Jun. Prof. Dr. Christoph Kühn SoSe 2007

Übung zur *Einführung in die Stochastische Finanzmathematik*

Blatt 4

Abgabe Mittwoch, 20.6.2007 vor der Vorlesung

Aufgabe 13 Im Cox-Ross-Rubinstein Modell (Skript, Beispiel 2.8) betrachten wir eine *asiatische* Option mit einer Auszahlung der Form

$$H = h(S_T^1, \bar{S}^1) \quad \text{mit} \quad \bar{S}^1 := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} S_t^1$$

für eine Funktion $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie: Der Wertprozess der replizierenden Strategie ist von der Form $V_t = v_t(S_t^1, \sum_{u=1}^{t} S_u^1)$ für Funktionen $v_t : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 14 Betrachte eine zweidimensionale Verallgemeinerung des Cox-Ross-Rubinstein Modells. Sei dazu $S_t^0 = (1+r)^t$, $r > -1$, $S_t^1 = \prod_{i=1}^{t} A_i$ und $S_t^2 = \prod_{i=1}^{t} \widetilde{A}_i$, wobei $A_1, \ldots, A_T, \widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_T$ unabhängig und identisch verteilt sind mit $P(A_i = u) = P(\widetilde{A}_i = u) = p$ und $P(A_i = d) = P(\widetilde{A}_i = d) = 1 - p$, $0 < d < 1 + r < u$ und $p \in (0,1)$. Die Filtration ist gegeben durch $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_t = \sigma(A_1, \widetilde{A}_1, \ldots, A_t, \widetilde{A}_t)$, $t > 0$.

Ist das Marktmodell vollständig ? Beweisen oder widerlegen Sie dazu sowohl die Replizierbarkeit aller Claims als auch die Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes (natürlich ohne die Äquivalenz der beiden Aussagen zu benutzen).

Bitte wenden

Aufgabe 15 Programmieraufgabe

Wir betrachten wieder das Cox-Ross-Rubinstein-Modell aus Beispiel 2.8.
Schreibe in einer höheren Programmiersprache ein Programm, welches für frei wählbare Parameter r, u, d, S_0^1, T europäische Optionen konsistent bewertet. Das Programm soll jede Option der Form $H = h(S_T^1)$ (also insbesondere europäische Call- und Putoptionen mit beliebigen Ausübungskursen) konsistent in 0 bewerten. Abzugeben sind ein wohlstrukturiertes und -dokumentiertes Programmlisting und die Resultate für die folgenden Beispiele:

1. Sei $r = 0.05, u = 1.2, d = 0.9, T = 10$ und $S_0^1 = 100$. Bewerte folgende Optionen konsistent in 0:
   (a) *europäischer Call* $H = (S_T^1 - K)^+$ mit Ausübungskurs $K = 120$,
   (b) *europäischer Put* $H = (K - S_T^1)^+$ mit Ausübungskurs $K = 120$,
   (c) *Bull-Spread* $H = (S_T^1 - K_d)^+ - (S_T^1 - K_u)^+$ mit unterem Ausübungskurs $K_d = 120$ und oberem Ausübungskurs $K_u = 160$,
   (d) *Digital* $H = XI_{\{S_T^1 > B\}}$ zum Betrag $X = 100$ mit Auslösebedingung $S_T^1 > B$ zur Schranke $B = 60$,
2. Betrachte für r, u, d, S_0^1 und T wie in 1.) den konsistenten Wert in 0 einer europäischen Call-Option $H = (S_T^1 - K)^+$ als Funktion des Ausübungskurses K und plotte den Graphen dieser Funktion. Wie sieht der Graph für $T = 1$ aus?
3. Bewerte den europäischen Call aus 1.) konsistent in 0 für $r = 0.15$ bei ansonsten gleichen Parametern. Versuche das Ergebnis zu erklären.

Bemerkung. Für Aufgabe 15 gibt es die doppelte Punktzahl.