



Inverse Probleme

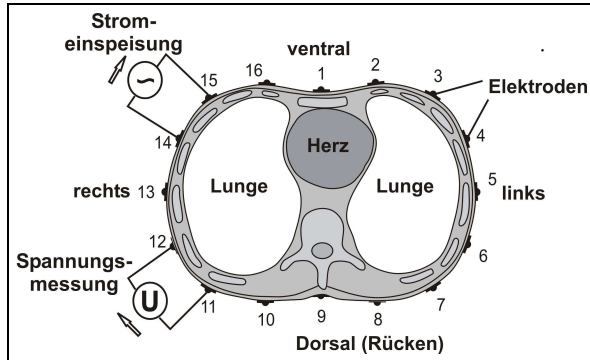
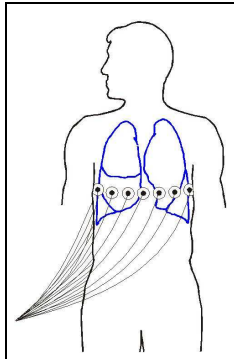
Bastian von Harrach

`harrach@math.uni-stuttgart.de`

Lehrstuhl für Optimierung und inverse Probleme, Universität Stuttgart

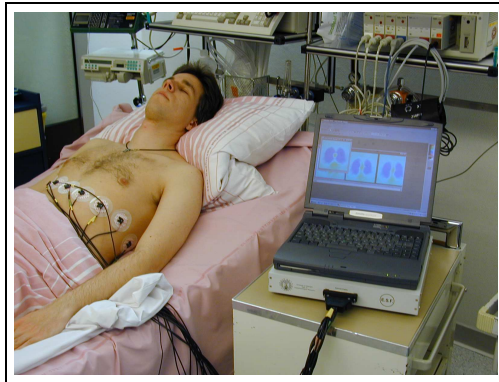
Institut für Technische Optik,
12. Juni 2013.

Impedanztomographie



Quelle: Dr. G. Hahn, Prof. Dr. G. Hellige, EIT Group Göttingen,
Abteilung Anästhesiologische Forschung Universitätsmedizin Göttingen.

MF-System Goe-MF II



Stromquelle 5 – $500\text{mA}_{\text{rms}}$, 44 Bilder/s à 32×32 Pixel, CE zertifiziert durch Fa. Viasys Healthcare, zugelassen für klinische Forschung

*Quelle: Dr. G. Hahn, Prof. Dr. G. Hellige, EIT Group Göttingen,
Abteilung Anästhesiologische Forschung Universitätsmedizin Göttingen.*



Inverse Probleme

$$F : \text{„Körperinneres“} \mapsto \text{„Messungen“}$$

x : Körperinneres (räumliche Leitfähigkeitsverteilung)

y : Messungen (Strom-Spannungs-Werte)

Direktes Problem: Simulation/Vorhersage der Messungen
(für bekanntes Körperinneres)

Gegeben x berechne $F(x) = y$!

Inverses Problem: Rekonstruktion des Körperinneren
(aus durchgeführten Messungen)

Gegeben y löse $F(x) = y$!



Inhalt

- ▶ Einführung in inverse Probleme
- ▶ Elektrische Impedanztomographie
- ▶ Identifizierbarkeitsfragen



Einführung in

Inverse Probleme



Wohlgestelltheit

Hadamard (1865–1963): Ein Problem heißt **wohlgestellt**, wenn

- ▶ eine Lösung existiert,
- ▶ die Lösung eindeutig ist,
- ▶ die Lösung stetig von den Daten abhängt.

Inverses Problem: *Gegeben y löse $F(x) = y$!*

- ▶ F surjektiv?
- ▶ F injektiv?
- ▶ F^{-1} stetig?

(bzgl. der Anwendung angemessenen mathematischen Strukturen...)



Schlechtgestellte Probleme

Schlechtgestelltheit: $F^{-1} : Y \rightarrow X$ unstetig.

$\hat{x} \in X$: gesuchte Lösung
 $y = F(\hat{x}) \in Y$: exakte Messung
 $y^\delta \in Y$: reale Messungen mit Messfehler $\delta > 0$,
etwa $\|y^\delta - y\|_Y \leq \delta$

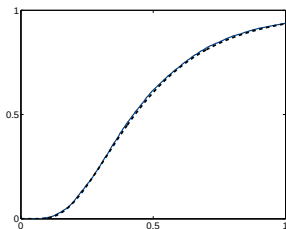
Für $\delta \rightarrow 0$

$y^\delta \rightarrow y$, aber (i.A.) $F^{-1}(y^\delta) \not\rightarrow F^{-1}(y) = \hat{x}$

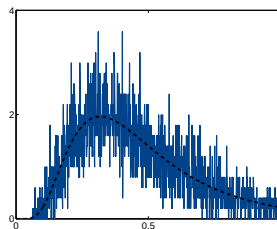
Rekonstruktion schon bei kleinsten Messfehlern unbrauchbar.

Beispiel

Beispiel: Numerische Differentiation ($h = 10^{-3}$)



$g(x)$ und $g^\delta(x)$



$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ und $\frac{g^\delta(x+h)-g^\delta(x)}{h}$

Differentiation ist schlechtgestelltes (inverses) Problem

Direktes Problem Integration wohlgestellt,

z.B. bzgl. $C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ oder $L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$.

Regularisierung

Numerische Differentiation:

- ▶ $g \in C^2$, $C := 2 \sup_{\xi} |g''(\xi)| < \infty$, $|g^{\delta}(x) - g(x)| \leq \delta \quad \forall x$

$$\begin{aligned} & \left| g'(x) - \frac{g^{\delta}(x+h) - g^{\delta}(x)}{h} \right| \\ & \leq \left| g'(x) - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right| \\ & \quad + \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \frac{g^{\delta}(x+h) - g^{\delta}(x)}{h} \right| \\ & \leq Ch + \frac{2\delta}{h} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

für $\delta \rightarrow 0$ und an δ angepasstes $h = h(\delta)$, z.B. $h := \sqrt{\delta}$.



Regularisierung

Regularisierung inverser Probleme:

- ▶ F^{-1} unstetig, also i.A. $F^{-1}(y^\delta) \not\rightarrow F^{-1}(y) = \hat{x}$ für $\delta \rightarrow 0$
- ▶ R_h stetige Approximationen an F^{-1} (Regularisierung),
 $R_h \rightarrow F^{-1}$ (pkt.weise) für $h \rightarrow 0$

$$R_{h(\delta)}y^\delta \rightarrow F^{-1}y = \hat{x} \quad \text{für } \delta \rightarrow 0$$

bei richtiger Wahl der Parameterwahlstrategie $h = h(\delta)$.

Inexakte aber stetige Rekonstruktion (Regularisierung)
+ Anpassung an Messfehler (Parameterwahlstrategie)
= Konvergenz



Inverse Probleme

Inverse Probleme:

$$F^{-1}(y^\delta) \not\rightarrow F^{-1}(y), \quad \text{aber} \quad R_{h(\delta)}y^\delta \rightarrow F^{-1}y$$

*„Manchmal muss man das falsche Problem lösen,
um die richtige Lösung zu erhalten“*

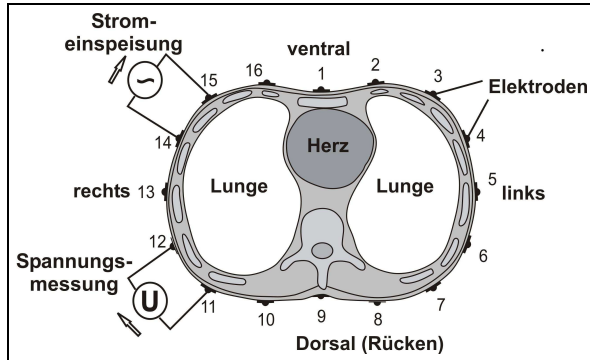
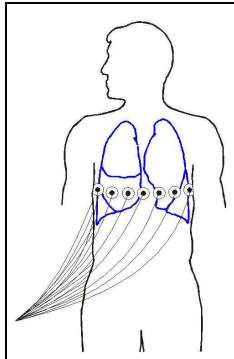


Die elektrische

Impedanztomographie (EIT)

und verwandte elektromagnetische Probleme

Impedanztomographie



Quelle: Dr. G. Hahn, Prof. Dr. G. Hellige, EIT Group Göttingen,
Abteilung Anästhesiologische Forschung Universitätsmedizin Göttingen.

Mathematisches Modell

Elektrisches Potential löst

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{in } B \subset \mathbb{R}^n$$

Randbedingungen:

Angelegte Ströme:	Neumann-Randwerte $\sigma \partial_\nu u _{\partial B}$,
Gemessene Spannungen:	Dirichlet-Randwerte $u _{\partial B}$.

Strom-/Spannungsmessungen:

Neumann-zu-Dirichletabbildung (NtD) $\Lambda(\sigma) : \sigma \partial_\nu u|_{\partial B} \mapsto u|_{\partial B}$.

*(In der Praxis: Modellierung der Elektroden, Kontaktwiderstände,
fehlende/redundante Messungen, ...)*

Theorie linearer elliptischer PDGL: (B beschränkt, glatt berandet, $\sigma \in L^\infty_+(B)$)

$\implies \Lambda(\sigma) \in \mathcal{L}(L^2_\diamond(\partial B))$ kompakt, selbstadjungiert. $\sigma \mapsto \Lambda$ stetig.

EIT: $\Lambda(\sigma) \mapsto \sigma$?

Eindeutigkeit („Calderón-Problem“):

- ▶ Messungen auf komplettem Rand:

*Calderón (1980), Kohn/Vogelius (1984), Sylvester/Uhlmann (1987),
Nachman (1996), Astala / Päivärinta (2006)*

- ▶ Messungen auf Teil des Randes:

*Bukhgeim / Uhlmann (2002), Knudsen (2006), Isakov (2007), Kenig / Sjöstrand
/ Uhlmann (2007), H. (2008), Imanuvilov / Uhlmann / Yamamoto (2009+2010)*

Schlechtgestelltheit: $\Lambda(\sigma) \mapsto \sigma$ unstetig,

- ▶ Regularisierung notwendig
- ▶ Modellierungsfehler (Elektrodenpos., Körperhülle) unvermeidbar
 $\rightsquigarrow$ Verwendung von Differenzdaten „ $\Lambda(\sigma) - \Lambda(\sigma_0) \mapsto \sigma - \sigma_0$ “,
 $\Lambda(\sigma_0)$ Referenzmessung mit gleichen Modellierungsfehlern,
(z.B. ausgeatmeter Zustand).



Linearisierung

Generischer Ansatz: Linearisierung

$$\Lambda(\sigma) - \Lambda(\sigma_0) \approx \Lambda'(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0)$$

$\Lambda'(\sigma_0)$: Fréchet-Ableitung (sensitivity matrix).

$$\Lambda'(\sigma_0) : L^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(L_\diamond^2(\partial\Omega)).$$

$\rightsquigarrow$ Lineares inverses Problem für $\sigma - \sigma_0$.

Oft: $\text{supp}(\sigma - \sigma_0) \subset\subset \Omega$ kompakt. (*"Inklusion"*)

Linearisierte Verfahren

Linearisierte Rekonstruktionsverfahren

z.B. NOSER (Cheney et al., 1990), GREIT (Adler et al., 2009)

Löse $\Lambda'(\sigma_0)\kappa \approx \Lambda(\sigma) - \Lambda(\sigma_0)$, dann ist $\kappa \approx \sigma - \sigma_0$.

- ▶ Vielfältige Möglichkeiten für Regularisierung
- ▶ Keine (lokale) Konvergenztheorie für für Newton-artige Verfahren (im kontinuierlichen Modell)
- ▶ Rigorose Theorie für einzelnen Linearisierungsschritt möglich?
- ▶ Hoffnung: Faktorisierungsmethode (Kirsch, Hanke, Brühl, ...) charakterisiert Inklusionen nur mit Referenzlösungen



Exakte Linearisierung

H./Seo (SIAM J. Math. Anal. 2010):

Linearisierung enthält exakte Gebietsinformation.
(unabhängig vom Linearisierungsfehler)

Genauer: Seien κ , σ , σ_0 stk.weise analytisch.

$$\Lambda'(\sigma_0)\kappa = \Lambda(\sigma) - \Lambda(\sigma_0). \quad \Rightarrow \quad \text{supp}_{\partial B}\kappa = \text{supp}_{\partial B}(\sigma - \sigma_0)$$

$\text{supp}_{\partial B}$: äußerer Träger (= supp, wenn Komplement zusammenhängend)



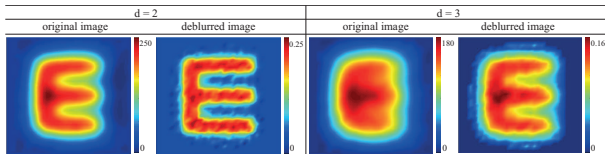
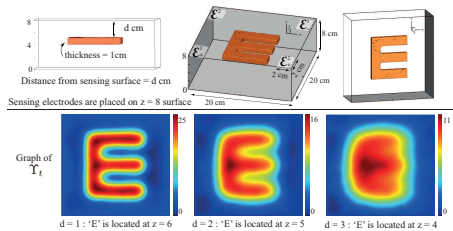
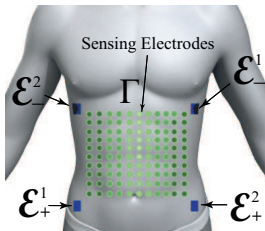
Linearisierung

Linearisierung enthält exakte Gebietsinformation.
(unabhängig vom Linearisierungsfehler)

*„Manchmal darf man das falsche Problem lösen,
und erhält (trotzdem) die richtige Lösung.“*

Planare EIT

Ts/Lee/Seo/H./Kim (2012): Partielle Inversion plus Linearisierung

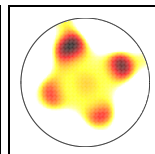
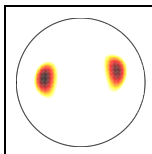


Frequenzdifferente EIT

Frequenz $\omega/(2\pi)$ der angelegten Wechselströme:

$< 1\text{kHz}$: $\sigma(x) \in \mathbb{R}$, wie Gleichstrom
 $1\text{kHz} - 500\text{kHz}$: $\sigma_\omega(x) \in \mathbb{C}$, frequenzabhängig

Frequenzdifferente EIT: (H./Seo/Woo)



Hybride EIT-Verfahren

Erhalte (innere) Information durch ergänzendes Verfahren

- ▶ **MREIT:**

Messung des Magnetfelds $\rightsquigarrow$ (innere) Stromdichte

Kwon/Woo/Yoon/Seo (2002), Kim/Kwon/Seo/Yoon (2002),

Kim/Kwon/Seo/Woo (2003), Nachman/Tamasan/Timonov (2007+2009)

- ▶ **Magnetoakustik:**

Ext. Magnetfeld $\rightsquigarrow$ Lorentzkkräfte $\rightsquigarrow$ Druckwelle $\rightsquigarrow$ Stromdichte

Ma/He (2007), Ammari/Capdeboscq/Kang/Kozhemyak (2009)

- ▶ **EIT durch elastische Deformation:**

Ultraschall $\rightsquigarrow$ lokale Leitfähigkeitsänderung $\rightsquigarrow$ Energiedichte

Ammari/Bonnetier/Capdeboscq/Tanter/Fink (2008)

- ▶ **Impedanzakustik:**

EIT erzeugt therm. Ausdehnung $\rightsquigarrow$ Druckwelle $\rightsquigarrow$ Energiedichte

H./Scherzer SIAM J. Appl. Math. 2008, Österr. Patent 2009.

