})1_{\Omega\setminus B} + E_{P_2}(F|\mathcal{F}_{t_0})1_B.$$

Das neue Maß verhält sich also "bis t_0 wie P_1 und nach t_0 entweder wie P_1 oder P_2".

Beweis. Eindeutigkeit: Erfülle $\widetilde{P}$ die Bedingungen (a) und (b). Dann gilt für alle $A \in \mathcal{F}$

$$\widetilde{P}(A) = E_{P_1}\left[P_1(A|\mathcal{F}_{t_0})1_{\Omega\setminus B} + P_2(A|\mathcal{F}_{t_0})1_B\right]. \tag{7.105}$$

Damit wäre das Maß $\widetilde{P}$ eindeutig bestimmt. Bleibt die Existenz zu zeigen (es ist noch nicht klar, dass $\widetilde{P}$ aus (7.105) auch tatsächlich (b) erfüllt). Bezeichne mit Z_t die Dichte von P_2 bezüglich P_1 auf der σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ (mit der vorherigen Proposition gilt also $Z_t = E_{P_1}(Z_T|\mathcal{F}_t)$). Definiere

$$\widetilde{Z}_T := 1_{\Omega\setminus B} + \frac{Z_T}{Z_{t_0}}1_B \tag{7.106}$$

und $d\widetilde{P}/dP_1 := \widetilde{Z}_T$. Für $A \in \mathcal{F}_{t_0}$ gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(A) = E_{P_1}(\widetilde{Z}_T 1_A) &= E_{P_1}(E_{P_1}(\widetilde{Z}_T 1_A|\mathcal{F}_{t_0})) \\
&= E_{P_1}(1_{A\cap(\Omega\setminus B)} + 1_{A\cap B}\frac{E_{P_1}(Z_T|\mathcal{F}_{t_0})}{Z_{t_0}}) \\
&= E_{P_1}(1_A).
\end{aligned}$$

Damit ist (a) erfüllt.

Für jede Zufallsvariable $F \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
E_{\widetilde{P}}(F|\mathcal{F}_{t_0}) &= \frac{1}{E_{P_1}(\widetilde{Z}_T|\mathcal{F}_{t_0})}E_{P_1}(\widetilde{Z}_T F|\mathcal{F}_{t_0}) \\
&= \frac{1}{1_{\Omega\setminus B} + 1_B}\left[E_{P_1}(F|\mathcal{F}_{t_0})1_{\Omega\setminus B} + \frac{1}{Z_{t_0}}E_{P_1}(FZ_T|\mathcal{F}_{t_0})1_B\right] \\
&= E_{P_1}(F|\mathcal{F}_{t_0})1_{\Omega\setminus B} + E_{P_2}(F|\mathcal{F}_{t_0})1_B.
\end{aligned}$$

Die erste und dritte Gleichheit gilt jeweils wegen Proposition 7.1 (c). Damit ist Bedingung (b) erfüllt. □

Definition 7.4. *Sei $\mathcal{Q}$ eine Menge von äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Wir nennen $\mathcal{Q}$ stabil, wenn für alle P_1, $P_2 \in \mathcal{Q}$, $t_0 \in \{0, \dots, T\}$ und $B \in \mathcal{F}_{t_0}$ das Maß $\widetilde{P}$ aus Lemma 7.3 in $\mathcal{Q}$ enthalten ist.*

Lemma 7.5. *Die Menge der äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{M}^e$ ist stabil.*

Beweis. Seien P_1, P_2 ÄMM. Es ist zu zeigen, dass für alle $t = 1, \dots, T$, $A \in \mathcal{F}_t$

$$E_{\widetilde{P}}(\Delta S_t^i 1_A) = 0.$$

Für $t \in \{1, \dots, t_0\}$ folgt dies direkt aus den Eigenschaften (a) und der Tatsache, dass die entsprechende Aussage für das ÄMM P_1 gilt. Für $t \in \{t_0 + 1, \dots, T\}$ gilt mit Proposition 7.1(c)

$$\begin{aligned}
E_{\widetilde{P}}\left(\Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) &= \frac{1}{E_{P_1}(\widetilde{Z}_T \mid \mathcal{F}_{t-1})} E_{P_1}\left(\widetilde{Z}_T \Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \\
&= \frac{1}{E_{P_1}(\widetilde{Z}_T \mid \mathcal{F}_{t-1})} \left[1_{\Omega \setminus B} E_{P_1}\left(\Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) + 1_B \frac{1}{Z_{t_0}} E_{P_1}\left(Z_T \Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{E_{P_1}(\widetilde{Z}_T \mid \mathcal{F}_{t-1})} \left[1_{\Omega \setminus B} \underbrace{E_{P_1}\left(\Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}_{=\,0} + 1_B \frac{Z_{t-1}}{Z_{t_0}} \underbrace{E_{P_2}\left(\Delta S_t^i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}_{=\,0}\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei Z wie oben der Dichteprozess von P_2 bzgl. P_1 ist und $\widetilde{Z}_T$ in (7.106) definiert ist. □

Lemma 7.6. *Seien $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}^e$, $t_0 \in \{0, \dots, T\}$, $B \in \mathcal{F}_{t_0}$ und $\widetilde{Q}$ das in Lemma 7.3 konstruierte Maß. Dann existiert für die Werte zum Zeitpunkt t_0 der Snell-Einhüllenden eines Prozesses L bzgl. der Maße Q_1, Q_2 und $\widetilde{Q}$ folgender Zusammenhang:*

$$U_{t_0}^{\widetilde{Q}} = U_{t_0}^{Q_1} 1_{\Omega \setminus B} + U_{t_0}^{Q_2} 1_B.$$

Beweis. Sei $\sigma \in \mathcal{S}_{t_0}$. Nach Eigenschaft Lemma 7.3(b) von $\widetilde{Q}$ gilt

$$E_{\widetilde{Q}}(L_\sigma | \mathcal{F}_{t_0}) = E_{Q_1}(L_\sigma | \mathcal{F}_{t_0}) 1_{\Omega \setminus B} + E_{Q_2}(L_\sigma | \mathcal{F}_{t_0}) 1_B.$$

Da mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_{t_0}$ auch $\widetilde{\sigma} = \sigma_1 1_{\Omega \setminus B} + \sigma_2 1_B$ auch eine Stoppzeit in $\mathcal{S}_{t_0}$ ist, folgt die Behauptung. □

Definition 7.7. *Sei $\mathcal{Q}$ eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen und L ein adaptierter nichtnegativer Prozess mit*

$$\sup_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(L_t) < \infty, \quad t = 0, \dots, T.$$

Die obere Snell-Einhüllende des Prozesses L bzgl. $\mathcal{Q}$ ist definiert durch

$$U_t^\uparrow := \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} U_t^Q, \quad t = 0, \dots, T, \tag{7.107}$$

wobei U^Q die Snell-Einhüllende bzgl. des Maßes Q ist.

