Mathematik in der Medizintechnik

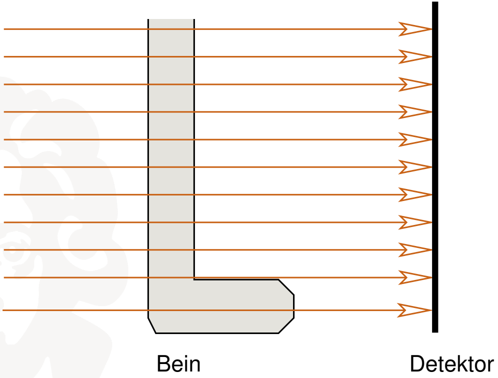
Prof. Dr. Bastian von Harrach

http://numerical.solutions

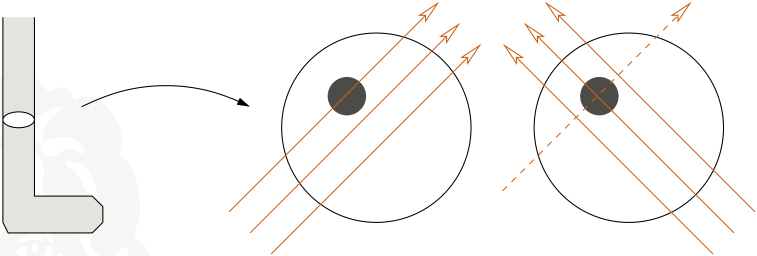
Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt am Main

NIGHT of SCIENCE 2016
Goethe-Universität Frankfurt am Main
3. Juni 2016

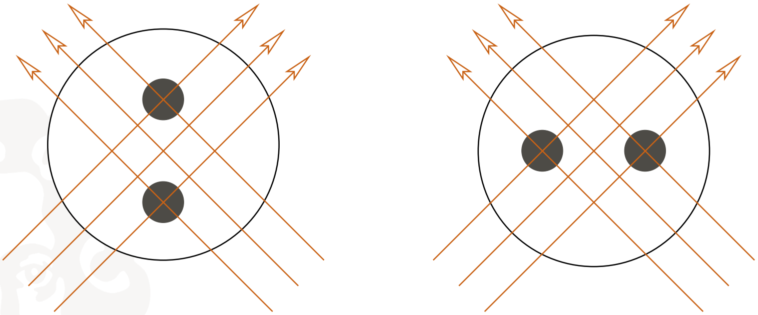
Röntgen



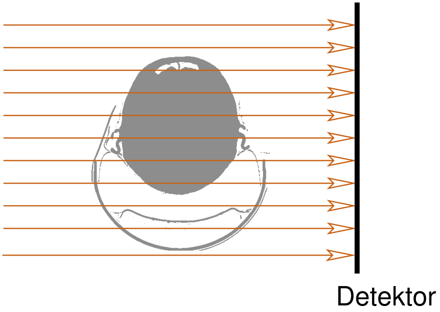
Röntgen aus zwei Richtungen



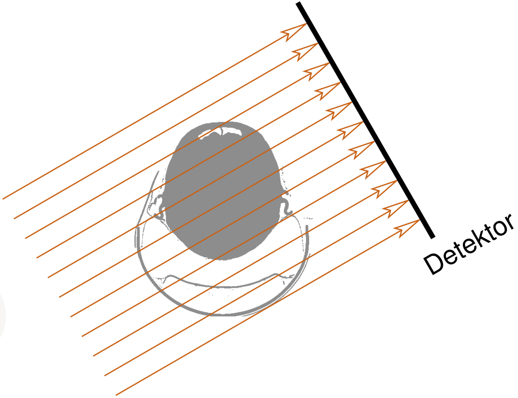
Röntgen aus zwei Richtungen



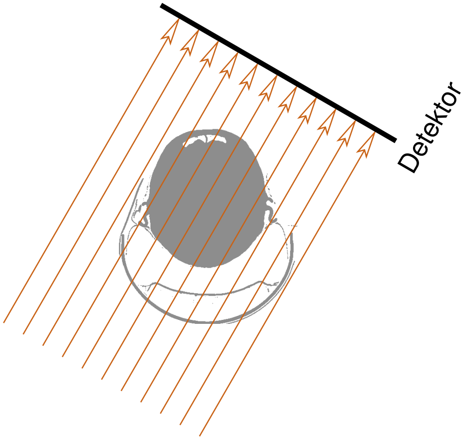
Computertomographie: Röntgen aus 580 Richtungen