Elektromagnetische Wellen

Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{curl} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{curl} E^\omega \right) - \omega^2 \epsilon E^\omega = i\omega J$$

Niedrige Frequenzen / große Wellenlängen

$$\omega \ll 1 \quad \rightsquigarrow \quad E^\omega \approx \omega E,$$

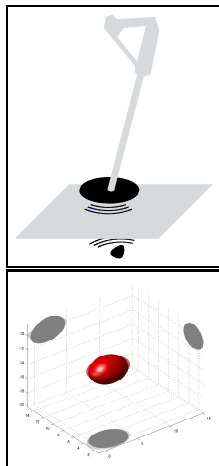
$$\operatorname{curl} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{curl} E \right) = iJ$$

Faktorisierungsmethode für Maxwell-Gl.:

Kirsch(2004),

H./Hanke/Kirsch/Muniz/Schneider (2005),

H./Hanke/Schneider (2008)





Wirbelströme

Berücksichtigung elektrischer Leitfähigkeiten $\sigma > 0$

$$\operatorname{curl} \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} E^\omega - \omega^2 \epsilon E^\omega = i\omega(J + \sigma E^\omega)$$

Niederfrequenzasymptotik im Zeitbereich:

$$\partial_t(\sigma E) - \operatorname{curl} \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} E = -\partial_t J,$$

parabolisch in Leitern ($\sigma > 0$), **elliptisch** außerhalb ($\sigma = 0$).

Ammari, Buffa, Nédélec (2000)

Skalares Model-Problem

$$\partial_t(cu) - \nabla \cdot (\kappa \nabla u) = 0, \quad c \geq 0$$

Frühau, H., Scherzer (2007): Gebietsrekonstruktionsprobleme

H. (2007): Sensitivitätsanalyse



Wirbelströme

$$\partial_t(\sigma E) - \operatorname{curl} \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} E = -\partial_t J,$$

parabolisch in Leitern ($\sigma > 0$), elliptisch außerhalb ($\sigma = 0$).

Naheliegender Ansatz: Zerlegung

elliptische PDGL + parabolische PDGL + Interfacebedingungen

↪ von $\operatorname{supp} \sigma$ abhängige Variationsformulierung
(Lösungsräume, Eichbedingungen, Koerzivitätskonstanten, ...)

DFG-Projekt: Wirbelstromprobleme

(Arnold/H., *SIAM J. Appl. Math.* 2012):

- ▶ Einheitliche variationelle Theorie,
- ▶ Linearisierung um elliptischen Zustand



Wirbelstromprobleme

- ▶ **Zuerst:** methodische Motivation für parab.-elliptische Probleme (da funktionieren elliptische Rekonstruktionsalgos noch)
- ▶ **Später:** Entdeckung der praktischen Anwendung Wirbelströme

*„Manchmal ist die Theorie näher an der Realität
als man erwartet.“*



Identifizierbarkeitsfragen

in der optischen Tomographie



Optische Tomographie

Natürliche Erweiterung des Calderón-Problems:

Bestimme **zwei Koeffizienten** $a, c \in L_+^\infty(B)$ in

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) + cu = 0 \quad \text{in } B$$

aus dem NtD-Operator $\Lambda_{a,c} : L^2(S) \rightarrow L^2(S)$, $a \partial_\nu u|_S \mapsto u|_S$

(auf Randstück $S \subseteq \partial B$ und mit $a \partial_\nu u|_{\partial B \setminus \overline{S}} = 0$).

