

Lokalisierte Potentiale in der elektrischen Impendanztomographie

Bastian Gebauer

`bastian.gebauer@oeaw.ac.at`

Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics (RICAM)

Österreichische Akademie der Wissenschaften, Linz, Österreich

Rhein-Main Arbeitskreis

"Mathematics of Computation"

Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 23. November 2007



Übersicht

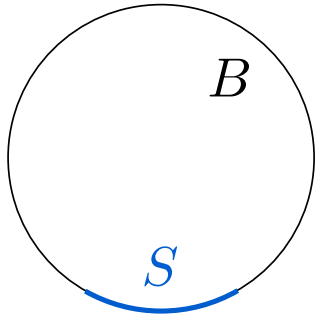
- Motivation
- Existenz lokalisierter Potentiale
- Konstruktion und numerische Beispiele
- Rekonstruktionsverfahren für EIT



Motivation



Elektrische Impendanztomographie



B : beschränktes, glatt berandetes Gebiet

$S \subseteq \partial B$: relativ offene Teilmenge des Randes

$\sigma \in L_+^\infty(B)$: elektrische Leitfähigkeit in B

$g \in L_\diamond^2(S)$: an S angelegter Randstrom

$\rightsquigarrow$ Elektrisches Potential $u \in H_\diamond^1(B)$,

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0, \quad \sigma \partial_\nu u|_{\partial B} = \begin{cases} g & \text{auf } S, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

EIT: Rekonstruiere (Eigenschaften von) σ aus Messungen von $u|_S$ zu einem oder mehreren Rangströmen g .

Regularitätsannahme:

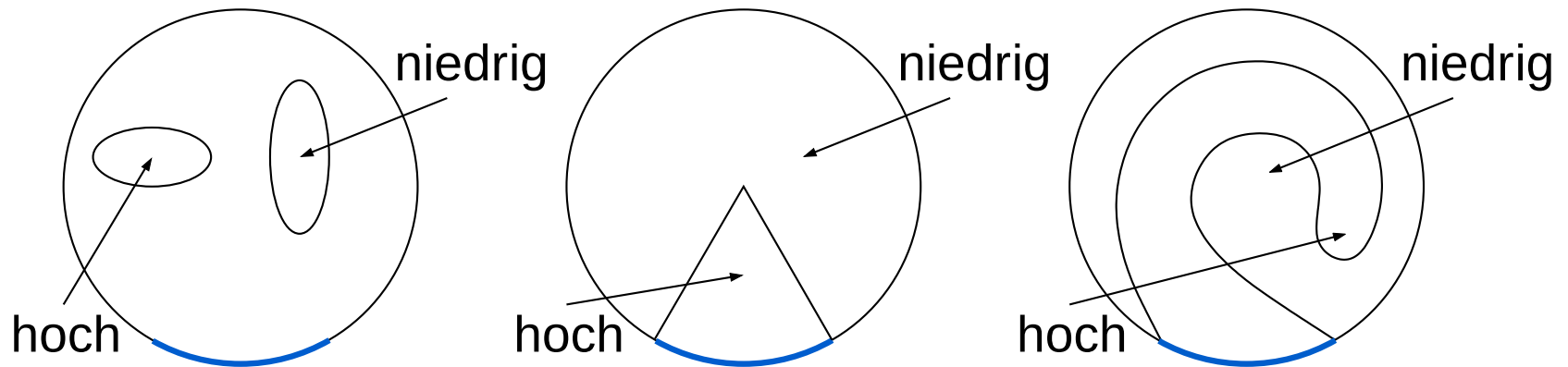
σ erfüllt (UCP) in zsh. Umgebungen U von S , d.h.,

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0 \text{ in } U, \quad \begin{cases} u|_S = 0, \sigma \partial_\nu u|_S = 0 & \implies u = 0. \\ u|_V = \text{const.}, V \subset U \text{ offen} & \implies u = \text{const.} \end{cases}$$



Lokalisierte Potentiale

Können wir lokalisierte Potentiale (i.S.v. lokalisierter Energie) erzeugen?



Einschränkungen:

- Teilmengen hoher Energie müssen mit S verbunden sein.
- Wegen (UCP) kann die Energie nirgenwo vollständig verschwinden.
- ⇒ **Ziel:** Folge (g_n) , so dass die Energie von (u_n) auf einem Teilgebiet divergiert und auf einem anderen gegen Null konvergiert.

Energie eines Potentials u :
$$\int_{\Omega} \sigma |\nabla u|^2 dx \approx \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \approx \|u\|_{H_{\diamond}^1(\Omega)}^2$$



Theoretische Motivation

Calderón Problem:

Ist σ eindeutig bestimmt durch (lokalen) Strom-zu-Spannung Operator

$$\Lambda_\sigma : L^2_\diamond(S) \rightarrow L^2_\diamond(S), \quad g \mapsto u|_S ?$$

Für Messungen auf komplettem Rand $S = \partial B$:

- Eindeutige Identifizierbarkeit von σ untersucht von Calderón 1980.
- Für glatte σ gezeigt von Sylvester und Uhlmann 1987 für $n \geq 3$ und von Nachmann 1996 für $n = 2$.
- Für $n = 2$ und allgemeine $\sigma \in L^\infty_+$: Astala und Päivärinta 2006.
- Offenes Problem für allgemeine $\sigma \in L^\infty_+$ (mit/ohne (UCP)) für $n \geq 3$.