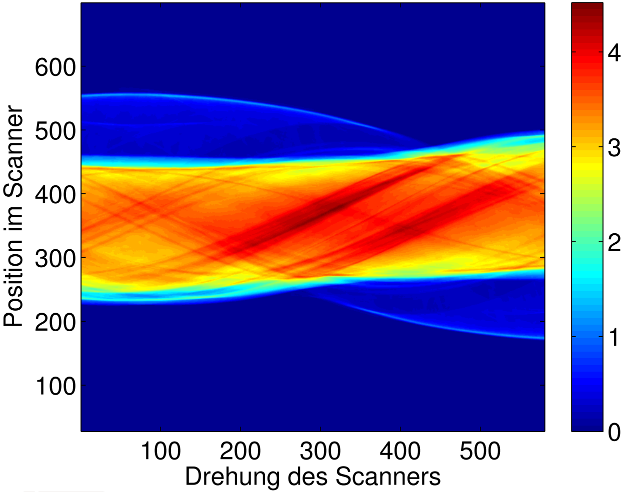
Computertomographie: Röntgen aus 580 Richtungen



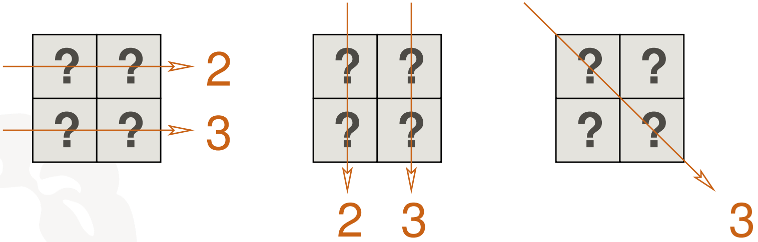
Computertomographie: Röntgen aus 580 Richtungen



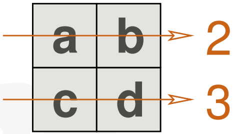
Messdaten

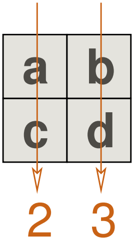

Position im Scanner
600
500
400
300
200
100
100
200
300
400
500
Drehung des Scanners
4
3
2
1
0

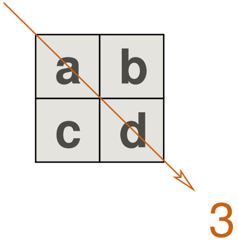
Mathematische Modellierung (extrem vereinfacht)



Mathematische Modellierung (extrem vereinfacht)





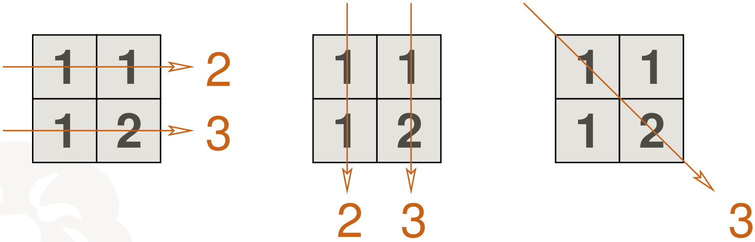


$$a + b = 2$$
$$c + d = 3$$

$$a + c = 2$$
$$b + d = 3$$

$$a + d = 3$$

Mathematische Modellierung (extrem vereinfacht)



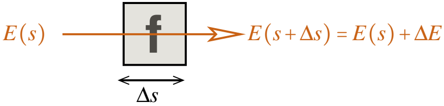
$$c + d = 3, \quad b + d = 3, \quad a + d = 3 \quad \Longrightarrow \quad a = b = c.$$

$$a + b = 2 \quad \Longrightarrow \quad \underline{a = b = c = 1}.$$

$$a + d = 3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{d = 2}.$$

Mathematische Modellierung (besser)

- Energie vor und nach Durchquerung von Material mit Breite Δs:



- Anschauung/Experiment: ΔE proportional zu E und Δs

  (zumindest für kleine Δs)

$$\Delta E = -f E \Delta s$$

  f: Materialkonstante/Absorptionskoeffizient

⇝ Differentialgleichung:

$$E'(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{E(s+\Delta s) - E(s)}{\Delta s} = -f(s) E(s)$$

Mathematische Modellierung (besser)

- Differentialgleichung:

$$E'(s) = -f(s)E(s) \quad \Longrightarrow \quad \frac{E'(s)}{E(s)} = -f(s)$$

- Integration von Quelle (Q) zu Detektor (D):

$$\int_Q^D \frac{E'(s)}{E(s)}\, \mathrm{d}s = -\int_Q^D f(s)\, \mathrm{d}s$$

- Mit $\frac{E'(s)}{E(s)} = (\ln E(s))'$ folgt

$$\boxed{\ln \frac{E(D)}{E(Q)} = \ln E(D) - \ln E(Q) = -\int_Q^D f(s)\, \mathrm{d}s}$$

Mathematische Modellierung (besser)

$$\boxed{\ln \frac{E(D)}{E(Q)} = -\int_Q^D f(s)\,\mathrm{d}s}$$

$E(D)$ und $E(Q)$: Energie an Quelle bzw. Detektor
(bekannt für alle Strahlen durch den Körper)

f: Absorptionskoeffizient
(unbekannt im Köper)

Wie bestimme ich eine (zweidimensionale) Funktion aus ihren (eindimensionalen) Integralmitteln?

Mathematische Modellierung (besser)

Wie bestimme ich eine (zweidimensionale) Funktion aus ihren (eindimensionalen) Integralmitteln?

Explizite Lösungsformel: Radon 1917

Zum Vergleich:

- Röntgenstrahlen: Röntgen 1895
- CT: Cormack und Hounsfield ca. 1972

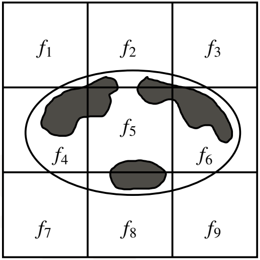
  (Medizin-Nobelpreis 1979)

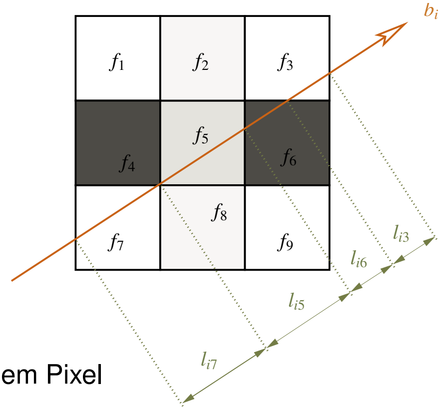
Im Folgenden:

Algebraic-Reconstruction-Technique (Hounsfield, 1972)

(schlechter als Radons Lösung, aber elementarer und lehrreich. . .)

Diskretisierung





Näherung: f konstant auf jedem Pixel

$$b_i := -\ln \frac{E(D_i)}{E(Q_i)} = \int_{Q_i}^{D_i} f(s)\,\mathrm{d}s = l_{i7} f_7 + l_{i5} f_5 + l_{i6} f_6 + l_{i3} f_3$$

