Christoph Kühn WS 2008/09

Übung zur *Einführung in die Stochastische Finanzmathematik*
Blatt 5

Abgabe Mittwoch, 14.1.2009 vor der Vorlesung

Aufgabe 17 Sei Y eine standard-normalverteilte Zufallsvariable, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Berechnen Sie die Dichte und die ersten beiden Momente der Zufallsvariablen $X := e^{\sigma Y+\mu}$. Die Verteilung von X heißt *Log-Normalverteilung* mit Parametern μ und σ.

Aufgabe 18 Im Markt $(S_t^0, S_t^1)_{t=0,1}$ seien $S_0^0 = S_1^0 = S_0^1 = 1$ und S_1^1 log-normalverteilt mit Parametern -1 und 1 (vgl. Aufgabe 17). Bestimmen Sie die erwartungsnutzenoptimale Strategie $\varphi^1 \in \mathbb{R}$ zu der Nutzenfunktion $u = \log$ und dem Startkapital $v_0 = 1$. Zeigen Sie, dass das durch $\frac{dP^\star}{dP} = \frac{u'(v_0+\varphi^1(S_1^1-S_0^1))}{E_P(u'(v_0+\varphi^1(S_1^1-S_0^1)))}$ definierte Wahrscheinlichkeitsmaß $P^\star$ *kein* äquivalentes Martingalmaß ist (vgl. Satz 3.17 im Skript).

Hinweis: Man bestimme die optimale Wahl von $\varphi^1 \in \mathbb{R}$ für

$$E_P(u(v_0 + \varphi^1(S_1^1 - S_0^1))) = E_P(\ln(1 + \varphi^1(S_1^1 - 1))),$$

indem man zunächst zeigt, dass Leerverkäufe in S^1 (d.h. $\varphi^1 < 0$) nicht optimal sein können und dann für positive φ^1 den Erwartungsnutzen mit Hilfe der Ungleichung $\log(x) \le x - 1$ abschätzt. Aus Aufgabe 17 darf benutzt werden, dass $E_P(S_1^1) < 1$.

Bitte wenden

Aufgabe 19 Betrachte wie in Aufgabe 13 eine zweidimensionale Verallgemeinerung des Cox-Ross-Rubinstein Modells mit der Vereinfachung $T = 1$, $r = 0$. Also $S_0^0 = S_1^0 = S_0^1 = S_0^2 = 1$ und S_1^1, S_1^2 sind unter P stochastisch unabhängig mit $P(S_1^1 = u) = P(S_1^2 = u) = p$ und $P(S_1^1 = d) = P(S_1^2 = d) = 1-p$, $0 < d < 1 < u$ und $p \in (0, 1)$. Bestimmen Sie die erwartungsnutzenoptimale Strategie in diesem Modell für die logarithmische Nutzenfunktion und Startkapital 1.

Tipp: Bei der Bestimmung der optimalen Strategie benutze man die Symmetrie in dem Modell. Die Optimalitätsbedingung (3.36) in Satz 3.24 im Skript vereinfacht sich damit wesentlich.

Zusatz: Vergleichen Sie das Ergebnis mit der optimalen Handelsstrategie im eindimensionalen Cox-Ross-Rubinstein Modell (Beispiel 2.8 im Skript), das dafür aus zwei Perioden bestehen soll (unter Benutzung von Satz 3.24 im Skript). Vergleichen Sie inbesondere die Investments in das erste Wertpapier in der ersten Periode.

Aufgabe 20 Eine Chooser-Option gibt dem Käufer das Recht, zu einem vorher festgelegten Zeitpunkt $t_0 \in \{1, 2, \dots, T-1\}$ zwischen einer Call- und einer Put-Option mit Fälligkeit T und Ausübungspreis K auf dasselbe Underlying S^1 zu wählen. Wir nehemn an, dass Underlying, Call und Put zum Zeitpunkt t_0 gehandelt werden und der Käufer sich für diejenige der beiden Optionen entscheidet, die zum Zeitpunkt t_0 den höheren Preis hat.

(i) Geben Sie das Auszahlungsprofil der Chooser-Option an.

(ii) Wir betrachten nun ein arbitragefreies Modell mit risikolosem Wertpapier $S_t^0 = (1+r)^t$, $t = 0, 1, \dots, T$, in dem die Preise der Call- und Put-Option bereits bekannt sind. Zeigen Sie, dass für den Startpreis $\pi(\text{chooser})$ der Chooser-Option gilt

$$\pi(\text{chooser}) = \pi(\text{call}) + \pi(\widetilde{\text{put}})$$

Dabei bezeichne $\pi(\text{call})$ den Startpreis eines Calls auf S^1 mit Fälligkeit T und Ausübungspreis K und $\pi(\widetilde{\text{put}})$ bezeichne den Startpreis eines Puts auf S^1 mit Fälligkeit t_0 und Ausübungspreis $K(1+r)^{t_0-T}$.

Allgemeiner Hinweis: Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte. Mit dem Zusatz in Aufgabe 19 können 2 Zusatzpunkte erworben werden.