Theoretische Motivation

Zusammenhang zwischen Calderón problem (mit $S \subseteq \partial B$) und lokalisierten Potentialen:



Monotonie-Eigenschaft:

Seien u_1, u_2 elektrische Potentiale zu Leitfähigkeiten σ_1, σ_2 für den selben Randstrom $g \in L^2_\diamond(S)$. Dann ist

$$\int_B (\sigma_1 - \sigma_2) |\nabla u_2|^2 dx \geq ((\Lambda_{\sigma_2} - \Lambda_{\sigma_1})g, g) \geq \int_B (\sigma_1 - \sigma_2) |\nabla u_1|^2 dx.$$

$\rightsquigarrow$ Ist $\sigma_1 - \sigma_2 > 0$ in einem Gebiet, indem sich die elektrische Energie $|\nabla u_1|^2$ lokalisieren lässt, dann ist $\Lambda_{\sigma_1} \neq \Lambda_{\sigma_2}$.

"Eine höhere Leitfähigkeit in so einem Gebiet kann nie mehr ausgeglichen werden."



Bekannte Ergebnisse

- Potential kann um Randpunkt $z \in S$ lokalisiert werden falls $\sigma \in C^2$.
(Kohn, Vogelius 1984)
- ⇒ $\sigma|_S$ und ihre Ableitungen auf S sind eindeutig bestimmt
(durch lokalen Spannung-zu-Strom Operator).
- Mittels "Runge's approximation property" lässt sich die Umgebung hoher Energie ins Innere von B verschieben.
(Kohn, Vogelius 1985)
- ⇒ Stückweise analytische σ sind eindeutig bestimmt.
- C^2 -Leitfähigkeiten σ sind eindeutig bestimmt.
(Kenig, Sjöstrand, Uhlmann 2007,
verwendet Kohn-Vogelius für Bestimmung von $\sigma|_S, \partial_\nu \sigma|_S$.)

Hier:

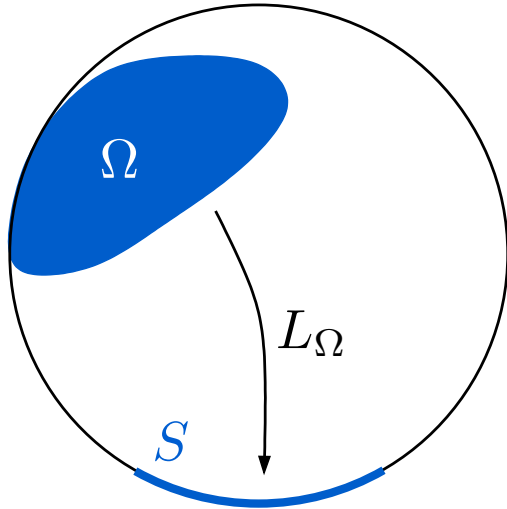
- Lokalisierte Potentiale existieren für beliebige $\sigma \in L_+^\infty$, die (UCP) erfüllen.



Existenz lokalisierter Potentiale



Virtuelle Messoperatoren



$f \in (H^1_\diamond(\Omega))'$: an Ω angelegte „Stromquelle“

$$L_\Omega : (H^1_\diamond(\Omega))' \rightarrow L^2_\diamond(S), \quad f \mapsto u|_S,$$

wobei $u \in H^1_\diamond(B)$,

$$\int_B \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v|_\Omega \rangle \quad \text{für alle } v \in H^1_\diamond(B).$$

Falls $\overline{\Omega} \subset B$: $\nabla \cdot \sigma \nabla u = f, \quad \sigma \partial_\nu u|_{\partial B} = 0.$

(UCP) $\implies$ Wenn $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \emptyset$, $B \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$ zusammenhängend ist und an S angrenzt, dann ist $\mathcal{R}(L_{\Omega_1}) \cap \mathcal{R}(L_{\Omega_2}) = 0$.

Dualer Operator ist $L'_\Omega : L^2_\diamond(S) \rightarrow H^1_\diamond(\Omega)$, $g \mapsto u|_\Omega$, wobei

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0, \quad \sigma \partial_\nu u|_{\partial B} = \begin{cases} g & \text{auf } S, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Zsh. mit lokalisierten Potentialen

Lemma

Seien X, Y zwei reflexive Banachräume, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $y \in Y$. Dann ist

$$y \in \mathcal{R}(A) \quad \text{genau dann, wenn} \quad |\langle y', y \rangle| \leq C \|A' y'\| \quad \forall y' \in Y'.$$

Korollar

Wenn $\|L'_{\Omega_1} g\| \leq C \|L'_{\Omega_2} g\|$ für alle Randströme g , d.h. $\|u|_{\Omega_1}\| \leq C \|u|_{\Omega_2}\|$ für die zugehörigen Potentiale u , dann ist $\mathcal{R}(L_{\Omega_1}) \subseteq \mathcal{R}(L_{\Omega_2})$.

