

Computertomographie

Prof. Dr. Bastian von Harrach

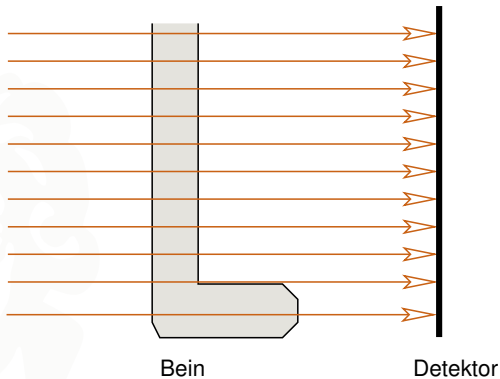
<http://numerical.solutions>

Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt am Main

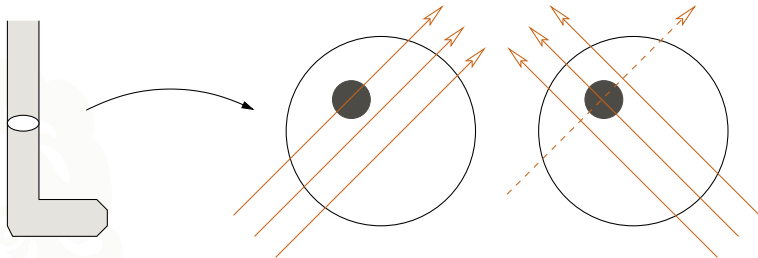
Begemann Schule, Frankfurt

5. Dezember 2024

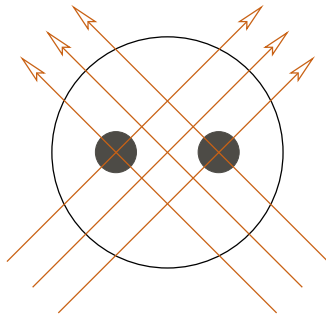
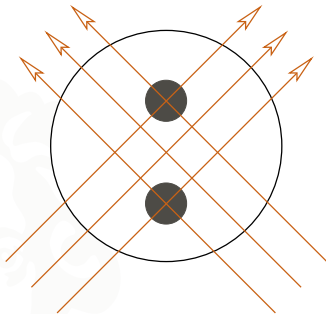
Röntgen



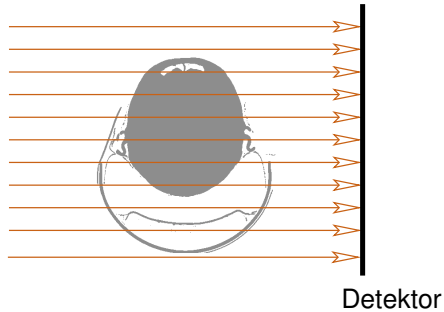
Röntgen aus zwei Richtungen



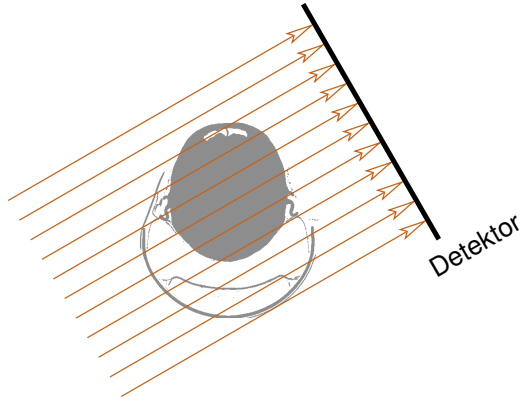
Röntgen aus zwei Richtungen



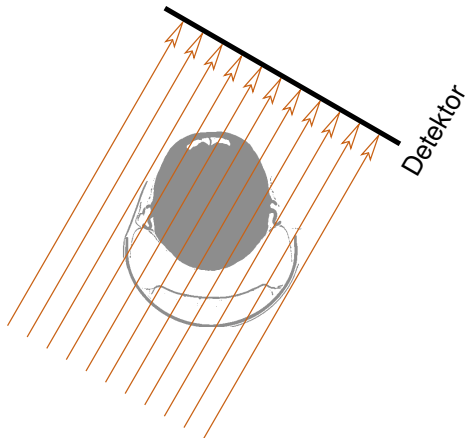
Computertomographie: Röntgen aus 580 Richtungen

