Jun. Prof. Dr. Christoph Kühn SoSe 2007

Übung zur *Einführung in die Stochastische Finanzmathematik*
Blatt 5

Abgabe Mittwoch, 4.7.2007 vor der Vorlesung

Aufgabe 16 Sei Y eine standard-normalverteilte Zufallsvariable, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Berechnen Sie die Dichte und die ersten beiden Momente der Zufallsvariablen $X := e^{\sigma Y + \mu}$. Die Verteilung von X heißt *Log-Normalverteilung* mit Parametern μ und σ.

Aufgabe 17 Im Markt $(S_t^0, S_t^1)_{t=0,1}$ seien $S_0^0 = S_1^0 = S_0^1 = 1$ und $\log(S_1^1)$ normalverteilt. Ferner sei S^2 der Preisprozess einer europäischen Call-Option auf S^1 mit Strike $K > 0$ und Fälligkeitszeitpunkt 1, d.h. $S_1^2 = (S_1^1 - K)^+$. Zeigen Sie, dass jeder Preis S_0^2 im Intervall $((1-K)^+, 1)$ zu einem arbitragefreien Preis führt. Sind auch $S_0^2 = (1-K)^+$ und $S_0^2 = 1$ arbitragefrei ?

(vgl. die Aussage mit Aufgabe 9)

Aufgabe 18 Man beweise oder widerlege die folgende Aussage. In einem arbitragefreien Marktmodell $(S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d)_{t=0,1,\ldots,T}$ mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ (Startpreise sind deterministisch) ist jeder Claim der Form

$$H = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{d} \beta_t^i S_t^i,$$

mit vorhersehbaren Prozessen $(\beta_t^i)_{t=1,\ldots,T}$, $i = 1, \ldots, d$, replizierbar.

Bitte wenden

Aufgabe 19 Eine Chooser-Option gibt dem Käufer das Recht, zu einem vorher festgelegten Zeitpunkt $t_0 \in \{1, 2, \ldots, T-1\}$ zwischen einer Call- und einer Put-Option mit Fälligkeit T und Ausübungspreis K auf dasselbe Underlying S^1 zu wählen. Wir nehemn an, dass Underlying, Call und Put zum Zeitpunkt t_0 gehandelt werden und der Käufer sich für diejenige der beiden Optionen entscheidet, die zum Zeitpunkt t_0 den höheren Preis hat.

(i) Geben Sie das Auszahlungsprofil der Chooser-Option an.

(ii) Wir betrachten nun ein arbitragefreies Modell mit risikolosem Wertpapier $S_t^0 = (1+r)^t$, $t = 0, 1, \ldots, T$, in dem die Preise der Call- und Put-Option bereits bekannt sind. Zeigen Sie, dass für den Startpreis $\pi(\text{chooser})$ der Chooser-Option gilt

$$\pi(\text{chooser}) = \pi(\text{call}) + \pi(\widetilde{\text{put}})$$

Dabei bezeichne $\pi(\text{call})$ den Startpreis eines Calls auf S^1 mit Fälligkeit T und Ausübungspreis K und $\pi(\widetilde{\text{put}})$ bezeichne den Startpreis eines Puts auf S^1 mit Fälligkeit t_0 und Ausübungspreis $K(1+r)^{t_0-T}$.