Diskretisierung

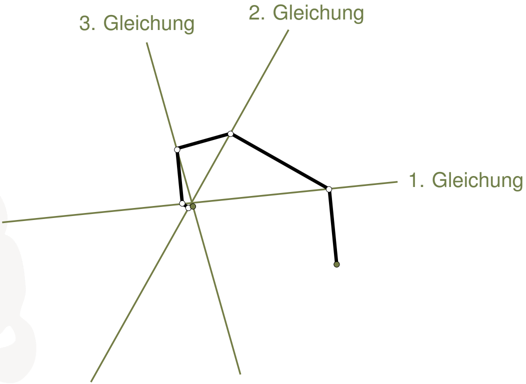
Für i-ten Strahl:

$$l_{i7} f_7 + l_{i5} f_5 + l_{i6} f_6 + l_{i3} f_3 = b_i$$

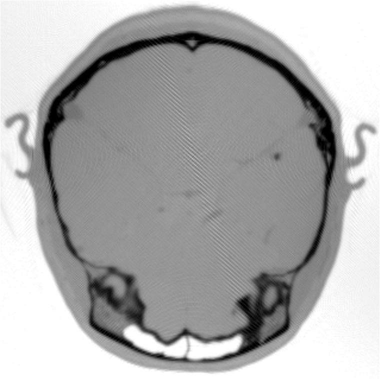
b_i:	bekannt aus Messung des i-ten Strahls
l_{ij}:	bekannt/berechenbar aus Scannergeometrie
f_j:	unbekannter Absorptionskoeff. des j-ten Pixels

Z.B. 580×672 Strahlen und 512^2 Pixel
$\rightsquigarrow$ 389.760 Gleichungen für 262.144 Unbekannte

Numerische Lösung

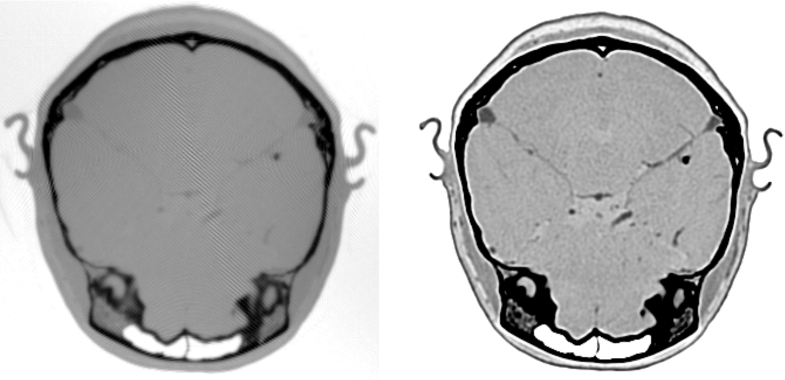


Kaczmarz-Verfahren für 3 Gleichungen in 2 Unbekannten



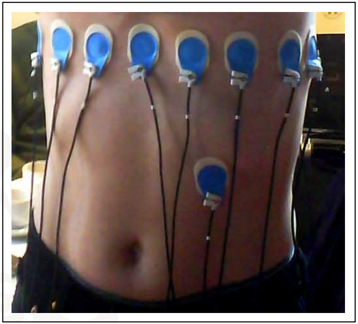
Rekonstruktion mit $580 * 672$ Strahlen und $512 * 512$ Pixeln,
d.h. ca. 400.000 Gleichungen für ca. 250.000 Unbekannte

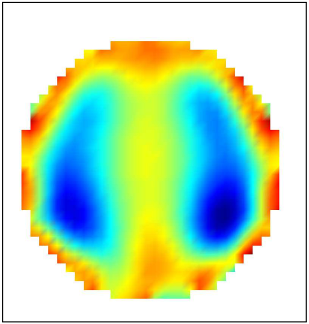
Ergebnisse



Noch bessere Ergebnisse: Inverse Radon-Transformation
(rechts: Rekonstruktion eines Siemens-Tomographen, ca. 2000)

Ausblick: Ströme statt Röntgenstrahlen





Elektrische Impedanztomographie

Literatur

- M. Hanke-Bourgeois: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*,
  Springer-Verlag, 3. Auflage, 2008.
- M. Hochbruck, J.-M. Sautter: Mathematik fürs Leben am Beispiel der Computertomographie,
  Mathematische Semesterberichte **49**(1), 95-113, 2002.