Bemerkung 7.8. *Das essentielle Supremum in (7.107) wird bzgl. der σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ und dem Maß P gebildet. Da das Maß beim essentiellen Supremum aber nur über die Nullmengen eingeht, kann man auch jedes $Q \in \mathcal{M}^e$ nehmen.*

(6.92) in (7.107) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} U_t^\uparrow &= \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \text{ess sup}_{\tau\in\mathcal{S}_t} E_Q(L_\tau|\mathcal{F}_t) \\ &= \text{ess sup}_{\tau\in\mathcal{S}_t} \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(L_\tau|\mathcal{F}_t). \end{aligned} \tag{7.108}$$

Definition 7.9. *Sei $\mathcal{Q}$ eine nichtleere Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Ein adaptierter Prozess U heißt ein $\mathcal{Q}$-Supermartingal, wenn U ein Q-Supermartingal für alle $Q \in \mathcal{Q}$. Analog sind $\mathcal{Q}$-(Sub-)Martingale definiert.*

Beispiel 7.10. *Sei $\mathcal{Q} = \mathcal{M}^e$. Jeder Wertprozess $V(\varphi) = v_0 + \varphi \bullet S$, der durch eine Konstante nach unten beschränkt ist, ist ein $\mathcal{M}^e$-Martingal.*

Satz 7.11. *Sei $\mathcal{Q}$ stabil. Die obere Snell-Einhüllende $U^\uparrow$ aus (7.107) ist das kleinste $\mathcal{Q}$-Supermartingal, das L dominiert. Außerdem erfüllt $U^\uparrow$ die folgende Rekursion:*

$$U_T^\uparrow = L_T, \qquad U_{t-1}^\uparrow = L_{t-1} \vee \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_t^\uparrow|\mathcal{F}_{t-1}), t = 1, \dots, T. \tag{7.109}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $U^\uparrow$ die Rekursion (7.109) erfüllt. Es gilt

$$\begin{aligned} U_{t-1}^\uparrow &= \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} \left[L_{t-1} \vee E_Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1})\right] \\ &= L_{t-1} \vee \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}) \end{aligned} \tag{7.110}$$

Fixiere ein $Q^\star \in \mathcal{Q}$. Bezeichne mit $\mathcal{Q}_t(Q^\star)$ die Menge der Maße Q, die auf $\mathcal{F}_t$ mit $Q^\star$ übereinstimmen (d.h. $Q(A) = Q^\star(A)\ \forall A \in \mathcal{F}_t$).

1) Da U_t^Q $\mathcal{F}_t$-messbar ist, gilt für alle $Q \in \mathcal{Q}_t(Q^\star)$

$$E_Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{Q^\star}(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}). \tag{7.111}$$

2) Die Menge $\{U_t^Q|Q \in \mathcal{Q}_t(Q^\star)\}$ ist maximumsstabil. Nimmt man nämlich zwei Maße $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_t(Q^\star)$ und betrachte deren Snell-Einhüllenden zum Zeitpunkt t, $U_t^{Q_1}$ und $U_t^{Q_2}$, dann kann man sich mit Lemma 7.3 ein neues Maß $\widetilde{Q}$ konstruieren. Wähle dafür $B := \{U_t^{Q_2} > U_t^{Q_1}\}$. $\widetilde{Q}$ stimmt auf $\mathcal{F}_t$ mit $Q^\star$ überein und mit Lemma 7.6 gilt für die Snell-Einhüllende $U_t^{\widetilde{Q}} = \max\{U_t^{Q_1}, U_t^{Q_2}\}$.

3) Wegen Lemma 7.6 gilt

$$\text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} U_t^Q = \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}_t(Q^\star)} U_t^Q \tag{7.112}$$

Wegen (7.112) und der Maximumsstabilität in Schritt 2 existiert eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Q}_t(Q^\star)$ mit $U_t^{Q_k} \nearrow U_t^\uparrow$ (P-f.s.), wenn $k \nearrow \infty$. Monotone Konvergenz für bedingte Erwartungswerte zeigt, dass

$$\begin{aligned}
\text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}) &\overset{(7.111)}{=} \text{ess sup}_{Q^\star\in\mathcal{Q}} \text{ess sup}_{Q\in\mathcal{Q}_t(Q^\star)} E_{Q^\star}(U_t^Q|\mathcal{F}_{t-1}) \\
&= \text{ess sup}_{Q^\star\in\mathcal{Q}} \lim_{k\to\infty} E_{Q^\star}(U_t^{Q_k}|\mathcal{F}_{t-1}) \\
&= \text{ess sup}_{Q^\star\in\mathcal{Q}} E_{Q^\star}(U_t^\uparrow|\mathcal{F}_{t-1}).
\end{aligned}$$

Zusammen mit (7.110) beweist dies die Rekursion (7.109).

Nun wollen wir zeigen, dass $U^\uparrow$ ein $\mathcal{Q}$-Supermartingal ist. Wegen (7.109) gilt für alle $Q \in \mathcal{Q}$

$$U_t^\uparrow \geq L_t \vee E_Q(U_{t+1}^\uparrow|\mathcal{F}_t) \geq E_Q(U_{t+1}^\uparrow|\mathcal{F}_t).$$

Da $U_0^\uparrow$ eine endliche Konstante ist und wegen der Integrierbarkeits-Bedingung ist $U^\uparrow$ ein $\mathcal{Q}$-Supermartingal.

Sei $\widetilde{U}$ ein anderes $\mathcal{Q}$-Supermartingal, das L dominiert. Wir zeigen wieder durch Rückwärtsinduktion, dass $\widetilde{U} \geq U^{\uparrow}$. Es gilt:

$$\widetilde{U}_T \geq L_T = U_T^{\uparrow}.$$

Es gelte $\widetilde{U}_t \geq U_t^{\uparrow}$. Daraus folgt für alle $Q^\star \in \mathcal{Q}$

$$\widetilde{U}_{t-1} \geq L_{t-1} \vee E_{Q^\star}(\widetilde{U}_t|\mathcal{F}_{t-1}) \geq L_{t-1} \vee E_{Q^\star}(U_t^{\uparrow}|\mathcal{F}_{t-1}).$$

Wegen (7.109) folgt

$$\widetilde{U}_{t-1} \geq L_{t-1} \vee \text{ess sup}_{Q^\star \in \mathcal{Q}} E_{Q^\star}(U_t^{\uparrow}|\mathcal{F}_{t-1}) = U_{t-1}^{\uparrow}.$$

□

Lemma 7.12. *Seien $U \in \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \notin U$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^n$ mit $\sup_{u \in U} \lambda^\top u < \lambda^\top x$.*

Proof. Folgt sofort aus Lemma 1.19. □

Satz 7.13. *Für einen adaptierten, nichtnegativen Prozess U sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) U ist ein $\mathcal{M}^e$-Supermartingal.

