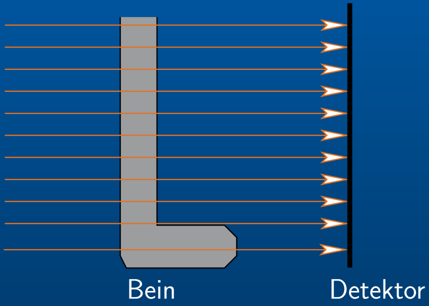
Computertomographie

wie Mathematik Unsichtbares sichtbar macht

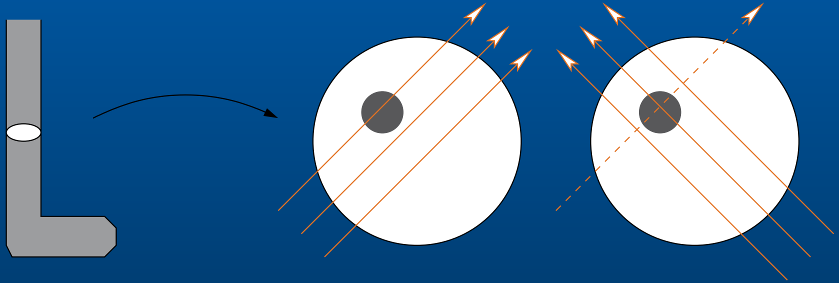
Prof. Dr. Bastian von Harrach

TUM-Schülertag Mathematik, 4. November 2010.

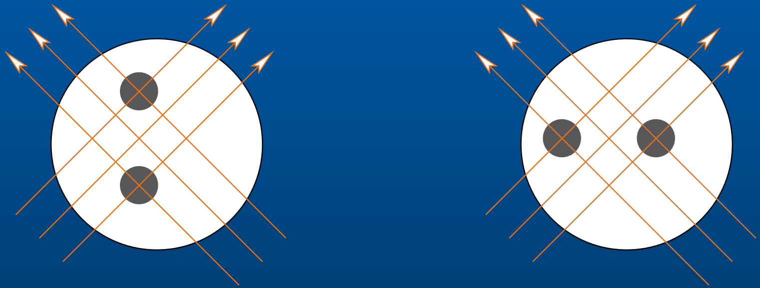
Röntgen



Röntgen aus zwei Richtungen



Röntgen

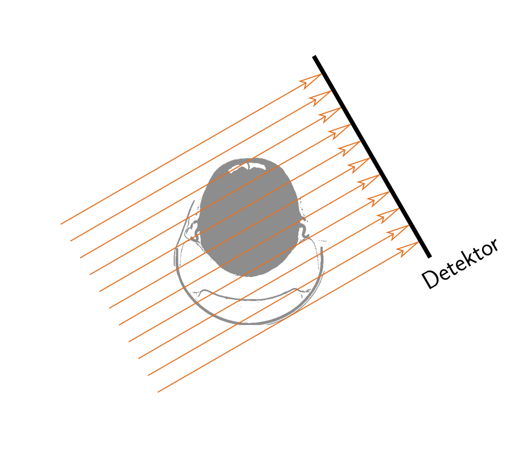


Computertomographie

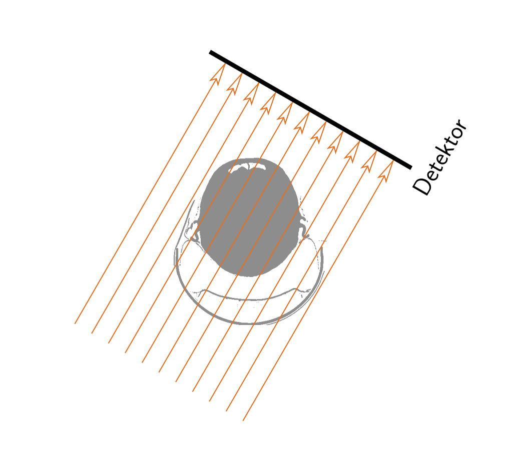
Röntgen aus 580 Richtungen

Computertomographie

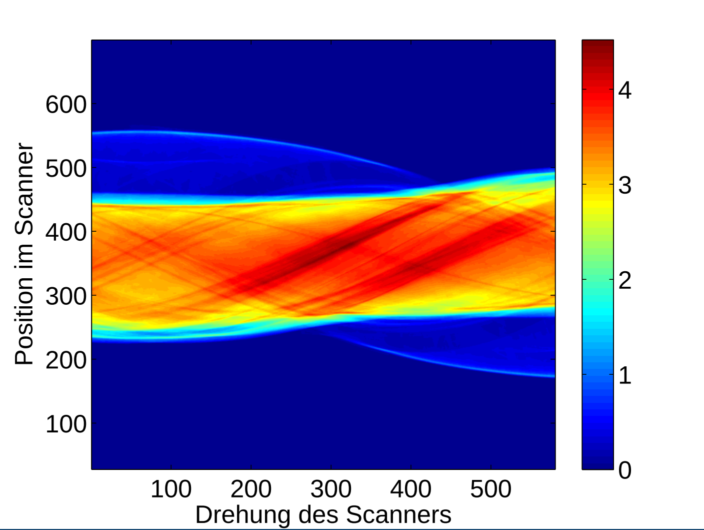
Röntgen aus 580 Richtungen



Röntgen aus 580 Richtungen



Messdaten


Position im Scanner
600
500
400
300
200
100
100
200
300
400
500
Drehung des Scanners
4
3
2
1
0

Math. Beschreibung

$$\boxed{\ln \frac{E(D)}{E(Q)} = -\int_Q^D f(s)\, \mathrm{d}s}$$

$E(D)$ und $E(Q)$:	bekannt für viele verschiedene Wege durch den Körper
Absorptionskoeff. f:	unbekannt im Köper

Wie bestimme ich eine (zweidimensionale) Funktion aus ihren (eindimensionalen) Integralmitteln?

Math. Beschreibung

Wie bestimme ich eine (zweidimensionale) Funktion aus ihren (eindimensionalen) Integralmitteln?

Explizite Lösungsformel: Radon 1917

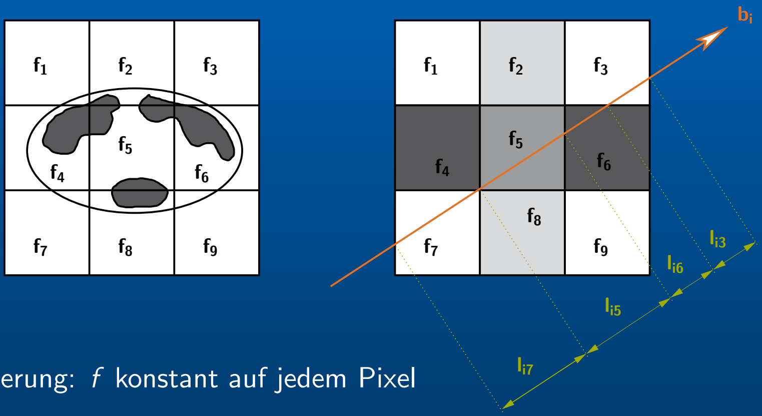
Zum Vergleich:

- Röntgenstrahlen: Röntgen 1895
- CT: Cormack und Hounsfield ca. 1972 (Medizin-Nobelpreis 1979)

Im Folgenden:

Algebraic-Reconstruction-Technique (Hounsfield, 1972)

(schlechter als Radons Lösung, aber elementarer und lehrreich. . .)



Näherung: f konstant auf jedem Pixel

$$b_i := \ln \frac{E(D_i)}{E(Q_i)} = -\int_{Q_i}^{D_i} f(s)\,\mathrm{d}s = l_{i7}f_7 + l_{i5}f_5 + l_{i6}f_6 + l_{i3}f_3$$

Diskretisierung

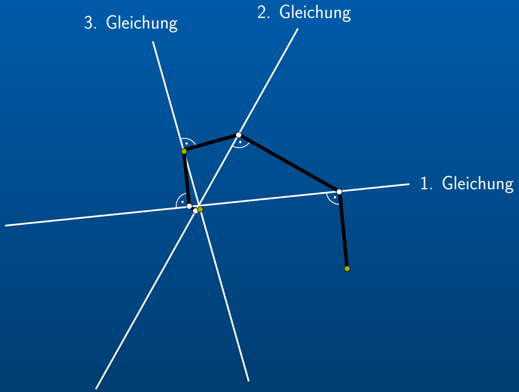
Für i-ten Strahl:

$$l_{i7} f_7 + l_{i5} f_5 + l_{i6} f_6 + l_{i3} f_3 = b_i$$

b_i: bekannt aus Messung des i-ten Strahls
l_{ij}: „einfach" berechenbar aus Scannergeometrie
f_j: unbekannter Absortionskoeff. des j-ten Pixels

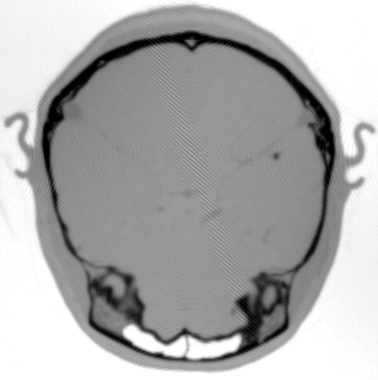
Z.B. 580×672 Strahlen und 512^2 Pixel
$\leadsto$ 389760 Gleichungen für 262144 Unbekannte

Numerische Lösung



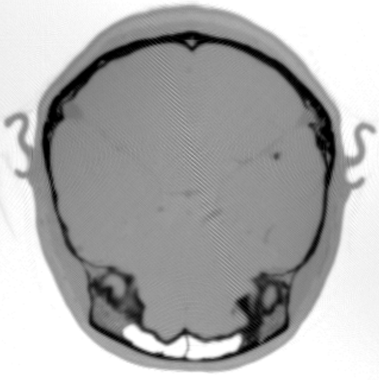
Kaczmarz-Verfahren für 3 Gleichungen in 2 Unbekannten

Rekonstruktion



Rekonstruktion mit $580 * 672$ Strahlen und $512 * 512$ Pixeln,
d.h. ca. 400.000 Gleichungen für ca. 250.000 Unbekannte

Ergebnisse



Noch bessere Ergebnisse: Inverse Radon-Transformation
(rechts: Rekonstruktion eines Siemens-Tomographen, ca. 2000)

Referenzen

- M. Hanke-Bourgeois: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Springer-Verlag, 3. Auflage, 2008.
- M. Hochbruck, J.-M. Sautter: Mathematik fürs Leben am Beispiel der Computertomographie, *Mathematische Semesterberichte* **49**(1), 95-113, 2002.
- R. Griesmaier: *Computertomographie*, Ausarbeitung zum Tag der offenen Tür, Universität Mainz, 2008.

  `www.mathematik.uni-mainz.de/Members/griesmaier/teaching/comptom.pdf`