Übungen zur Vorlesung
„STOCHASTIC PROCESSES Concepts and Applications“

http://ismi.math.uni-frankfurt.de/dinges/teaching/

Datum: 06.06.03

Abgabe Di, 17.06.03 in der Vorlesung

Aufgabe 18 : (Ornstein-Uhlenbeck-Prozess)

Zuerst zur Erinnerung:
Seien $Y_0, Y_1, \ldots, Y_N$ reellwertige Zufallsgrößen mit der Covarianzmatrix C (C nichtsingulär). Es existieren dann Zahlen $\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1}$, sodass

$$L = Y_N - (\lambda_0 Y_0 + \ldots + \lambda_{N-1} Y_{N-1})$$

mit den Y_j $(j = 0, \ldots, N-1)$ unkorreliert ist.
Die Zeile λ ergibt sich als Lösung eines linearen Gleichungssystems.

a) Stellen Sie die Gleichung für λ auf.

b) Wenn $Y_0, \ldots, Y_N$ gemeinsam gaußisch verteilt sind, dann ist L normalverteilt. Die Verteilung von L ist also durch $\mathcal{E}L$ und $\mathrm{var}L$ eindeutig bestimmt. Berechnen Sie $\mathcal{E}L$ und $\mathrm{var}L$.

c) $\{B_s \ : s > 0\}$ sei eine Standard-Brown'sche Bewegung. (Wir schreiben auch $B(s)$ statt B_s).
Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$U_t = e^{-t/2} \cdot B(e^t) \ .$$

U_t ist ein stationärer gaußischer Prozess.
Zeigen Sie, dass $\{U_t \ : t \in \mathbb{R}\}$ ein Markov-Prozess ist.

d) Die bedingten Zuwächse sind normalverteilt

$$\mathcal{L}(U_{t+h} - U_t \big| \mathfrak{A}_t) = \mathcal{N}(\cdot, \cdot) \ .$$

$\{\mathfrak{A}_t; : t \in \mathbb{R}\}$ ist die natürliche Filtrierung, $\mathfrak{A}_t = \{U_s \ : s \leq t\}^\sigma$
Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der bedingten Verteilung.