**Übung zur *Einführung in die Stochastische
Finanzmathematik***
Blatt 2

Abgabe Mittwoch, 23.05.2007 vor der Vorlesung

Aufgabe 5 (Doobscher Stoppsatz) Zeigen Sie, dass für jedes Martingal M und alle $\{0, 1, \dots, T\}$ -wertigen Stoppzeiten $\tau \leq \sigma$ gilt

$$E(M_\sigma | \mathcal{F}_\tau) = M_\tau,$$

wobei $\mathcal{F}_\tau$ die τ -Vergangenheit ist, wie in Aufgabe 2 definiert.

Hinweis: Man zeige zunächst, dass für jede reellwertige, integrierbare Zufallsvariable X und jede Stoppzeit τ gilt

$$E(X | \mathcal{F}_\tau) = \sum_{j=0}^T \mathbf{1}_{\{\tau=j\}} E(X | \mathcal{F}_j).$$

Aufgabe 6 Zeigen Sie, dass ein an $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots,T}$ adaptierter Prozess $X = (X_t)_{t=0,\dots,T}$ genau dann ein $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots,T}$ -Martingal ist, wenn für alle $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots,T}$ -Stoppzeiten $\tau \leq T$ gilt, dass $E(|X_\tau|) < \infty$ und $E(X_\tau) = X_0$.

Hinweis: Bei der Martingaleigenschaft ist zu zeigen, dass $E(1_A(X_t - X_s)) = 0$ für alle $s \leq t$ und $A \in \mathcal{F}_s$.

Aufgabe 7 Wir betrachten auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ und $\mathcal{F} = 2^\Omega$ folgendes Einperiodenmodell. Es existiert eine risikolose Anlage mit $S^0 = 1$ und unendlich viele riskante Wertpapiere mit Preisen

$$S_1^i(\omega) := \omega \mathbf{1}_{\{1,2,\dots,i\}}(\omega) \quad \text{und} \quad S_0^i := E_P(S_1^i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Man zeige, dass P das *einzige* Martingalmaß in diesem Modell ist.

Bitte wenden

Aufgabe 8 Seien $Y_1, \dots, Y_T$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E_P(Y_1) = 0$ und $P(Y_1 \neq 0) > 0$. Wir betrachten die von Y erzeugte Filtration $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_t := \sigma(Y_1, \dots, Y_t), t = 1, \dots, T$ und setzen $S_t := \sum_{i=1}^t Y_i$.

(i) Zeigen Sie, dass S ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t=0, \dots, T}$ ist, aber kein Martingal bzgl. der vergrößerten Filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t=0, \dots, T}$ mit $\tilde{\mathcal{F}}_t := \sigma(\mathcal{F}_t, S_T)$. Dafür ist

$\tilde{S}_t := S_t - \sum_{i=0}^{t-1} \frac{S_T - S_i}{T-i}, \quad t = 0, \dots, T$ ein $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t=0, \dots, T}$ -Martingal.

(ii) Bestimmen Sie die bzgl. $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t=0, \dots, T}$ -vorhersehbare, dem Betrag nach durch 1 beschränkte Strategie φ mit maximalem erwarteten Gewinn $E_P(\sum_{t=1}^T \varphi_t(S_t - S_{t-1}))$.

Bemerkung: Eine vergrößerte Filtration wie $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t=0, \dots, T}$ wird häufig benutzt, um die Information eines sogenannten Insiders zu modellieren, der mehr über die zukünftige Entwicklung des Aktienpreises S weiß als die übrigen Marktteilnehmer.

Aktueller Hinweis: Die Vorlesung muss am 27.6. leider ausfallen. Ersatztermin ist Dienstag, 22.5. um 14 c.t. (in Raum 711 klein).