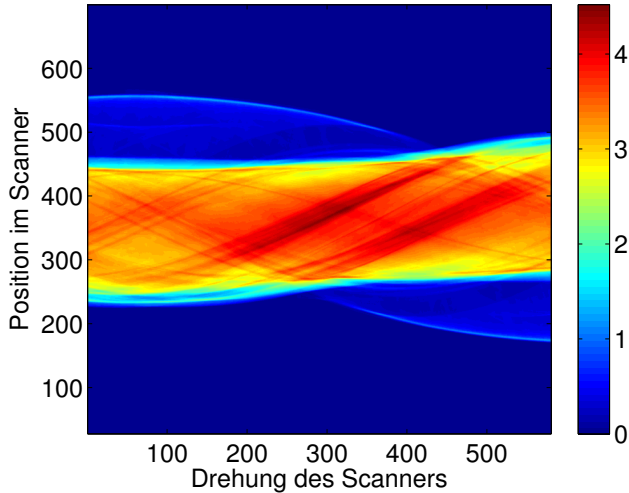


Computertomographie: Röntgen aus 580 Richtungen

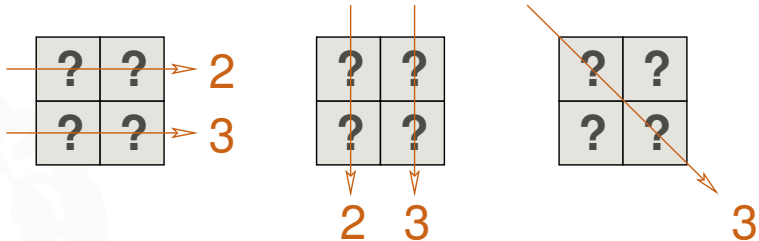


Computertomographie: Röntgen aus 580 Richtungen

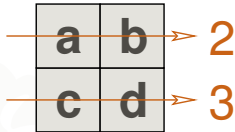




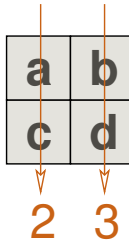
Mathematische Modellierung (extrem vereinfacht)



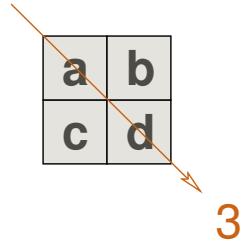
Mathematische Modellierung (extrem vereinfacht)



$$\begin{aligned} a + b &= 2 \\ c + d &= 3 \end{aligned}$$

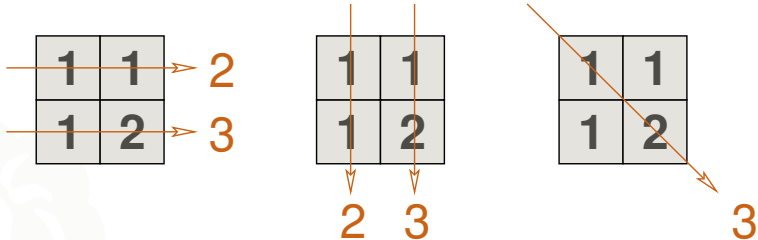


$$\begin{aligned} a + c &= 2 \\ b + d &= 3 \end{aligned}$$



$$a + d = 3$$

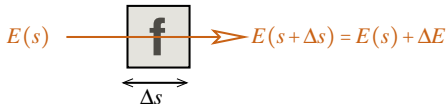
Mathematische Modellierung (extrem vereinfacht)



$$\begin{aligned}
 c + d = 3, \quad b + d = 3, \quad a + d = 3 &\implies a = b = c. \\
 a + b = 2 &\implies \underline{a = b = c = 1}. \\
 a + d = 3 &\implies \underline{d = 2}.
 \end{aligned}$$

Mathematische Modellierung (besser)

- Energie vor und nach Durchquerung von Material mit Breite Δs :



- Anschauung/Experiment: ΔE proportional zu E und Δs
(zumindest für kleine Δs)

$$\Delta E = -f E \Delta s$$

f : Materialkonstante/Absorptionskoeffizient

↪ Differentialgleichung:

$$E'(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{E(s + \Delta s) - E(s)}{\Delta s} = -f(s)E(s)$$

Mathematische Modellierung (besser)

- Differentialgleichung:

$$E'(s) = -f(s)E(s) \implies \frac{E'(s)}{E(s)} = -f(s)$$

- Integration von Quelle (Q) zu Detektor (D):

$$\int_Q^D \frac{E'(s)}{E(s)} ds = - \int_Q^D f(s) ds$$

- Mit $\frac{E'(s)}{E(s)} = (\ln E(s))'$ folgt

$$\ln \frac{E(D)}{E(Q)} = \ln E(D) - \ln E(Q) = - \int_Q^D f(s) ds$$

Mathematische Modellierung (besser)

$$\ln \frac{E(D)}{E(Q)} = - \int_Q^D f(s) \, ds$$

$E(D)$ und $E(Q)$: Energie an Quelle bzw. Detektor
(bekannt für alle Strahlen durch den Körper)

f : Absorptionskoeffizient
(unbekannt im Körper)

Wie bestimme ich eine (zweidimensionale) Funktion aus ihren
(eindimensionalen) Integralmitteln?

Wie bestimme ich eine (zweidimensionale) Funktion aus ihren
(eindimensionalen) Integralmitteln?

Explizite Lösungsformel: Radon 1917

Zum Vergleich:

- ▶ Röntgenstrahlen: Röntgen 1895
- ▶ CT: Cormack und Hounsfield ca. 1972

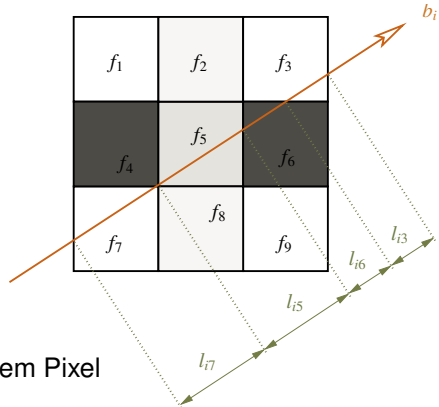
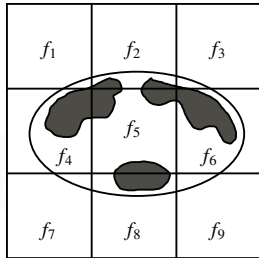
(Medizin-Nobelpreis 1979)

Im Folgenden:

Algebraic-Reconstruction-Technique (Hounsfield, 1972)

(schlechter als Radons Lösung, aber elementarer und lehrreich...)

Diskretisierung



Näherung: f konstant auf jedem Pixel

$$b_i := -\ln \frac{E(D_i)}{E(Q_i)} = \int_{Q_i}^{D_i} f(s) \, ds = l_{i7} f_7 + l_{i5} f_5 + l_{i6} f_6 + l_{i3} f_3$$

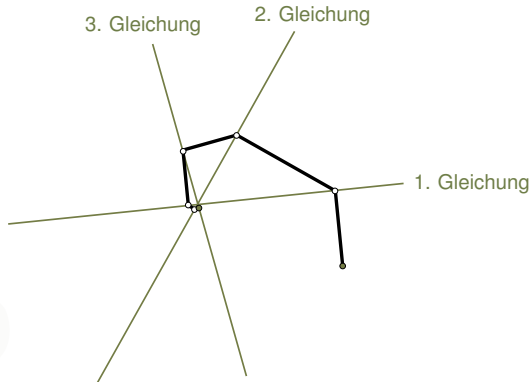
Für i -ten Strahl:

$$l_{i7}f_7 + l_{i5}f_5 + l_{i6}f_6 + l_{i3}f_3 = b_i$$

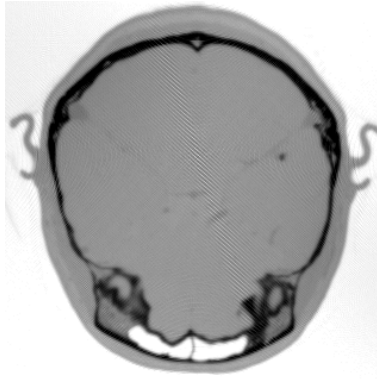
- b_i : bekannt aus Messung des i -ten Strahls
- l_{ij} : bekannt/berechenbar aus Scannergeometrie
- f_j : unbekannter Absorptionskoeff. des j -ten Pixels

Z.B. 580×672 Strahlen und 512^2 Pixel

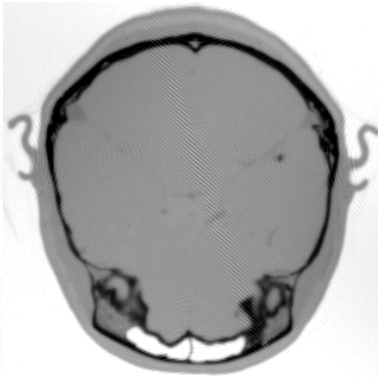
→ 389.760 Gleichungen für 262.144 Unbekannte



Kaczmarz-Verfahren für 3 Gleichungen in 2 Unbekannten

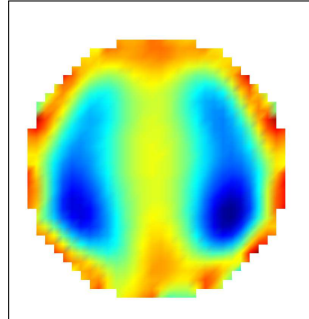
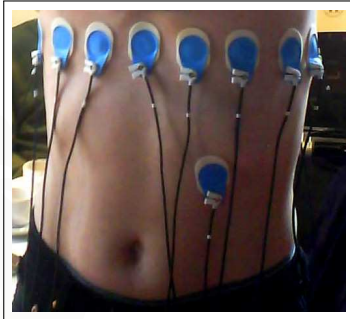


Rekonstruktion mit 580×672 Strahlen und 512×512 Pixeln,
d.h. ca. 400.000 Gleichungen für ca. 250.000 Unbekannte



Noch bessere Ergebnisse: Inverse Radon-Transformation
(rechts: Rekonstruktion eines Siemens-Tomographen, ca. 2000)

Ausblick: Ströme statt Röntgenstrahlen

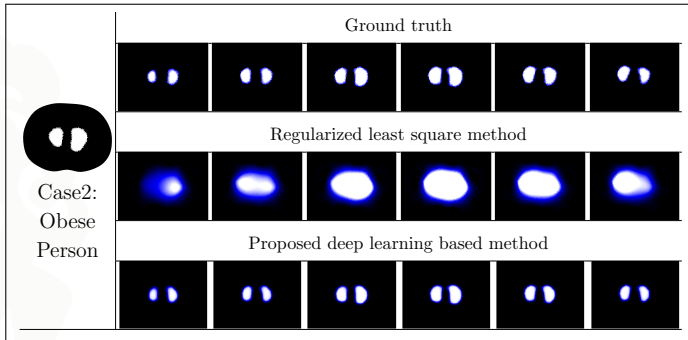


Elektrische Impedanztomographie

Ausblick: KI in der Medizintechnik

Datenbasiertes Training neuronaler Netze ...

- ▶ ... zur Verbesserung bildgebender Verfahren,
- ▶ ... zur Auswertung medizinischer Aufnahmen.



Seo, Kim, Jargal, Lee, Harrach: A learning-based method for solving ill-posed nonlinear inverse problems: a simulation study of Lung EIT, SIAM J. Imaging Sci. 2019

Literatur und Zusammenfassung

- ▶ M. Hochbruck, J.-M. Sautter: Mathematik fürs Leben am Beispiel der Computertomographie, *Mathematische Semesterberichte* **49**(1), 95–113, 2002.
- ▶ M. Hanke-Bourgeois: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Springer-Verlag, 3. Auflage, 2008.
- ▶ B. Harrach: Abermillionen Rechenschritte für einen Blick in den Körper: In der medizinischen Bildgebung geht nichts ohne Mathematik, *Forschung Frankfurt: Wissenschaftsmagazin der Goethe-Universität* **34**(2), 79–81, 2017.

In der medizinischen Bildgebung geht nichts ohne Mathematik.
