Christoph Kühn WS 2008/09

Übung zur *Einführung in die Stochastische Finanzmathematik*
Blatt 3

Abgabe Mittwoch, 3.12.2008 vor der Vorlesung

Aufgabe 9 Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ heißt **Gewinnmöglichkeit ohne Unsicherheit**, wenn $P(\varphi \bullet S_T = a) = 1$ für ein $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Für einen endlichen Grundraum Ω ist ein *signiertes* Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge von Ω ein Maß Q mit $\sum_{\omega\in\Omega} Q(\{\omega\}) = 1$, dessen ,,Wahrscheinlichkeiten" negativ oder größer 1 sein können. Q ist absolutstetig zu P, wenn für alle $\omega \in \Omega$ die Implikation $P(\{\omega\}) = 0 \Rightarrow Q(\{\omega\}) = 0$ gilt.

Beweisen Sie (für den Fall Ω endlich) folgende Abwandlung des 1. Fundamentalsatzes der Arbitragetheorie (vgl. Satz 1.15 im Skript):

In einem Marktmodell gibt es genau dann keine ,,Gewinnmöglichkeit ohne Unsicherheit", wenn ein signiertes Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, das absolutstetig zu P ist und unter dem alle diskontierten Wertpapierpreisprozesse Martingale sind.

Aufgabe 10 Im Markt (S^0, S^1) mit Endzeitpunkt 1 seien $S^0_0 = S^0_1 = S^1_0 = 1$ und

$$S^1_1(\omega) = \begin{cases} x_1 : \text{falls } \omega = \omega_1 \\ x_2 : \text{falls } \omega = \omega_2 \\ x_3 : \text{falls } \omega = \omega_3 \end{cases}$$

mit $p_1 := P(\{\omega_1\}) > 0$, $p_2 := P(\{\omega_2\}) > 0$, $p_3 := P(\{\omega_3\}) = 1 - p_1 - p_2 > 0$ und $x_1 < x_2 < x_3$. Unter welchen Bedingungen an $x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$ ist der Markt

(i) arbitragefrei ?

(ii) arbitragefrei und vollständig ?

Seien die Parameter so gewählt, dass der Markt (S^0, S^1) arbitragefrei ist. Sei S^2 der Preisprozess einer Call-Option mit Strike $K \in (x_1, x_2)$, d.h. $S^2_1 = (S^1_1 - K)^+$. Bestimme die Menge der arbitragefreien Preise S^2_0 des Calls.

Bitte wenden

Aufgabe 11 Sei $(S_t^0, S_t^1)_{t=0,\dots,T}$ ein Markt mit positivem (risikolosen) Zins, d.h. $S_t^0 = (1+r)^t$, $t = 0, 1, \dots, T$, $r > 0$ und $S^1 \geq 0$. C sei der Preisprozess einer europäischen Call-Option auf das "risikobehaftete" Wertpapier S^1 mit Strike $K \geq 0$, d.h. $C_T = (S_T^1 - K)^+$.

Zeige: Wenn der erweiterte Markt $(S_t^0, S_t^1, C_t)_{t=0,1,\dots,T}$ arbitragefrei ist, dann gelten für C die trivialen Arbitragegrenzen $\left(S_t^1 - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}\right)^+ \leq C_t \leq S_t^1$ für alle $t = 0, ..., T$.

Führe in obigem Markt zusätzlich einen Call $\widetilde{C}$ mit gleichem Strike K aber früherer Fälligkeit $\widetilde{T} \in \{1, \dots, T-1\}$ ein, d.h. $\widetilde{C}_{\widetilde{T}} = (S_{\widetilde{T}}^1 - K)^+$ und das Wertpapier $\widetilde{C}$ muss in $\widetilde{T}$ liquidiert werden. Welcher der Calls ist für $t \leq \widetilde{T}$ in einem arbitragefreien Markt teurer ? (mit Beweis)

Aufgabe 12 Sei P zusätzlich zum Markt $(S_t^0, S_t^1, C_t)_{t=0,1,\dots,T}$ aus Aufgabe 11 eine Put-Option auf S^1 mit gleichem Strike K und Fälligkeit T, d.h. $P_T = (K - S_t^1)^+$. Zeige: Wenn der Markt $(S_t^0, S_t^1, C_t, P_t)_{t=0,1,\dots,T}$ arbitragefrei ist, dann gilt die sog. **Put-Call-Parität**

$$S_t^1 + P_t = C_t + \frac{K}{(1+r)^{T-t}} \quad \text{für alle } t = 0, ..., T.$$

Führe in obigem Markt zusätzlich einen Call $\widetilde{C}$ mit gleicher Fälligkeit T und Strike $\widetilde{K} \geq K$ ein, d.h. $\widetilde{C}_T = (S_T^1 - \widetilde{K})^+$. Zeigen Sie, dass in einem arbitragefreien Markt gilt

$$0 \leq C_t - \widetilde{C}_t \leq \frac{1}{(1+r)^{T-t}}(\widetilde{K} - K), \quad \forall t = 0, ..., T.$$

Allgemeiner Hinweis: Wenn nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte.