Übungen zur Vorlesung
„STOCHASTIC PROCESSES Concepts and Applications"

http://ismi.math.uni-frankfurt.de/dinges/teaching/

Datum: 20.06.03

Abgabe Di, 01.07.03 in der Vorlesung

Aufgabe 22 :

$\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ seien äquivalente Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$

$$d\mathbb{Q} = g \cdot d\mathbb{P} \qquad d\mathbb{P} = \frac{1}{g} d\mathbb{Q} \ .$$

$\{\mathfrak{A}_n \ : n \in \mathbb{Z}_+\}$ sei eine Filtrierung und

$$g_n = \mathcal{E}^{\mathbb{P}}(g|\mathfrak{A}_n) \ .$$

Sei $\{f_n \ : n \in \mathbb{Z}_+\}$ ein adaptierter Prozeß.
Zeigen Sie:
Genau dann ist $\{f_n \ : n \in \mathbb{Z}_+\}$ ein Martingal auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, wenn

$$h_n = \frac{f_n}{g_n}$$

ein Martingal auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{Q})$ liefert.

Aufgabe 23 :

$\{B_t \ : t \in [0,1]\}$ sei eine Standard Brown'sche Bewegung. Den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $C([0,1], \mathfrak{B})$ nennen wir $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.
Für $\mu \in \mathbb{R}$ setze $g(\omega) = exp(\mu \cdot B_1 - \frac{1}{2}\mu^2)$.
Zeigen Sie, dass bzgl. $d\mathbb{Q} = g \cdot d\mathbb{P}$ der Prozess $\{B_t - \mu \cdot t \ \ : t \in [0,1]\}$ eine Standard-Brown'sche Bewegung ist.