(b) Es existieren ein adaptierter nichtfallender Prozess A und eine vorhersehbare Strategie φ, so dass

$$U_t = U_0 + \varphi \bullet S_t - A_t, \quad \forall t = 0, \dots, T. \tag{7.113}$$

Bemerkung 7.14. *Da der Prozess $\varphi \bullet S$ aus (7.113) nach unten durch die Konstante U_0 beschränkt ist, ist $\varphi \bullet S$ ein $\mathcal{M}^e$-Martingal (Proposition 2.10).*
Die Zerlegung (7.113) wird auch eine optionale Zerlegung *des $\mathcal{M}^e$-Supermartingals U genannt. Der Prozess A braucht nämlich im Gegensatz zu der Doob-Meyer-Zerlegung bezüglich eines einzigen Maßes Q nicht mehr vorhersehrbar sondern nur noch "optional" zu sein. Optional ist in zeitdiskreten Modellen äquivalent zu adaptiert. Dafür ist die simultane Doob-Meyer-Zerlegung (simultan bezüglich mehreren Maßen) i.A. nicht mehr eindeutig.*

Beweis. (b)⇒(a): Da $\varphi \bullet S$ ein Q-Martingal und $Q(\Delta A \geq 0) = 1$ für alle $Q \in \mathcal{M}^e$ folgt (a).

(a)⇒(b): Der Beweis wird hier nur für $|\Omega| < \infty$ geführt. Für den allgemeinen Fall siehe Föllmer/Schied (2002), Theorem 7.5. Wir können dann wieder o.B.d.A. annehmen, dass $\mathcal{F}$ die Potenzmenge von Ω ist und $P(\{\omega\}) > 0,\ \forall \omega \in \Omega$ (vgl. Beweis von Theorem 1.18).

Wir müssen zeigen, dass für alle $t = 1, \dots, T$ ein $\mathcal{F}_{t-1}$-messbarer Zufallsvektor η und eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable $R \geq 0$ existieren, so dass

$$U_t - U_{t-1} = \eta^\top \Delta S_t - R_t. \tag{7.114}$$

Annahme es gäbe keine Darstellung (7.114), d.h. $U_t - U_{t-1} \notin \mathcal{X} := \{\eta^\top \Delta S_t | \eta \text{ ist } \mathcal{F}_{t-1}\text{-messbar}\} - \mathbb{R}^\Omega_+$. Die Menge $\mathcal{X}$ ist offenbar abgeschlossen und konvex. Damit ist Lemma 7.12 anwendbar und es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}^{|\Omega|}$ mit

$$\alpha := \sup_{x \in \mathcal{X}} \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) x(\omega) < \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \Delta U_t(\omega) =: \delta. \tag{7.115}$$

Da $\mathcal{X}$ ein Kegel ist, der die Null enthält, gilt $\alpha = 0$. Da $-1_{\{\lambda < 0\}} \in \mathcal{X}$ folgt hieraus, dass $-\sum_{\omega \in \Omega} 1_{\{\lambda<0\}}(\omega)\lambda(\omega) \leq 0$ und damit $\lambda \geq 0$.

Sei Q ein äquivalentes Martingalmaß mit $Q(\{\omega\}) := q(\omega) > 0$, $q \in \mathbb{R}^{|\Omega|}_+$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass mit λ auch $\lambda + \varepsilon q$ die Ungleichung (7.115) erfüllt (für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt nämlich $\sum_{\omega \in \Omega} q(\omega) x(\omega) \leq 0$). Damit kann man o.B.d.A. annehmen, dass $\lambda > 0$ und ein neues *äquivalentes* Wahrscheinlichkeitmaß

$$Q^\lambda(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\widetilde{\omega} \in \Omega} \lambda(\widetilde{\omega})}$$

definieren. Sei $A \in \mathcal{F}_{t-1}$. Da $\pm 1_A \Delta S_t \in \mathcal{X}$ gilt $\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) 1_A(\omega) \Delta S_t(\omega) = 0$. Q^λ ist also ein ÄMM. Da aber der Prozess U ein $\mathcal{M}^e$-Supermartingal ist, ist er insbesondere ein Q^λ-Supermartingal und damit

$$0 \geq \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \Delta U_t(\omega) =: \delta.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $\alpha = 0$. □

Definition 7.15. *Sei $v_0 \in \mathbb{R}_+$. Eine Stategie $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ heißt eine Superhedging-Strategie zum Startkapital v_0 für den amerikanischen Claim L , wenn*

$$v_0 + \varphi \bullet S_t \geq L_t, \quad t = 0, \dots, T. \tag{7.116}$$

Bemerkung 7.16. *Wie schon in Bemerkung 6.5 angemerkt, kann man jeden europäischen Claim $H \geq 0$ als amerikanischen Claim mit Auszahlungsprozess*

$$L_t := \begin{cases} 0 & \text{für } t < T \\ H & \text{für } t = T \end{cases}$$

interpretieren. Wegen $H \geq 0$ folgt in einem arbitragefreien Markt aus $v_0 + \varphi \bullet S_T \geq H$, dass $v_0 + \varphi \bullet S_t \geq 0$, $t = 0, \dots, T$. Damit ist im europäischen Fall (7.116) äquivalent zu

$$v_0 + \varphi \bullet S_T \geq H. \tag{7.117}$$

Definition 7.17. *Bezeichne mit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}_+$ die Menge der Startkapitale mit denen L supergehedged werden kann, d.h. $x \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \exists \varphi$ s.d. $x + \varphi \bullet S \geq L$.*

Korollar 7.18. *Es gilt $\mathcal{I} = [U_0^\uparrow, \infty)$, wobei*

$$U_0^\uparrow = \sup_{Q \in \mathcal{M}^e} \sup_{\tau \in \mathcal{S}_0} E_Q(L_\tau).$$

Für europäische Claims gilt

$$U_0^\uparrow = \sup_{Q \in \mathcal{M}^e} E_Q(H).$$

Beweis. Sei $x \in \mathcal{I}$, d.h. $\exists \varphi$ s.d. $x + \varphi \bullet S \geq L$. Da der Prozess $x + \varphi \bullet S$ ein $\mathcal{M}^e$-Martingal ist und mit Satz 7.11 $U^\uparrow$ das kleinste $\mathcal{M}^e$-Supermartingal ist, das L dominiert, folgt $x \geq U_0^\uparrow$. Andererseits folgt aus Satz 7.13 die Existenz einer Strategie φ mit $U_0^\uparrow + \varphi \bullet S_t \geq U_t^\uparrow \geq L_t$, $t = 0, \dots, T$. □

8 Minimierung des Hedging-Fehlers in unvollständigen Märkten

Gegeben sei ein europäischer Claim mit (diskontierter) Auszahlung $H \geq 0$. In einem unvollständigen Markt existiert in der Regel kein Paar (v_0, φ) mit $v_0 + \varphi \bullet S_T = H$, d.h. H

ist nicht replizierbar. Trotzdem kann der Verkäufer des Claims natürlich versuchen, das eingegangene Risiko zumindest teilweise abzusichern, indem er durch Wahl einer Handelsstrategie φ "möglichst nahe" an die stochastische Auszahlung H kommt. Zum Beispiel könnte er versuchen, die erwartete quadratische Abweichung (bzgl. des ursprünglichen Maßes) zu minimieren, d.h.

$$E_P \left(H - v_0 - \varphi \bullet S_T\right)^2 \qquad \min_{\varphi, v_0} \; ! \tag{8.118}$$

Auf dieses Problem werden wir später zurückkommen. Zunächst schauen wir uns eine lokale Variante dieses Kriteriums an.

Definition 8.1. *Ein allgemeiner Vermögensprozess bestimmt sich durch eine Strategie φ und einen adaptierten Kapitalzuführungsprozess C, d.h.*

$$V_t(\varphi, C) := \varphi \bullet S_t + C_t, \quad t = 0, \dots, T$$

C_t kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen (Kapitalzufuhr- bzw. -entnahme).

Wenn $\Delta C_t \neq 0$ für ein $t \geq 1$, dann ist V nicht mehr selbstfinanzierend.

Annahme 8.2. *Wir nehmen in diesem Kapitel durchgehend an, dass der (diskontierte) Claim H und die (diskontierten) Preisprozesse S^i quadratintegrierbar bzgl. des ursprünglichen Maßes P sind.*

Definition 8.3. *Eine L^2-zulässige Strategie für H ist ein Paar (φ, C) mit*

$$V_T(\varphi, C) = H$$

und $\varphi \bullet S_t, C_t \in L^2(P)$, $\forall t = 0, \dots, T$.

Natürlich existiert zu jedem Claim H ein allgemeiner Vermögensprozess $V(\varphi, C)$ mit $V_T(\varphi, C) = H$. Da nicht nur zum Zeitpunkt 0 sondern auch zu späteren Zeitpunkten Kapital zugeführt werden darf, besteht eine "Hedging-Möglichkeit" darin, bis zum Zeitpunkt T nichts zu machen und dann den gesamten Betrag H zuzuschießen, d.h. $\Delta C_T = H$.

Definition 8.4. *Zu (φ, C) definiere den Prozess R^{loc} durch*

$$R_t^{\text{loc}}(\varphi, C) := E_P[(C_{t+1} - C_t)^2 | \mathcal{F}_t], \quad t = 0, \dots, T-1$$

Eine L^2-zulässige Strategie $(\widehat{\varphi}, \widehat{C})$ mit $\widehat{V}(\widehat{\varphi}, \widehat{C}) = \widehat{\varphi} \bullet S + \widehat{C}$ heißt lokal risikominimierende Strategie, wenn für alle $t = 0, \dots, T-1$:

$$R_t^{\text{loc}}(\widehat{\varphi}, \widehat{C}) \leq R_t^{\text{loc}}(\varphi, C),$$

für alle L^2-zulässigen Strategien (φ, C) mit $V_{t+1} = \widehat{V}_{t+1}$.

Bemerkung 8.5. *Für $T = 1$ stimmt wegen $V_T(\varphi, C) = H$ das lokale Kriterium mit dem globalen (8.118) überein. Bei einem lokalen Kriterium vergleicht man eine Strategie immer nur mit Strategien, die außerhalb einer Umgebung gleich sind. Hier vergleicht man alle allgemeinen Vermögensprozesse mit gegebenem Wert in V_{t+1} und schaut, mit welchem V_t und φ_{t+1} man diesen am besten (im Sinne des obigen Kriteriums) erreicht.*

Definition 8.6. *Eine L^2-zulässige Strategie (φ, C) heißt "im Mittel selbstfinanzierend", wenn der Kostenprozess C ein P-Martingal ist, d.h.*

$$E_P[C_{t+1} - C_t | \mathcal{F}_t] = 0, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Die bedingte Kovarianz zweier Zufallsvariablen W und Z bzgl. P ist definiert als

$$\operatorname{Cov}(W, Z | \mathcal{F}_t) := E_P[WZ | \mathcal{F}_t] - E_P[W | \mathcal{F}_t] E_P[Z | \mathcal{F}_t].$$

Die bedingte Varianz ist dann durch

$$\operatorname{Var}(W | \mathcal{F}_t) := \operatorname{Cov}(W, W | \mathcal{F}_t)$$

definiert.

Definition 8.7. *Zwei adaptierte Prozesse U und Y heißen streng P-orthogonal, wenn*

$$\operatorname{Cov}(U_{t+1} - U_t, Y_{t+1} - Y_t | \mathcal{F}_t) = 0, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Wenn einer der beiden Prozesse U, Y ein P-Martingal ist, dann gilt

$$\operatorname{Cov}(U_{t+1} - U_t, Y_{t+1} - Y_t | \mathcal{F}_t) = E_P[(U_{t+1} - U_t)(Y_{t+1} - Y_t) | \mathcal{F}_t] = 0.$$

Satz 8.8. *Eine L^2-zulässige Strategie (φ, C) ist genau dann lokal risikominimierend, wenn sie im Mittel selbstfinanzierend ist und der Kostenprozess C streng P-orthogonal zu den Preisprozessen S^i, $i = 1, \dots, d$ ist.*

Beweis. Es gilt die Zerlegung

$$R_t^{\mathrm{loc}}(\varphi, C) = \mathrm{Var}(C_{t+1} - C_t|\mathcal{F}_t) + E[C_{t+1} - C_t|\mathcal{F}_t]^2$$

Da sich die bedingte Varianz nicht verändert, wenn man $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariablen addiert, lässt sich der erste Ausdruck auf der rechten Seite schreiben als

$$\mathrm{Var}(C_{t+1} - C_t|\mathcal{F}_t) = \mathrm{Var}(V_{t+1} - \varphi_{t+1}^\top \Delta S_{t+1}|\mathcal{F}_t) \tag{8.119}$$

Der zweite Ausdruck erfüllt

$$E[C_{t+1} - C_t|\mathcal{F}_t]^2 = \big(E[V_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \varphi_{t+1}^\top E[\Delta S_{t+1}|\mathcal{F}_t] - V_t\big)^2 \tag{8.120}$$

Wir nehmen V_{t+1} als gegeben an (t fest) und leiten notwendige und hinreichende Bedingungen für die Optimalität von V_t und φ_{t+1} her. Da der Wert von (8.119) unabhängig von V_t ist, muss V_t den Ausdruck (8.120) minimieren, d.h.

$$V_t = E[V_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \varphi_{t+1}^\top E[\Delta S_{t+1}|\mathcal{F}_t]. \tag{8.121}$$

Der Wert von (8.119) ist eine quadratische Form in dem $\mathcal{F}_t$-messbaren Zufallsvektor φ_{t+1}. Damit ist (8.119) minimal genau dann, wenn φ_{t+1} die lineare Gleichungen

$$\mathrm{Cov}(V_{t+1} - \varphi_{t+1}^\top \Delta S_{t+1}, \Delta S_{t+1}^i|\mathcal{F}_t) = 0, \quad i = 1, \dots, d. \tag{8.122}$$

löst. (8.121) ist äquivalent zu

$$E[C_{t+1} - C_t|\mathcal{F}_t] = E[V_{t+1} - \varphi_{t+1}^\top \Delta S_{t+1}|\mathcal{F}_t] - V_t = 0. \tag{8.123}$$

Außerdem ist gegeben (8.121) Bedingung (8.122) äquivalent zu

$$E[\Delta C_{t+1} \Delta S_{t+1}^i|\mathcal{F}_t] = 0, \quad i = 1, \dots, d. \tag{8.124}$$

Hier geht ein, dass die bedingte Kovarianz sich nicht verändert, wenn man die $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable V_t vom ersten Argument subtrahiert.

V_T durch H vorgegeben ist, besteht der Beweis nun einfach aus einer Rückwärtsinduktion: (8.123) und (8.124) sind zusammen mit der Endbedingung $V_T = H$ notwendig und hinreichend für die lokale Optimalität von (φ, C). □

Der Beweis liefert ein Rezept zur rekursiven Bestimmung der risikominimierenden Strategie. Wenn V_{t+1} bereits bestimmt ist, dann minimiere

$$E[(C_{t+1} - C_t)^2 | \mathcal{F}_t] = E[(V_{t+1} - V_t - \varphi_{t+1}^\top \Delta S_{t+1})^2 | \mathcal{F}_t]$$

über V_t und φ_{t+1}. Das ist eine bedingte Version eines linearen Regressionsproblems. Im Fall $d = 1$ existiert für (8.121) und (8.122) die folgende Lösung.

$$\begin{aligned}
\widehat{V}_T &:= H, \\
\widehat{\varphi}_{t+1} &:= \frac{\operatorname{Cov}(\widehat{V}_{t+1}, \Delta S^1_{t+1} | \mathcal{F}_t)}{\sigma^2_{t+1}} 1_{\{\sigma_{t+1} \neq 0\}}, \\
\widehat{V}_t &= E[\widehat{V}_{t+1} | \mathcal{F}_t] - \widehat{\varphi}_{t+1} E[\Delta S^1_{t+1} | \mathcal{F}_t],
\end{aligned} \tag{8.125}$$

wobei $\sigma^2_{t+1} := \operatorname{Var}(\Delta S_{t+1} | \mathcal{F}_t)$. Der Kostenprozess ergibt sich aus $\widehat{C}_t = \widehat{V}_t - \widehat{\varphi} \bullet S_t$. Es bedarf aber noch einer Zusatzbedingung, die sicherstellt, dass die Strategie $(\widehat{\varphi}, \widehat{C})$ L^2-zulässig ist.

Proposition 8.9. *Betrachte einen Markt mit nur einem risikobehafteten Wertpapier (d.h. d=1) und nehme an, dass da eine Konstante C existiert mit*

$$\big(E_P[\Delta S^1_t | \mathcal{F}_{t-1}]\big)^2 \le C \sigma^2_t, \quad t = 1, \dots, T. \tag{8.126}$$

Dann definiert obige Rekursion eine lokal risikominimierende Strategie $(\widehat{\varphi}, \widehat{C})$. Außerdem stimmt jede andere lokal risikominimierende Strategie mit $(\widehat{\varphi}, \widehat{C})$ bis auf Modifikationen von $\widehat{\varphi}_t$ auf der Menge $\{\sigma^2_t = 0\}$ überein.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $(\widehat{\varphi}, \widehat{C})$ L^2-zulässig ist. Offenbar folgt aus der Rekursion (8.125) und (8.126)

$$\begin{aligned}
E[(\widehat{\varphi}_t \Delta S^1_t)^2] &= E\left[\frac{\operatorname{Cov}(\widehat{V}_t, \Delta S^1_t | \mathcal{F}_{t-1})^2}{\sigma^4_t} E[(\Delta S^1_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] 1_{\{\sigma^2_t > 0\}}\right] \\
&\le (1 + C) E\left[\frac{\operatorname{Cov}(\widehat{V}_t, \Delta S^1_t | \mathcal{F}_{t-1})^2}{\sigma^2_t}\right] \\
&\le (1 + C) E\left[\operatorname{Var}(\widehat{V}_t | \mathcal{F}_{t-1})\right]
\end{aligned}$$

Für $t = T$ ist der letzte Ausdruck P-f.s. endlich, da $\widehat{V}_T = H$ quadratintegrierbar ist. Damit ist $\widehat{\varphi}_T \Delta S^1_T \in L^2(P)$. Damit folgt aus (8.125), dass auch $\widehat{V}_{T-1} \in L^2(P)$ und $\Delta \widehat{C}_T \in L^2(P)$.

Das Argument läßt sich also rekursiv fortsetzen und es folgt, dass die in (8.125) definierte Strategie L^2-zulässig ist. Nehme man nun eine andere Handelsstrategie φ'_{t+1}. Aus (8.125) und der Bedingung (8.122) folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Cov}((\varphi'_{t+1} - \widehat{\varphi}_{t+1})\Delta S^1_{t+1}, \Delta S^1_{t+1} | \mathcal{F}_t) \\ &= (\varphi'_{t+1} - \widehat{\varphi}_{t+1}) \operatorname{Var}(\Delta S^1_{t+1} | \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Auf der Menge $\sigma^2_{t+1} > 0$ muss also gelten, dass $\varphi'_{t+1} = \widehat{\varphi}_{t+1}$. □

Bemerkung 8.10. *Der vorhersehbare Prozess*

$$\sum_{u=1}^{t} \frac{E[\Delta S^1_u | \mathcal{F}_{u-1}]^2}{\operatorname{Var}(\Delta S^1_u | \mathcal{F}_{u-1})}, \quad t = 1, \dots, T$$

(mit der Konvention $\frac{0}{0} := 0$), wird auch der Mean-Variance-Tradeoff-Prozess von S^1 genannt. Bedingung (8.126) besagt also, dass der Mean-Variance-Tradeoff (endlich und) beschränkt ist.

Bemerkung 8.11. *Die Voraussetzung (8.126) ist äquivalent zu der Existenz eines $\delta < 1$ mit*

$$\left(E[\Delta S^1_t | \mathcal{F}_{t-1}]\right)^2 \leq \delta E[(\Delta S^1_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}], \quad t = 1, \dots, T \tag{8.127}$$

(8.126) ist nämlich äquivalent zu

$$\left(E_P[\Delta S^1_t | \mathcal{F}_{t-1}]\right)^2 \leq C \left(E_P[(\Delta S^1_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}] - E_P[\Delta S^1_t | \mathcal{F}_{t-1}]^2\right), \quad t = 1, \dots, T.$$

Für $\delta = \frac{C}{1+C}$ ist dies wiederum äquivalent zu (8.127).

Beispiel 8.12. *Betrachte man ein Modell mit einer einzigen risikobehafteten Aktie und einem Bond mit Preisprozess $(1+r)^t$, $r > -1$. Der diskontierte Preisprozess der Aktie ist gegeben durch*

$$S^1_t = \prod_{j=1}^{t} \frac{1 + A_j}{1 + r},$$

wobei die stochastischen Renditen $(A_j)_{j=1,\dots,T}$ i.i.d. mit $A_1 > -1$ und $A_1 \in L^2(P)$. S^1_t ist dann auch quadratintegrierbar.

Bezeichne $\widetilde{\mu} := E_P(A_1)$ *und* $\widetilde{\sigma}^2 := \mathrm{Var}(A_1)$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} E[\Delta S_t^1|\mathcal{F}_{t-1}] &= S_{t-1}^1 \frac{\widetilde{\mu}-r}{1+r} \\ \mathrm{Var}(\Delta S_t^1|\mathcal{F}_{t-1}) &= (S_{t-1}^1)^2 \frac{\widetilde{\sigma}^2}{(1+r)^2} \end{aligned}$$

Damit ist Bedingung (8.126) hier automatisch erfüllt und eine lokal risikominimierende Strategie existiert (wenn $\widetilde{\sigma}^2 = 0$ *folgt in einem arbitragefreien Modell, dass* $\widetilde{\mu} = r$*). Außerdem ist* P *genau dann ein Martingalmaß, wenn* $\widetilde{\mu} = r$.

Nun kommen wir wieder zum allgemeinen Fall mit $d > 1$ riskobehafteten Wertpapieren zurück, d.h. $S = (S^0, \dots, S^d)$.

Korollar 8.13. *Eine lokal riskominimierende Strategie existiert genau dann, wenn* H *zerlegbar ist in*

$$H = c + \varphi \bullet S_T + L_T \tag{8.128}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$, $L_t, \varphi \bullet S_t \in L^2(P)$, $t = 1, \dots, T$, *und* $(L_t)_{t=0,\dots,T}$ *ist ein* P*-Martingal, das orthogonal zu allen* S^i *steht und* $L_0 = 0$. *Wenn der Markt arbitragefrei ist, dann sind* c *und der Prozess* L *in der Zerlegung (8.128) eindeutig.*

Beweis. Wenn $(\widehat{\varphi}, \widehat{C})$ eine lokal riskominimierende Strategie ist, dann ist nach Theorem 8.8 $L_t := \widehat{C}_t - \widehat{C}_0$ ein quadratintegrierbares P-Martingal, das streng orthogonal zu den Preisprozessen S^i ist. Damit erhalten wir eine Zerlegung (8.128). Wenn umgekehrt eine Zerlegung (8.128) existiert, dann ist φ mit dem Kostenprozess $C := c + L$ mit Theorem 8.8 eine lokal riskominimierende Strategie.

Um die Eindeutigkeit von L zu zeigen, nehme an, es gäbe eine weitere Zerlegung $(\widetilde{c}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{L})$. Wegen obigem ist auch $\widetilde{\varphi}$ mit dem Kostenprozess $\widetilde{C} := \widetilde{c} + \widetilde{L}$ eine lokal riskominimierende Strategie. Damit gilt, dass

$$\mathrm{Cov}((\widetilde{\varphi}_T - \varphi_T)^\top \Delta S_T, \Delta S_T^i|\mathcal{F}_{T-1}] = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

Multipliziert man diese bedingten Kovarianzen mit den $\mathcal{F}_{T-1}$-messbaren Zufallsvariablen $\widetilde{\varphi}_T^i - \varphi_T^i$ und addiert alles auf, dann folgt

$$\mathrm{Var}((\widetilde{\varphi}_T - \varphi_T)^\top \Delta S_T|\mathcal{F}_{T-1}) = 0,$$

d.h. die Differenz $\widetilde{\varphi}_T \Delta S_T - \varphi_T \Delta S_T$ ist $\mathcal{F}_{T-1}$-messbar und damit gilt, da der Markt arbitragefrei ist, dass $\widetilde{\varphi}_T \Delta S_T = \varphi_T \Delta S_T$. Es folgt $\Delta \widetilde{L}_T = \Delta L_T$ und $\widetilde{c} + \widetilde{\varphi} \bullet S_{T-1} + \widetilde{L}_{T-1} = c + \varphi \bullet S_{T-1} + L_{T-1}$. Nun kann man rekursiv fortfahren und erhält $\widetilde{L} = L$. □

Lemma 8.14. *Für zwei quadratintegrierbare Martingale M und N sind folgende Bedingungen äquivalent*

(a) M und N sind streng orthogonal.

(b) Das Produkt MN ist ein Martingal.

Beweis. Aus der Martingaleigenschaft von M und N folgt

$$E[\Delta M_t \Delta N_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E[M_t N_t | \mathcal{F}_{t-1}] - M_{t-1} N_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Dieser Ausdruck verschwindet genau dann, wenn MN ein Martingal ist. □

Sei $\mathcal{H}^2$ die Menge der quadratintegrierbaren P-Martingale. Wegen $M_t = E_P(M_T | \mathcal{F}_t)$, kann jedes $M \in \mathcal{H}^2$ mit seinem Endwert identifiziert werden. Außerdem fasst man alle Zufallsvariablen, die P-f.s. übereinstimmen zu einer Äquivalenzklasse zusammen. Wir definieren auf $\mathcal{H}^2$ das Skalarprodukt

$$(M, N)_{\mathcal{H}^2} := E_P[M_T N_T], \quad M, N \in \mathcal{H}^2.$$

Damit wird $\mathcal{H}^2$ zu einer Hilbertraum-Isomorphie zu $L^2(P)$.

Definition 8.15. *Ein Teilraum $\mathcal{Y} \subset \mathcal{H}^2$ wird stabil genannt, wenn $M^\tau \in \mathcal{Y}$ für alle $M \in \mathcal{Y}$ und $\tau \in \mathcal{S}$.*

Proposition 8.16. *Für einen stabilen Teilraum $\mathcal{Y} \subset \mathcal{H}^2$ und für $L \in \mathcal{H}^2$ mit $L_0 = 0$ sind folgende Bedingungen äquivalent*

(a) L ist orthogonal zu $\mathcal{Y}$, d.h.

$$(L, M)_{\mathcal{H}^2} = 0, \quad \forall M \in \mathcal{Y}.$$

(b) L ist streng orthogonal zu $\mathcal{Y}$, d.h.

$$E[\Delta L_t \Delta M_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0, \quad \forall t = 1, \dots, T, \; M \in \mathcal{Y}.$$

(c) Das Produkt LM ist für alle $M \in \mathcal{Y}$ ein Martingal.