Anwendung: **diffusive optische Tomographie (DOT)**

Übersichtsartikel: *Arridge/Schotland (2010), Gibson/Hebden/Arridge (2005)*

$u : B \rightarrow \mathbb{R}$: Photonendichte

$a : B \rightarrow \mathbb{R}$: Diffusions- / Streukoeffizient

$c : B \rightarrow \mathbb{R}$: Absorptionskoeffizient



Eindeutigkeitsfrage

DOT:

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) + cu = 0$$

Arridge/Lionheart (1998 Opt. Lett. 23 882–4):

- ▶ $v := \sqrt{a}u$ löst

$$-\Delta v + \eta v = 0, \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{\Delta \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \frac{c}{a}.$$

- ▶ $a = 1$ in Umgebung von $S \rightsquigarrow (u|_S, a \partial_\nu u|_S) = (v|_S, \partial_\nu v|_S).$

$\rightsquigarrow \Lambda_{a,c}$ hängt nur ab vom effektiven Absorpt.koeff. $\eta = \eta(a, c).$

Absorptions- und Streueffekte sind nicht unterscheidbar.

(Argument benötigt jedoch glatten Streukoeffizient a !)



Theorie und Praxis

Theorie: Arridge/Lionheart ('98)

Absorptions- und Streueffekte sind nicht unterscheidbar.

Praxis: Pei et al. ('01), Jiang et al. ('02), Schmitz et al. ('02), Xu et al. ('02)

Rekonstruktion von Streu- und Absorptionskoeffizient aus
experimentell gewonnenen Daten (und dem Diffusionsmodell!)

↪ **Widerspruch zwischen Theorie und Praxis!**

Pei et al. (2001):

"As a matter of established methodological principle (...) empirical facts have the right-of-way; if a theoretical derivation yields a conclusion that is at odds with experimental results, the reconciliatory burden falls on the theorist, not on the experimentalist."



Eindeutigkeitsresultat

Satz (H., *Inverse Problems*, 2009)

- ▶ $a_1, a_2 \in L_+^\infty(B)$ stückweise konstant
- ▶ $c_1, c_2 \in L_+^\infty(B)$ stückweise analytisch

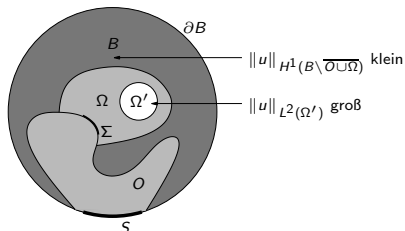
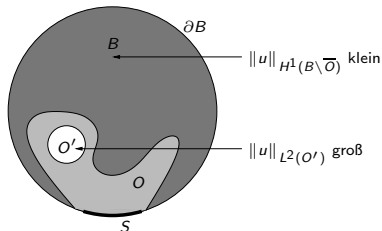
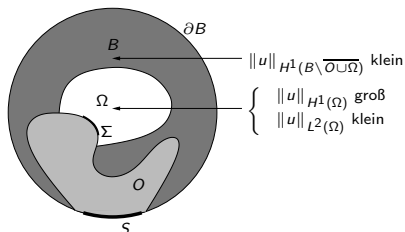
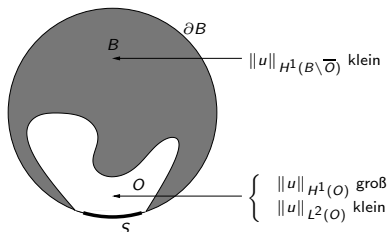
Ist $\Lambda_{a_1, c_1} = \Lambda_{a_2, c_2}$, so ist $a_1 = a_2$ und $c_1 = c_2$.

- ▶ Praktische Rekonstruktionen stammen aus einfachen Phantomexperimenten mit stückweise konstanten Koeffizienten
- ↪ Resultat „versöhnt“ Theorie und Praxis.
- ▶ Randmessungen enthalten mehr als nur die effektive Absorption.

Beweis: Kombination von lokalisierten Potentialen und Monotonie.

