Christoph Kühn WS 2008/09

Übung zur *Einführung in die Stochastische Finanzmathematik*

Blatt 2

Abgabe Mittwoch, 19.11.2008 vor der Vorlesung

Aufgabe 5 Entscheiden Sie, ob die folgenden Einperiodenmodelle arbitragefrei sind (Geben Sie eine Arbitragestrategie an oder beweisen Sie Arbitragefreiheit). Dabei sei die Filtration die von S erzeugte.

(a) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $P(\{\omega_1\}) > 0$, $P(\{\omega_2\}) > 0$, $S = (S_t^0, S_t^1, S_t^2)_{t=0,1}$:
$(S_0^0, S_0^1, S_0^2) = (1,1,1)$
$(S_1^0, S_1^1, S_1^2)(\omega_1) = (1,4,2)$
$(S_1^0, S_1^1, S_1^2)(\omega_2) = (1,2,4)$

(b) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $P(\{\omega_1\}) > 0$, $P(\{\omega_2\}) > 0$, $S = (S_t^0, S_t^1)_{t=0,1}$:
$(S_0^0, S_0^1) = (1,1)$
$(S_1^0, S_1^1)(\omega_1) = (4,2)$
$(S_1^0, S_1^1)(\omega_2) = (2,4)$

Aufgabe 6 Wir betrachten auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\Omega = \{1,2,\ldots\}$ und $\mathcal{F} = 2^\Omega$ folgendes Einperiodenmodell. Es existiert eine risikolose Anlage mit $S^0 = 1$ und unendlich viele riskante Wertpapiere mit Preisen

$$S_1^i(\omega) := \omega 1_{\{1,2,\ldots,i\}}(\omega) \quad \text{und} \quad S_0^i := E_P(S_1^i), \quad i = 1,2,\ldots.$$

(i) Zeigen Sie, dass P das *einzige* Martingalmaß in diesem Modell ist, d.h. das einzige Maß auf $\mathcal{F}$ unter dem für alle $i \in \mathbb{N}$ S_0^i der Erwartungswert von S_1^i ist.

(ii) Betrachten Sie nun das gleiche Marktmodell nur ohne die Existenz des Wertpapiers S^1. Bestimmen Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße in diesem Modell.

Bitte wenden

Aufgabe 7 Seien $Y_1, \ldots, Y_T$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E_P(Y_1) = 0$ und $P(Y_1 \neq 0) > 0$. Wir betrachten die von Y erzeugte Filtration $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_t := \sigma(Y_1, \ldots, Y_t), t = 1, \ldots, T$ und setzen $S_t := \sum_{i=1}^t Y_i$.

(i) Zeigen Sie, dass S ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\ldots,T}$ ist, aber kein Martingal bzgl. der vergrößerten Filtration $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t=0,\ldots,T}$ mit $\widetilde{\mathcal{F}}_t := \sigma(\mathcal{F}_t, S_T)$. Dafür ist

$\widetilde{S}_t := S_t - \sum_{i=0}^{t-1} \frac{S_T - S_i}{T-i}, \quad t = 0, \ldots, T$ ein $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t=0,\ldots,T}$-Martingal.

(ii) Bestimme Sie die bzgl. $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t=0,\ldots,T}$-vorhersehbare, dem Betrag nach durch 1 beschränkte Strategie φ mit maximalem erwarteten Gewinn $E_P(\sum_{t=1}^T \varphi_t(S_t - S_{t-1}))$.

Bemerkung: Eine vergrößerte Filtration wie $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t=0,\ldots,T}$ kann benutzt werden, um die Information eines sogennantes Insiders zu modellieren, der mehr über die zukünftige Entwicklung des Aktienpreises S weiß als die übrigen Marktteilnehmer.

Aufgabe 8 Ein zeitdiskretes Finanzmarktmodell mit endlichem Zeithorizont ist genau dann arbitragefrei, wenn es keine Einperiodenarbitrage gibt (siehe Proposition 1.18 im Skript). Bei einer Einperiodenarbitrage handelt man nur in einer einzigen Periode. Kann man bei dieser Aussage die Zeit t durch den Index i des Wertpapiers ersetzen, d.h. gilt folgende Aussage

$$\begin{aligned} &\text{Der Markt } (S^0, S^1, \ldots, S^d) \text{ erlaubt Arbitrage} \\ &\overset{?}{\Leftrightarrow} \exists i \in \{1, \ldots, d\}, \text{ so dass der Markt } (S^0, S^i) \text{ Arbitrage erlaubt} \end{aligned}$$

Übertragen Sie den Beweis von Proposition 1.18 auf den Beweis dieser Aussage oder zeigen Sie, welches Argument sich nicht übertragen lässt. Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Allgemeiner Hinweis: Wenn nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte.