Übungen zur Vorlesung „STOCHASTIC PROCESSES Concepts and Applications“

http://ismi.math.uni-frankfurt.de/dinges/teaching/

Datum: 9.5.03

Abgabe Di, 20.5.03 in der Vorlesung

Aufgabe 6 : Zwei faire Münzen werden unabhängig geworfen. Der erste Spieler bekommt einen Euro, wenn die erste Münze „Kopf“ zeigt, der zweite, wenn die zweite Münze „Kopf“ zeigt, der dritte, wenn beide Münzen dasselbe Ergebnis (beide „Kopf“ oder beide „Zahl“) zeigen.
Zeigen Sie: Die Auszahlungen X, Y, Z sind paarweise unkorreliert; sie sind aber nicht unabhängig.

Aufgabe 7 : (“How to gamble if you must”)
Ein in einer Zwangslage Steckender muss dringend aus seinem Kapital $X_0 = 3$ das Kapital $X_\tau = 8$ machen (sonst ist alles verloren). Er hat eine Glücksspielgelegenheit, wo der Einsatz mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} - \varepsilon$ verdoppelt wird und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} + \varepsilon$ verloren geht.
Mit welcher Strategie kann er die Wahrscheinlichkeit, auf das Kapital 8 zu gelangen, maximieren? Was sagen Sie zu der These “Bold gambling is optimal”? Ist es zwingend, in der ersten Runde das gesamte Kapital zu setzen?
Zeichnen Sie den Baum für mindestens zwei vernünftige Strategien.

Aufgabe 8 : (Zufällige Anzahl von Summanden)
$Y_1, Y_2, \ldots$ seien Zufallsgrößen mit

$$\mathcal{E}Y_j = m\,,\ \mathrm{var}Y_j = \sigma^2\,,\ \mathrm{cov}(Y_j, Y_k) = 0 \text{ für } j \neq k\ .$$

N sei eine davon unabhängige Zufallsgröße mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{E}N = n^\star < \infty$. Zeigen Sie für die zufällige Summe

$$\begin{aligned} S &:= \sum_{j=1}^{N} Y_j \\ \mathcal{E}S &= n^\star \cdot m \\ \mathrm{var}S &= n^\star \cdot \sigma^2 + m^2 \cdot \mathrm{var}N\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 9 : *(nur für Mathematiker)*
T sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. $\{\mathfrak{A}_t\ : t \in T\}$ sei eine Filtrierung. Eine Stoppzeit ist bekanntlich eine $T \cup \{+\infty\}$-wertige Zufallsgröße mit

$$\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{A}_t \text{ für alle } t \in T\ .$$

Sei nun die Filtrierung rechtsstetig, d.h.

$$\mathfrak{A}_t = \bigcap_{s>t} \mathfrak{A}_s \text{ für alle } t \in T\ .$$

Zeigen Sie :
Die $T \cup \{+\infty\}$-wertige Zufallsgröße σ ist genau dann eine Stoppzeit, wenn gilt

$$\{\sigma < t\} \in \mathfrak{A}_t \text{ für alle } t \in T\ .$$