Lokalisierte Potentiale

Lemma Es existieren Lsg. u mit



Monotonieabschätzungen

Lemma

Seien $a_1, a_2, c_1, c_2 \in L^{\infty}_+(B)$. Für alle $g \in L^2(S)$ ist

$$\begin{aligned} & \int_B ((a_2 - a_1)|\nabla u_1|^2 + (c_2 - c_1)|u_1|^2) \\ & \geq \langle (\Lambda_{a_1, c_1} - \Lambda_{a_2, c_2})g, g \rangle \geq \int_B ((a_2 - a_1)|\nabla u_2|^2 + (c_2 - c_1)|u_2|^2), \end{aligned}$$

$u_1, u_2 \in H^1(B)$: Lsg. für (a_1, c_1) bzw. (a_2, c_2) .

Beweis des Eindeutigkeitsresultats (*stark vereinfacht* ...)

Starte mit Umgebung von S

- ▶ Verwende lok. Pot. mit $|\nabla u|^2 \rightarrow \infty$ in dieser Region $\rightsquigarrow a_1 = a_2$
- ▶ Verwende lok. Pot. mit $|u|^2 \rightarrow \infty$ in dieser Region $\rightsquigarrow c_1 = c_2$
- ▶ Wiederhole dies für alle Regionen.



Eindeutigkeit?

- ▶ Arridge/Lionheart '98: Keine Eindeutigkeit für glatte (a, c) .
- ▶ H. '09: Eindeutigkeit für stkw. konstantes a , stkw. anal. c .

Welche Information über a und c enthält $\Lambda_{a,c}$?

Formal(!) erhalten wir aus $\Lambda_{a,c}$

$$\eta = \frac{\Delta\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \frac{c}{a}$$

Sprünge in a oder $\nabla a \rightsquigarrow$ distributionelle Singularitäten in $\Delta\sqrt{a}$.

Vermutung: Vielleicht erhalten wir aus $\Lambda_{a,c}$

- ▶ η , falls a und c glatt sind,
- ▶ Sprünge von a und ∇a .

Eindeutigkeit

Satz Seien $a_1, a_2, c_1, c_2 \in L_+^\infty(B)$ stkw. analytisch auf

$$B = O_1 \cup \dots \cup O_J \cup \Gamma, \quad \partial O_1 \cup \dots \cup \partial O_J = \partial B \cup \Gamma.$$

Dann gilt $\Lambda_{a_1, c_1} = \Lambda_{a_2, c_2}$ genau dann, wenn

- (a) $a_1|_S = a_2|_S, \quad \text{und} \quad \partial_\nu a_1|_S = \partial_\nu a_2|_S \quad \text{auf } S,$
- (b) $\frac{\partial_\nu a_1}{a_1}|_{\partial B \setminus \overline{S}} = \frac{\partial_\nu a_2}{a_2}|_{\partial B \setminus \overline{S}} \quad \text{auf } \partial B \setminus \overline{S},$
- (c) $\eta_1 := \frac{\Delta \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}} + \frac{c_1}{a_1} = \frac{\Delta \sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2}} + \frac{c_2}{a_2} =: \eta_2 \quad \text{auf } B \setminus \Gamma,$
- (d) $\frac{a_1^+|_\Gamma}{a_1^-|_\Gamma} = \frac{a_2^+|_\Gamma}{a_2^-|_\Gamma}, \quad \text{und} \quad \frac{[\partial_\nu a_2]_\Gamma}{a_2^-|_\Gamma} = \frac{[\partial_\nu a_1]_\Gamma}{a_1^-|_\Gamma} \quad \text{auf } \Gamma.$



Fazit

- ▶ *Manchmal muss man das falsche Problem lösen, um die richtige Lösung zu erhalten.*
- ▶ *Manchmal darf man das falsche Problem lösen, und erhält (trotzdem) die richtige Lösung.*
- ▶ *Manchmal ist die Theorie näher an der Realität als man erwartet*
- ▶ *... und wenn nicht, dann hat die Realität recht.*