Jun. Prof. Dr. Christoph Kühn SoSe 2007

# Übung zur *Einführung in die Stochastische Finanzmathematik*
## Blatt 3

Abgabe Mittwoch, 6.6.2007 vor der Vorlesung

**Aufgabe 9** Sei $S = (S_t^0, S_t^1)_{t=0,\ldots,T}$ ein Markt mit positivem (risikolosen) Zins, d.h. $S_t^0 = (1+r)^t$, $t = 0, 1, \ldots, T$, $r > 0$ und $S^1 \geq 0$. $C$ sei der Preisprozess einer europäischen Call-Option auf das "risikobehaftete" Wertpapier $S^1$ mit Strike $K \geq 0$, d.h. $C_T = (S_T^1 - K)^+$.

Zeige: Wenn der erweiterte Markt $S = (S_t^0, S_t^1, C_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ arbitragefrei ist, dann gelten für $C$ die trivialen Arbitragegrenzen $\left(S_t^1 - \frac{K}{(1+r)^{T-t}}\right)^+ \leq C_t \leq S_t^1$ für alle $t = 0, ..., T$.

Führe in obigem Markt zusätzlich einen Call $\widetilde{C}$ mit gleichem Strike $K$ aber früherer Fälligkeit $\widetilde{T} \in \{1, \ldots, T-1\}$ ein, d.h. $\widetilde{C}_{\widetilde{T}} = (S_{\widetilde{T}}^1 - K)^+$ und das Wertpapier $\widetilde{C}$ muss in $\widetilde{T}$ liquidiert werden. Welcher der Calls ist für $t \leq \widetilde{T}$ in einem arbitragefreien Markt teurer ? (mit Beweis) **Achtung: dieser Aufgabenteil wurde korrigiert.**

**Aufgabe 10** Sei $P$ zusätzlich zum Markt $(S_t^0, S_t^1, C_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ aus Aufgabe 9 eine Put-Option auf $S^1$ mit gleichem Strike $K$ und Fälligkeit $T$, d.h. $P_T = (K - S_t^1)^+$. Zeige: Wenn der Markt $S = (S_t^0, S_t^1, C, P)$ arbitragefrei ist, dann gilt

$$S_t^1 + P_t = C_t + \frac{K}{(1+r)^{T-t}} \quad \text{für alle } t = 0, ..., T.$$

Führe in obigem Markt zusätzlich einen Call $\widetilde{C}$ mit gleicher Fälligkeit $T$ und Strike $\widetilde{K} \geq K$ ein, d.h. $\widetilde{C}_T = (S_T^1 - \widetilde{K})^+$. Zeigen Sie, dass in einem arbitragefreien Markt gilt

$$0 \leq C_t - \widetilde{C}_t \leq \frac{1}{(1+r)^{T-t}}(\widetilde{K} - K), \quad \forall t = 0, ..., T.$$

**Bitte wenden**

**Aufgabe 11** Entscheiden Sie, ob die folgenden Einperiodenmodelle arbitragefrei sind. Dabei sei die Filtration die von $S$ erzeugte.

(a) $(S_t^0, S_t^1, S_t^2)_{t=0,1}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $P(\{\omega_1\}) > 0$, $P(\{\omega_2\}) > 0$:
$(S_0^0, S_0^1, S_0^2) = (1, 1, 1)$
$(S_1^0, S_1^1, S_1^2)(\omega_1) = (1, 4, 2)$
$(S_1^0, S_1^1, S_1^2)(\omega_2) = (1, 2, 4)$

(b) $(S_t^0, S_t^1)_{t=0,1}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $P(\{\omega_1\}) > 0$, $P(\{\omega_2\}) > 0$:
$(S_0^0, S_0^1) = (1, 1)$
$(S_1^0, S_1^1)(\omega_1) = (4, 2)$
$(S_1^0, S_1^1)(\omega_2) = (2, 4)$

**Aufgabe 12** *Trinomialmodell* Betrachte das folgende multiplikative Modell: $S^0$ sei konstant 1, und die Analge $S^1$ sei gegeben durch $S_0^1 = 1$ und

$$S_t^1 = \prod_{j=1}^{t} A_j, \quad t = 1, \dots, T,$$

wobei die Inkremente $A_j$, $j = 1, \dots, T$, unter $P$ unabhängig und identisch verteilt sind mit $P(A_1 = u) = p_u$, $P(A_1 = m) = p_m$, $P(A_1 = d) = p_d$, wobei $0 < p_u, p_m, p_d < 1$, $p_u + p_m + p_d = 1$, $0 < d < m < u$ und $ud = m$ sowie $d < 1 < u$. Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ die von $(S^0, S^1)$ erzeugte Filtration.

(a) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße $Q$ für $S$ bei Numeraire $S^0$ durch Angabe der Übergangswahrscheinlichkeiten $Q(A_{t+1} = x|\mathcal{F}_t)$, $x \in \{d, m, u\}$.

(b) Bestimmen Sie für $T = 2$ ein Wahrscheinlichkeitmaß $Q$, das wieder äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß für $S$ bei Numeraire $S^0$ ist, unter dem die $A_j$ aber nicht mehr unabhängig sind. Wieso kann diese Situation nicht auftreten, wenn wir $p_m = 0$ setzen (Binomialmodell) ?

(c) Für welche $K \in \mathbb{R}_+$ ist die Call-Option mit Auszahlung $(S_T^1 - K)^+$ im Fall $T = 1$ mit den Basiswertpapieren $(S^0, S^1)$ replizierbar ?