Beweis. Die Äquivalenz von (b) und (c) folgt aus Lemma 8.14. Die Richtung $(c) \implies (a)$ ist wegen $0 = L_0 = L_0 M_0$ trivial. Bleibt zu zeigen: $(a) \implies (c)$. Sei $M \in \mathcal{Y}$. Da $\mathcal{Y}$ stabil ist, sind auch die gestoppten Prozesse M^τ in der Menge $\mathcal{Y}$ und damit nach Voraussetzung $E_P(L_T M_\tau) = 0$. Es gilt

$$0 = E_P[L_T M_\tau] = E_P[M_\tau E_P(L_T|\mathcal{F}_\tau)] = E_P[M_\tau L_\tau].$$

Es folgt, dass der Prozess LM ein Martingal ist (wähle etwa für alle $s \leq t$, $A \in \mathcal{F}_s$ als Stoppzeiten $\tau = t1_A + s1_{\Omega \setminus A}$ und $\widetilde{\tau} = s$). □

Satz 8.17 (Kunita-Watanabe-Zerlegung)**.** *Wenn S ein quadratintegrierbares Martingal unter dem ursprünglichen Maß P ist, dann besitzt jedes Martingal $M \in \mathcal{H}^2$ eine Darstellung wie in (8.128)*

$$M_t = M_0 + \varphi \bullet S_t + L_t, \quad t = 0, \dots, T,$$

wobei $L_t, \varphi \bullet S_t \in L^2(P)$, $t = 1, \dots, T$, und $(L_t)_{t=0,\dots,T}$ ist ein P-Martingal, das orthogonal zu allen S^i steht und $L_0 = 0$.

Beweis. Bezeichne mit $\mathcal{X}$ die Menge der Handelsstrategien φ, so dass $\varphi \bullet S_t \in L^2(P)$ für $t = 1, \dots, T$. Die Menge $\mathcal{G} = \{\varphi \bullet S | \varphi \in \mathcal{X}\}$ ist ein linearer Unterraum des $\mathcal{H}^2$. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{G}$ abgeschlossen ist. Da $\varphi \bullet S$ ein Martingal ist, gilt

$$(\varphi \bullet S, \varphi \bullet S)_{\mathcal{H}^2} = E_P\left[(\varphi \bullet S_T)^2\right] = \sum_{t=1}^{T} E_P\left[(\varphi_t^\top \Delta S_t)^2\right].$$

Wenn also $\varphi^{(n)} \bullet S$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}^2$ ist, dann sind $(\varphi_t^{(n)})^\top \Delta S_t$, $t = 1, \dots, T$, Cauchy-Folgen in $L^2(P)$. Mit Lemma 1.60 in Föllmer/Schied ist der $L^2(P)$-Limes von $(\varphi_t^{(n)})^\top \Delta S_t$ wieder von der Form $\varphi_t^\top \Delta S_t$, also ist $\mathcal{G}$ abgeschlossen.

Außerdem ist $\mathcal{G}$ stabil. Nehme dazu ein $\varphi \in \mathcal{X}$ und eine Stoppzeit τ. Es gilt $\varphi \bullet S_{t \wedge \tau} = \widetilde{\varphi} \bullet S_t$, wobei $\widetilde{\varphi}_s := \varphi_s 1_{\{\tau \geq s\}}$. $\widetilde{\varphi}$ ist vorhersehbar und wegen

$$\begin{aligned} E_P[(\widetilde{\varphi} \bullet S_t)^2 | \mathcal{F}_\tau] &= E_P\left[(E_P[\varphi \bullet S_t|\mathcal{F}_\tau])^2\right] \\ &\leq E_P\left[(\varphi \bullet S_t)^2\right] \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ist $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{G}$. Da $\mathcal{G}$ abgeschlossen ist, ist die orthogonale Zerlegung $M - M_0 = N + L$ wohldefiniert (mit $N \in \mathcal{G}$ und $(L, G)_{\mathcal{H}^2} = 0$, $\forall G \in \mathcal{G}$). Da M und N P-Martingale sind, ist auch L ein P-Martingal. Mit Proposition 8.16 folgt, dass L streng orthogonal zu $\mathcal{G}$ und damit zu S^i, $i = 1, \dots, d$. Die Eindeutigkeit von L folgt mit Korollar 8.13, da das Modell wegen $P \in \mathcal{M}^e$ arbitragefrei ist. □

Korollar 8.18. *Wenn P selber ein Martingalmaß ist, dann existiert eine lokal risikominimierende Strategie. Diese Strategie ist eindeutig in dem Sinne, dass der Wertprozess $\widehat{V}$ eindeutig bestimmt ist, nämlich*

$$\widehat{V}_t = E_P[H|\mathcal{F}_t], \quad t = 0, \dots, T$$

und der Kostenprozess gegeben ist durch

$$\widehat{C}_t = \widehat{V}_0 + L_t, \quad t = 0, \dots, T$$

wobei L das streng orthogonale P-Martingal in der Kunita-Watanabe Zerlegung von $\widehat{V}$ ist.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 8.17 und Korollar 8.13. □

A Anhang

Das Problem der stochastischen Optimierung über die Menge der *vorhersehbaren* Strategien $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ wollen wir **im Fall** $|\Omega| < \infty$ durch folgende Identifikation auf ein geläufigeres endlichdimensionales Optimierungsproblem zurückführen.

Jedes $\mathcal{F}_t$ erzeugt eine endliche Zerlegung $(A_{t,1}, \dots, A_{t,m_t})$ von Ω, d.h. $\mathcal{F}_t = \sigma(A_{t,i}, \dots, A_{t,m_t})$, $\Omega = \cup_{i=1,\dots,m_t} A_{t,i}$ und $A_{t,i} \cap A_{t,j} = \emptyset$ für $i \neq j$. Zum Zeitpunkt t kann der Beobachter also sagen, welches der Ereignisse $A_{t,i}$, $i = 1, \dots, m_t$, eingetreten ist. Die Mengen $A_{t,i}$ nennt man auch die *Atome* der σ-Algebra $\mathcal{F}_t$.

Eine Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann $\mathcal{F}_t$-messbar, wenn sie für festes i allen $\omega \in A_{t,i}$ den gleichen Wert zuordnet. Wir können also in diesem Fall schreiben $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{m_t} y_i 1_{A_{t,i}}(\omega)$, $y_i \in \mathbb{R}$.

Damit können wir zum Beispiel den $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren Zufallsvektor φ_t mit einem Element aus $\mathbb{R}^{m_{t-1}d}$ identifizieren. Es reicht aus, den Prozess $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ zu den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$ zu betrachten. Die Wertpapiere haben ihren ersten Sprung (in den man investieren kann) zum Zeitpunkt 1.

Wir identifizieren also jede Handelsstrategie $\varphi = (\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d)_{t=1,\dots,T}$ mit einem Element aus dem $\mathbb{R}^n$ mit $n := d + m_1 d + \dots + m_{T-1}d$.

Satz A.1. *Seien $C \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : C \to \mathbb{R}$ eine diffbare konkave Funktion. Ferner seien $g_1 \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affine Funktionen (d.h. von der Form $g_i(x) = \alpha_i^\top x + \beta_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ und $\beta_i \in \mathbb{R}$). Sei $x_0 \in C$ mit $g_i(x_0) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Dann maximiert x_0 die Funktion f unter der Nebenbedingung $g_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$ genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}^m$ existiert, so dass x_0 die Funktion $x \mapsto f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda^i g_i(x)$ ohne Nebenbedingungen maximiert. Dies ist wiederum (wegen Konkavität) genau dann der Fall, wenn*

$$\mathrm{grad} f(x_0) - \sum_{i=1}^m \lambda^i \mathrm{grad} g_i(x_0) = 0$$

λ kann unabhängig von der Lösung x_0 gewählt werden.

