Christoph Kühn WS 2008/09

Übung zur *Einführung in die Stochastische Finanzmathematik*
Blatt 4

Abgabe Mittwoch, 17.12.2008 vor der Vorlesung

Aufgabe 13 Betrachte eine zweidimensionale Verallgemeinerung des Cox-Ross-Rubinstein Modells. Sei dazu $S_t^0 = (1+r)^t$, $r > -1$, $S_t^1 = \prod_{i=1}^t A_i$ und $S_t^2 = \prod_{i=1}^t \widetilde{A}_i$, wobei $A_1, \ldots, A_T, \widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_T$ unabhängig und identisch verteilt sind mit $P(A_i = u) = P(\widetilde{A}_i = u) = p$ und $P(A_i = d) = P(\widetilde{A}_i = d) = 1-p$, $0 < d < 1+r < u$ und $p \in (0,1)$. Die Filtration ist gegeben durch $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_t = \sigma(A_1, \widetilde{A}_1, \ldots, A_t, \widetilde{A}_t)$, $t > 0$.

Ist das Marktmodell vollständig ? Beweisen oder widerlegen Sie dazu sowohl die Replizierbarkeit aller Claims als auch die Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes (natürlich ohne die Äquivalenz der beiden Aussagen zu benutzen).

Aufgabe 14 Im Cox-Ross-Rubinstein Modell (Skript, Beispiel 2.8) betrachten wir eine *asiatische* Option mit einer Auszahlung der Form

$$H = h(S_T^1, \bar{S}^1) \quad \text{mit} \quad \bar{S}^1 := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T S_t^1$$

für eine Funktion $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie: Der Wertprozess der replizierenden Strategie ist von der Form $V_t = v_t(S_t^1, \sum_{u=1}^t S_u^1)$ für Funktionen $v_t : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Bitte wenden

Aufgabe 15 Man betrachte das folgende multiplikative *Trinomialmodell*: S^0 sei konstant 1, und die Analge S^1 sei gegeben durch $S^1_0 = 1$ und

$$S^1_t = \prod_{j=1}^{t} A_j, \quad t = 1, \ldots, T,$$

wobei die Inkremente A_j unter P unabhängig und identisch verteilt sind mit $P(A_1 = u) = p_u$, $P(A_1 = 1) = p_1$, $P(A_1 = d) = p_d$, wobei $0 < p_u, p_1, p_d < 1$, $p_u + p_1 + p_d = 1$, $0 < d < 1 < u$ und $ud = 1$. Die Filtration sei wie üblich von S^1 erzeugt.

(a) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße Q für (S^0, S^1) bei Numeraire S^0 durch Angabe der Übergangswahrscheinlichkeiten $Q(A_{t+1} = x|\mathcal{F}_t)$, $x \in \{d, 1, u\}$. Geben Sie die äquivalenten Martingalmaße an, unter denen die A_j wieder i.i.d. sind.

(b) Bestimmen Sie für $T = 2$ ein Wahrscheinlichkeitmaß Q, das wieder äquivalentes Martingalmaß für (S^0, S^1) bei Numeraire S^0 ist, unter dem die A_j aber nicht mehr unabhängig sind. Wieso kann diese Situation nicht auftreten, wenn man $p_1 = 0$ setzt (Binomialmodell) ?

Aufgabe 16 Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eine strikt wachsende Nutzenfunktion mit $u(v_0) > -\infty$ für das Startkapital $v_0 \in \mathbb{R}$ einer Investorin. Zeigen Sie, dass in einem Markt, der nicht arbitragefrei ist, das Supremum

$$\sup_{\varphi \text{ vorhersehbar}} E_P(u(v_0 + \varphi \bullet S_T))$$

nicht angenommen wird.

Gilt bei Existenz einer Arbitragemöglichkeit und $u(v_0) > -\infty$ stets

$$\sup_{\varphi \text{ vorhersehbar}} E_P(u(v_0 + \varphi \bullet S_T)) \stackrel{?}{=} \sup_{v \in \mathbb{R}} u(v)$$

(Beweis oder Gegenbeispiel)

Allgemeiner Hinweis: Wenn nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte.