Christoph Kühn WS 2008/09

Übung zur *Einführung in die Stochastische Finanzmathematik*
Blatt 1

Abgabe Mittwoch, 5.11.2008 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Sei τ eine $\{0,\dots,T\}$-wertige Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots,T}$. Das Mengensystem

$$\{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t \ \ \forall t \in \{0,\dots,T\}\}.$$

nennt man die ,,σ-Algebra der τ-Vergangenheit" und bezeichnet es mit $\mathcal{F}_\tau$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_\tau$ tatsächlich eine σ-Algebra ist und für deterministische Stoppzeiten $\tau = t_0$ mit $\mathcal{F}_{t_0}$ übereinstimmt.
(b) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable τ $\mathcal{F}_\tau$-messbar ist.
(c) Sei κ eine weitere $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots,T}$-Stoppzeit mit Werten in $\{0,\dots,T\}$ und $\kappa \geq \tau$. Zeige: $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\kappa$.
(d) Kurze Erklärung: Warum heisst $\mathcal{F}_\tau$,,σ-Algebra der τ-Vergangenheit" ?

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass ein adaptierter Prozess $X = (X_t)_{t=0,\dots,T}$ mit $E(|X_t|) < \infty$, $t = 0,1,\dots,T$, genau dann ein Martingal ist, wenn für alle $\{0,1,\dots,T\}$-wertigen Stoppzeiten gilt, dass $E(X_\tau) = X_0$.
Hinweis: Ein integrierbarer Prozess X ist nach Definition ein Martingal, wenn $E((X_t - X_s)1_A) = 0$ für alle $0 \leq s \leq t \leq T$ und $A \in \mathcal{F}_s$.

Bitte wenden

Aufgabe 3 Sei $X = (X_t)_{t=0,\dots,T}$ ein adaptierter Prozess und τ eine $\{0, 1, \dots, T\}$-wertige Stoppzeit.

(a) Zeigen Sie, dass auch der bei τ abgestoppte Prozess X^τ adaptiert ist. $X_t^\tau := X_{t\wedge\tau}$.

(b) Sei $A = (A_t)_{t=0,\dots,T}$ ein vorhersehbarer Prozess. Zeigen Sie, dass auch der bei τ abgestoppte Prozess A^τ vorhersehbar ist.

(c) Sei $M = (M_t)_{t=0,\dots,T}$ ein Martingal. Zeigen Sie, dass auch der bei τ abgestoppte Prozess M^τ ein Martingal ist.

(d) Welche der folgenden Prozesse $\xi = (\xi_t)_{t=1,\dots,T}$ sind vorhersehbar bzw. i.A. nicht vorhersehbar ? (kurze Begründung)

(i) $\xi_t = 1_{\{X_t > X_{t-1}\}}$

(ii) $\xi_t = 1_{\{t \le \tau\}}$

(iii) $\xi_t = 1_{\{t=\tau\}} X_{t-1}$

Aufgabe 4 Sei $X = (X_t)_{t=0,1,\dots,T}$ ein adaptierter Prozess mit $E(|X_t|) < \infty$, $t = 0, 1, \dots, T$. Gesucht ist eine *maximale Stoppzeit* τ, so dass der bei τ abgestoppte Prozess X^τ ein Martingal ist. Maximal bedeutet, dass für jede andere Stoppzeit $\tilde{\tau}$, für die $X^{\tilde{\tau}}$ ein Martingal ist, gilt $P(\tilde{\tau} \le \tau) = 1$. Konstruieren Sie mit der Doob-Zerlegung von X (siehe Satz 1.5 im Skript) eine maximale Stoppzeit und beweisen Sie, dass sie tatsächlich maximal ist.

Hinweis: Man benutze u.a. (b) und (c) aus Aufgabe 3.

Allgemeiner Hinweis: Wenn nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte.

Aktueller Hinweis zum Tutorium: Das Tutorium findet im Raum 308 statt, erstmals am Freitag, den 24.10. um 12 c.t.