Übungen zur Vorlesung
„STOCHASTIC PROCESSES Concepts and Applications"

http://ismi.math.uni-frankfurt.de/dinges/teaching/

Datum: 27.06.03

Abgabe Di, 08.07.03 in der Vorlesung

Aufgabe 24 : (Transformationen des Wiener-Prozesses)
Ein Standard-Wienerprozess $\{B(s) \ : s \in \mathbb{R}_+\}$ ist bekanntlich ein gaußischer Prozess mit

$$\mathcal{E}B_s = 0 \ , \quad \operatorname{cov}(B_s, B_t) = s \wedge t \ .$$

Die Verteilung $\mathcal{L}(\{B_s \ : s \in \mathbb{R}_+\})$ wollen wir hier als ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf dem Raum aller Funktionsgraphen betrachten. (Es geht um Funktionsgraphen stetiger Funktionen über $\mathbb{R}_+$, also um spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.)
Betrachte die Abbildung

$$\xi \ : (t,x) \mapsto \left(\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right) \ .$$

ξ macht aus den Pfaden von $B_{(\cdot)}$ Pfade eines neuen Prozesses $Y_{(\cdot)}$. $Y_{(\cdot)}$ nimmt zur Zeit $\frac{1}{t}$ den Wert $\frac{x}{t}$ an, genau dann, wenn $B_{(\cdot)}$ zur Zeit t den Wert x annimmt.

$$Y\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}B(t) \ , \quad Y(s) = s \cdot B\left(\frac{1}{s}\right) \ .$$

a) Zeigen Sie, dass $Y(\cdot)$ ein Standard-Wienerprozess ist.

b) In ähnlicher Weise konstruieren Sie aus $B(\cdot)$ eine zufällige Funktion $Z(\cdot)$ über dem Einheitsintervall

$$Z\left(\frac{s}{1+s}\right) = \frac{1}{1+s} \cdot B(s) \ .$$

Zeigen Sie, dass $Z(\cdot)$ eine Standard-Brown'sche Brücke ist.

$$\operatorname{cov}(Z_u, Z_v) = \min\{u \cdot (1-v), (1-u)v\} \text{ für } u, v \in [0,1] \ .$$

Aufgabe 25 : (Ornstein-Uhlenbeck-Prozess)
$\{B(s) \ : s \in \mathbb{R}_+\}$ sei eine Brown'sche Brücke und

$$U(t) = \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \cdot B(e^t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \ .$$

$\{U(t) \ : t \in \mathbb{R}\}$ ist der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess. Es handelt sich um einen gaußischen Markov-Prozess im stationären Zustand.
Die bedingte Verteilung

$$\mathcal{L}\big(U(t+h)|\mathfrak{A}_t\big)$$

ist eine Normalverteilung, deren Erwartungswert und Varianz von $U(t)$ abhängt.
Berechnen Sie

$$\mathcal{E}\big(U(t-h)|U(t)\big) \text{ und } \operatorname{var}\big(U(t+h)|U(t)\big) \ .$$

Aufgabe 26 : (Martingale zu einem Prozess mit unabhängigen Zuwächsen)
$\{X(t) \ : t \in \mathbb{R}_+\}$ sei ein im Nullpunkt startender Prozess mit stationären unabhängigen Zuwächsen.

$$\mu_h = \mathcal{L}\,(X_{t+h} - X_t) \quad \text{für} \;\; h \geq 0 \ .$$

$\mathfrak{A}_t$ sei die von den X_s, $s \leq t$ erzeugte σ-Algebra.
Wir nehmen an, dass die μ_h kurze Schwänze haben in dem Sinne

$$\mathcal{E}\exp(\vartheta \cdot X_t) < \infty \quad \text{für} \;\; \vartheta \quad \text{in einer Umgebung} \;\; V \;\; \text{der Null.}$$

Man hat dann eine Funktion $\psi(\vartheta)$, sodass

$$\mathcal{E}\big(\exp(\vartheta \cdot X_t)\big) = \exp\big(t \cdot \psi(\vartheta)\big) \quad \text{für alle} \;\; t \ .$$

Zeigen Sie, dass für jedes $\vartheta \in V$ der Prozess

$$M_t = \exp\big(-t \cdot \psi(\vartheta)\big) \cdot \exp(\vartheta \cdot X_t)$$

ein Martingal ist.