Beweis. Folgt aus Sätzen der konvexen Analysis, siehe Theoreme 28.1, 28.3, Korollar 28.2.2 in Rockafellar [16]. □

Alternativer Beweis von Theorem 3.16 für $\Omega| < \infty$. Wir verwenden die erwähnte Identifikation der Menge aller vorhersehbaren Handelsstrategien mit dem $\mathbb{R}^n$. Wie gewohnt bezeichnen wir die Menge der reellwertigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{R}^\Omega$. Seien nun $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}$ und $g_\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}$ für jedes $\omega \in \Omega$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(\varphi, X) &:= E(u(X)) \\ g_\omega(\varphi, X) &:= X(\omega) - V_T(\varphi)(\omega) \end{aligned}$$

Dann ist φ genau dann erwartungsnutzenoptimal, wenn $(\varphi, V_T(\varphi))$ die Funktion f unter den Nebenbedingungen $g_\omega = 0$, $\forall \omega \in \Omega$, optimiert. Man maximiert also den Erwartungsnutzen zunächst über alle Zufallsvariablen X. Die Nebenbedingungen g_ω garantieren, dass die Zufallsvariablen X auch als Endwert eines selbstfinanzierenden Vermögensprozesses $(V_t)_{t=0,1,\dots,T}$ mit gegebenem Startkapitel $v_0 \in \mathbb{R}$ darstellbar sind. Man beachte, dass ω im Beweis des Satzes gleich zweimal vorkommt. Zum einen existiert zu jedem Zustand $\omega \in \Omega$ eine **Nebenbedingung** g_ω, die die "Finanzierbarkeit" von $X(\omega)$ sichert. Zum anderen gibt ω einfach die Komponente von X an. $X(\omega)$ entspricht also einer **Variablen**. Nach Hilfssatz A.1 ist $(\varphi, \widehat{V}_T(\varphi))$ genau dann ein Optimum des restringierten Problems, wenn eine reellwertige Zufallsvariable $\lambda \in \mathbb{R}^\Omega$ existiert mit

$$\mathrm{grad} f(\varphi, V_T(\varphi)) - \sum_{\widetilde{\omega} \in \Omega} \lambda(\widetilde{\omega}) \mathrm{grad} g_{\widetilde{\omega}}(\varphi, \widehat{V}_T(\varphi)) = 0 \tag{1.129}$$

d.h. der Gradient von f lässt sich als Linearkombination der Gradienten der grad$g_{\widetilde{\omega}}$ schreiben. (1.129) besteht aus $n + |\Omega|$ Gleichungen. Die ersten n Komponenten von f sind null. Daher bedeutet (1.129) dort (beachte: $V_T(\varphi) = v_0 + \varphi \bullet S = v_0 + \sum_{t=1}^T \varphi_t^\top \Delta S_t$), dass für alle $t = 1, \dots, T$ und alle $A_{t-1,j}$, $j = 1, \dots, m_{t-1}$ gilt

$$-\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) 1_{A_{t-1,j}}(\omega) \Delta S_t^i(\omega) = 0, \quad i = 1, \dots, d. \tag{1.130}$$

Setzen wir nun $\varrho(\omega) := \frac{\lambda(\omega)}{P(\{\omega\})}$ dann ist (1.130) äquivalent zu

$$E(\varrho 1_{A_{t-1,j}} \Delta S_t) = 0, \quad t = 1, \dots, T$$

und damit

$$E(\varrho \Delta S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad t = 1, \dots, T$$

Die letzten $|\Omega|$ Komponenten von (1.129) bedeuten, dass

$$u'(X(\omega))P(\{\omega\}) - \lambda(\omega)1 = 0, \quad \forall \omega \in \Omega,$$

also

$$u'(X(\omega)) = \varrho(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

Setzt man weiter $\kappa := E\left(u'(V_T(\varphi))\right)$ und $\frac{dP^\star}{dP} := \frac{1}{\kappa}\, u'(V_T(\varphi))$. Damit ist φ genau dann eine erwartungsnutzenoptimale Strategie, wenn

$$E(\frac{dP^\star}{dP} \Delta S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad t = 1, \dots, T,$$

d.h. wenn S ein $P^{\star}$-Martingal ist. Da $u' > 0$ ist $P^{\star}$ nach Konstruktion ein Wahrscheinlichkeitmaß.

$\square$

Literatur

[1] N. Bingham and R. Kiesel. *Risk-Neutral Valuation.* Springer, New York, 1998.

[2] M. Brokate and G. Kersting. *Maß und Integral.* Birkhäuser, first edition, 2011.

[3] F. Delbaen and W. Schachermayer. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Mathematische Annalen*, 312:215–250, 1998.

[4] H. Föllmer and Y. Kabanov. Optional decomposition and Lagrange multipliers. *Finance & Stochastics*, 2:69–81, 1998.

[5] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance – An Introduction in Discrete Time.* Walter de Gruyter, New York, first edition, 2002.

[6] O. Forster. *Analysis 2.* Vieweg, Braunschweig, 1984.

[7] T. Goll and J. Kallsen. A complete explicit solution to the log-optimal portfolio problem. *The Annals of Applied Probability*, 13:774–799, 2003.

[8] J. Hull. *Options, Futures and other Derivatives.* Prentice Hall, Upper Saddle River, third edition, 1997.

[9] A. Irle. *Finanzmathematik – Die Bewertung von Derivaten.* Teubner, Stuttgart, 1998.

[10] Kallsen J. *Eine Rundreise durch die Finanzmathematik.* Vorlesungsskript, Universität Freiburg, 2001.

[11] J. Kallsen. Utility-based derivative pricing in incomplete markets. In H. Geman, D. Madan, and S. Pliska, editors, *Mathematical Finance – Bachelier Congress 2000*, pages 313–338. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[12] J. Kallsen and C. Kühn. Pricing Derivatives of American and Game Type in Incomplete Markets. *Finance & Stochastics*, 8(2):261–284, 2004.

[13] A. Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer-Verlag, second edition, 2008.

[14] D. Kramkov. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets. *Probability Theory and Related Fields*, 105:459–479, 1996.

[15] D. Kramkov and W. Schachermayer. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. *The Annals of Applied Probability*, 9:904–950, 1999.

[16] T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton, 1970.

[17] T. Rockafellar and R. Wets. *Variational Analysis.* Springer, Berlin, 1998.

[18] M. Schweizer. Option hedging for semimartingales. *Stochastic Processes and their Applications*, 37:339–363, 1991.

[19] M. Schweizer. A guided tour through quadratic hedging approaches. In E. Jouini, J. Cvitanic, and M. Musiela, editors, *Option Pricing, Interest Rates and Risk Management*, pages 538–574. Cambridge University Press, 2001.

[20] C. Skiadas. *Asset Pricing Theory.* Princeton University Press, Princeton, 2009.