

Übungen zur Vorlesung
„STOCHASTIC PROCESSES
Concepts and Applications“

<http://ismi.math.uni-frankfurt.de/dinges/teaching/>

Datum: 13.06.03

Abgabe Di, 24.06.03 in der Vorlesung

Aufgabe 19 :

Gegeben sei eine Wahrscheinlichkeitsgewichtung auf $\mathbb{N}$ mit endlichem Erwartungswert. Wir nennen $\{p(z) : z \in \mathbb{N}\}$ hier eine Verteilung der Lebensdauer (“lifetime distribution”). Dazu betrachten wir die stochastische $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -Matrix $P(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned} P(1, z) &= p(z) & \text{für } z \in \mathbb{N} \\ P(x, x-1) &= 1 & \text{für } x = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Dazu sei

$$(\dots, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \dots)$$

die Markov-Kette im stationären Zustand. $(X_n)_n$ heißt auch der “residual lifetime”-Prozess.

Der zeitinvertierte Prozess heißt der Alterungsprozess (im stationären Zustand) “stationary age”-Prozess.

- a) Was ist die stationäre Verteilung? (Man nennt sie die größenverzerrte Lebensdauer (size-biased lifetime))
 Drücken Sie die Gewichte $\text{Ws}(X_0 = x)$ und den Erwartungswert $\mathcal{E}X_0$ durch die Gewichte $p(\cdot)$ aus.
- b) Berechnen Sie die Übergangsmatrix $Q(\cdot, \cdot)$ für den zeitinvertierten stationären Prozess.
- c) Was halten Sie von der folgenden Aussage?

„Die stationäre Altersverteilung ist gleich der Verteilung der Restlebenszeit im stationären Zustand, aber nicht gleich der Verteilung der Lebensdauer“. (In manchen Fällen aber doch!)

Aufgabe 20 :

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ gegeben; Z sei Zufallsgröße mit $\mathcal{E}Z^2 < \infty$.
 Wir definieren die bedingte Varianz

$$\begin{aligned} \text{var}(Z|\mathfrak{A}') : &= \mathcal{E}(Z^2|\mathfrak{A}') - (\mathcal{E}(Z|\mathfrak{A}'))^2 \\ &= \mathcal{E}[Z - \mathcal{E}(Z|\mathfrak{A}')]^2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie

$$\text{var}Z = \mathcal{E}(\text{var}(Z|\mathfrak{A}')) + \text{var}(\mathcal{E}(Z|\mathfrak{A}'))$$

Aufgabe 21 :

$\{B_t : t \in \mathbb{R}_t\}$ sei eine Standard-Brown'sche Bewegung.

a) Für $s \in [0, 1]$ sei

$$X_s = B_s - s \cdot B_1 .$$

$\{X_s : s \in [0, 1]\}$ heißt eine Brown'sche Brücke zu den Endpunkten $(0, 0)$ und $(1, 0)$.

Berechnen Sie die Covarianzen

$$c(s, t) = \mathcal{E}(X_s \cdot X_t) \quad 0 \leq s, t \leq 1 .$$

b) Zeigen Sie: Für jedes Paar $(a', y'), (a'', y'')$ $a' < a''$ ist die bedingte Verteilung

$$Z(\{B_t : t \in [a', a'']\} | \{B(a') = y', B(a'') = y''\})$$

bis auf eine affine Transformation eine Brown'sche Brücke.

Hinweis : Betrachten Sie mit $\lambda = \frac{s-a'}{a''-a'}$ den Prozess

$$Y_s = B_s - [(1 - \lambda)B_{a'} - \lambda B_{a''}] \quad s \in [a', a''] .$$

Berechnen Sie für diesen gaußischen Prozess

$$\mathcal{E}Y_s \text{ und } \text{cov}(s, t), \quad s, t \in [a', a''] .$$