Übungen zur Vorlesung
„STOCHASTIC PROCESSES Concepts and Applications“

http://ismi.math.uni-frankfurt.de/dinges/teaching/

Datum: 25.4.03
Abgabe Di, 6.5.03

Aufgabe 1 : Es ist bekanntlich leichter, mit einem Paar von Würfeln die Augensumme 7 zu würfeln als die Augensumme 6. Die Spieler A und B würfeln abwechselnd, bis entweder A die Augensumme 6 oder B die Augensumme 7 hat. A beginnt. Hat A eine faire Chance?

Aufgabe 2 : A und B haben $2N$-mal unabhängige Runden eines fairen Spiels gespielt mit (durch Zufall) je N Erfolgen.
Zeigen Sie : Die Wahrscheinlichkeit, dass B vom ersten bis zum vorletzten Spiel stets echt in Führung lag, ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2N-1}$.
Prüfen Sie das zunächst für $N = 1, 2, 3$.

Andere Formulierung :
Denken Sie an eine einfache symmetrische Irrfahrt $S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$, wobei die Y_j unabhängig sind mit $\mathrm{Ws}(Y_j = +1) = \frac{1}{2} = \mathrm{Ws}(Y_j = -1)$.
Zeigen Sie

$$Pr(S_1 < 0, \ldots, S_{2N-1} < 0 \mid S_{2N} = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2N-1}.$$

Beweisidee :

a) Die Frage ist gelöst, wenn Sie beweisen: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Irrfahrt in $2N - 1$ Schritten zum ersten Mal ihr Maximum $= 1$ annimmt ist gleich $\cdot\frac{1}{2N-1}$. Begründen Sie diese Umformulierung des Problems!

b) Zum Beweis der Behauptung betrachten Sie die Pfade auch für die zyklisch permutierten Zuwächse

$$Y_1^{(k)} = Y_{k-1}\ ,\ Y_2^{(k)} = Y_{k+2} \ldots ,\ Y_{2N}^{(k)} = Y_{k+2N}\ .$$

Jede dieser zyklisch permutierten Gewinnfolgen hat dieselbe Warscheinlichkeit. Genau eine von ihnen ist so, dass der Pfad $S_n^{(k)}$ die Bedingung in a) erfüllt. (Bild!)