Übungen zur Vorlesung
„STOCHASTIC PROCESSES Concepts and Applications“

http://ismi.math.uni-frankfurt.de/dinges/teaching/

Datum: 23.5.03

Abgabe Di, 3.6.03 in der Vorlesung

Aufgabe 13 : Zur Zeit 0 sind N Teilchen auf zwei Kammern verteilt. X_0 sei die (zufällige) Anzahl der Teilchen in der ersten Kammer, $(N - X_0)$ Teilchen befinden sich also in der zweiten.
In jedem Zeittakt wird ein rein zufällig ausgewähltes Teilchen in die entgegengesetzte Kammer transferiert. Wir erhalten einen Markov-Prozess: $X_0, X_1, X_2, \ldots$.
Berechnen Sie die stationäre Verteilung.
Hinweis : Eine interessante Art, das X_0 zu realisieren, ist die, dass man jedes Teilchen unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in eine der Kammern legt.

Aufgabe 14 : Wir konstruieren einen Markov-Prozess in kontinuierlicher Zeit mit dem Zustandsraum $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ wie folgt:
Die Pfade können nur um 1 nach oben oder um 1 nach unten springen. Die Sprungrate nach oben ist λ, die Sprungrate nach unten von x aus sei gleich μ.
(Man denke an eine Warteschlange bei einem Bearbeiter und konstanter Input Rate).
Zeigen Sie, dass die stationäre Gewichtung $\pi(x)$ geometrisch ist.
Hinweis :

$$\frac{1}{h}\big[\pi_{t+h}(x) - \pi_t(x)\big] \xrightarrow[h\to 0]{} -\pi_t(x) \cdot (\lambda + \mu) + \lambda \cdot \pi_t(x-1) + \mu \cdot \pi_t(x+1) \ .$$