Jun. Prof. Dr. Christoph Kühn SoSe 2007

Übung zur *Einführung in die Stochastische Finanzmathematik*
Blatt 6 (Zusatzblatt)[1]

Abgabe **bereits** Mittwoch, 11.7.2007 vor der Vorlesung

Aufgabe 20

(a) Seien $Y_1, \dots, Y_T$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $E(Y_1) = 0$ und $\text{Var}(Y_1) = 1$. Zeigen Sie, dass der Prozess $X = (X_t)_{t=0,1,\dots,T}$ definiert durch $X_0 = 0$ und

$$X_t = \sum_{j=1}^{t} (Y_j)^2 - t, \quad t = 1, \dots, T$$

ein Martingal bzgl. der von X erzeugten Filtration ist.

(b) Sei M ein quadratintegrierbares Martingal (d.h. M ist ein Martingal und $E(M_t^2) < \infty$ für $t = 0, 1, \dots, T$). Zeigen Sie, dass M^2 ein Submartingal ist.

Aufgabe 21 Im Markt $(S_t^0, S_t^1)_{t=0,1}$ seien $S_0^0 = S_1^0 = S_0^1 = 1$ und S_1^1 log-normalverteilt mit Parametern -1 und 1 (vgl. Aufgabe 16). Bestimmen Sie die erwartungsnutzenoptimale Strategie $\varphi^1 \in \mathbb{R}$ zu der Nutzenfunktion $u = \log$ und dem Startkapital $v_0 = 1$. Zeigen Sie, dass das durch $\frac{dP^\star}{dP} = \frac{u'(v_0 + \varphi^1(S_1^1 - S_0^1))}{E_P(u'(v_0 + \varphi^1(S_1^1 - S_0^1)))}$ definierte Wahrscheinlichkeitsmaß $P^\star$ *kein* äquivalentes Martingalmaß ist (vgl. Theorem 3.6 im Skript).

Hinweis: Man bestimme die optimale Wahl von $\varphi^1 \in \mathbb{R}$ für

$$E_P(u(v_0 + \varphi^1(S_1^1 - S_0^1))) = E_P(\ln(1 + \varphi^1(S_1^1 - 1))),$$

indem man zunächst zeigt, dass Leerverkäufe in S^1 (d.h. $\varphi^1 < 0$) nicht optimal sein können und dann für positive φ^1 den Erwartungsnutzen mit Hilfe der Ungleichung $\log(x) \le x - 1$ abschätzt.

1. Für den Übungsschein sind 40 Punkte erforderlich. Dies entspricht 50 Prozent der Punkte auf den ersten 5 Übungszetteln.