Kontraposition

Wenn $\mathcal{R}(L_{\Omega_1}) \not\subseteq \mathcal{R}(L_{\Omega_2})$ dann existieren Ströme (g_n) , so dass für die zugehörigen Potentiale (u_n) gilt

$$\|u_n|_{\Omega_1}\|_{H^1_{\diamond}(\Omega_1)} \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \|u_n|_{\Omega_2}\|_{H^1_{\diamond}(\Omega_2)} \rightarrow 0.$$

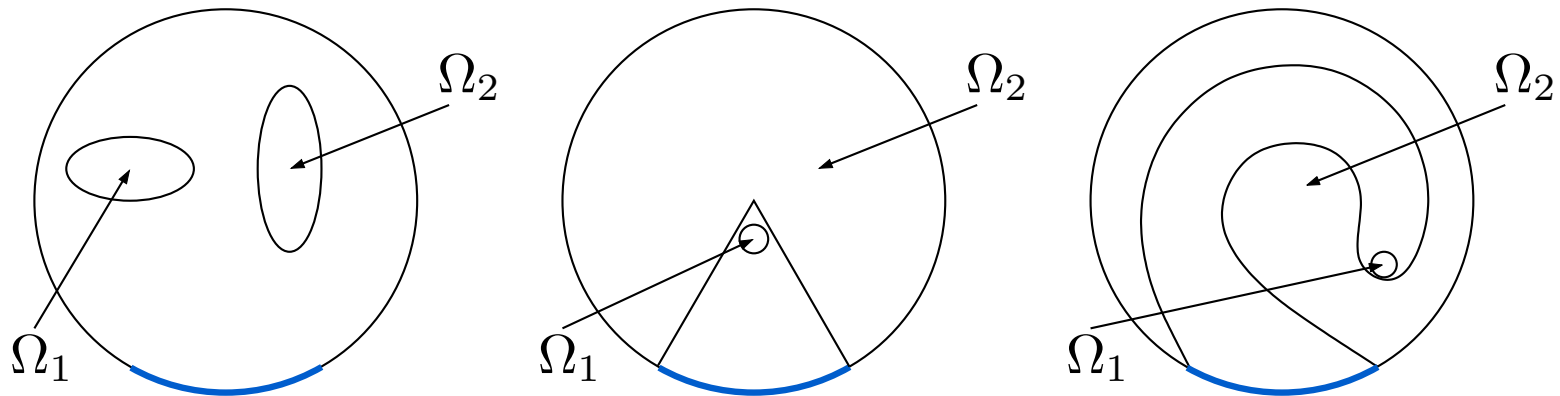


Existenz lokalisierter Potentiale

Satz

Wenn $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \emptyset$, $B \setminus (\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2})$ zsh. ist und an S angrenzt, dann existieren Ströme (g_n) , so dass die (Energie der) zugehörigen Potentiale (u_n) auf Ω_1 divergiert und auf Ω_2 gegen Null konvergiert, d.h.

$$\int_{\Omega_1} \sigma |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \int_{\Omega_2} \sigma |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow 0.$$



Beweis verwendet nur Elliptizitätseigenschaften, analoge Argumentation gilt z.B. in der linearen Elastizität, Elektro- und Magnetostatik.



Folgerungen

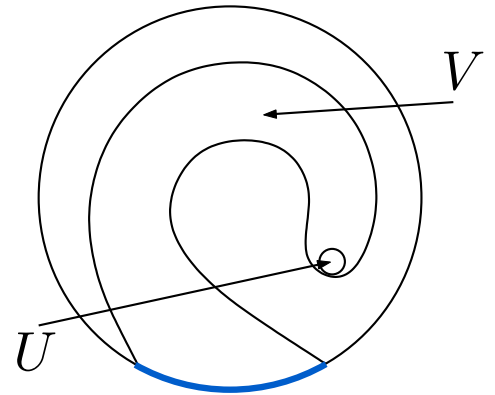
Korollar

Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in L_+^\infty(B)$, so dass (UCP) erfüllt ist und $\Lambda_{\sigma_1}, \Lambda_{\sigma_2}$ seien die zugehörigen Strom-zu-Spannung Operatoren.

Ist $\sigma_2 \geq \sigma_1$ in einer Umgebung V von S und $\sigma_2 - \sigma_1 \in L_+^\infty(U)$ für ein offenes $U \subseteq V$, dann existiert (g_n) , so dass

$$\langle (\Lambda_{\sigma_2} - \Lambda_{\sigma_1})g_n, g_n \rangle \rightarrow \infty,$$

also insbesondere $\Lambda_{\sigma_2} \neq \Lambda_{\sigma_1}$.



Konsequenzen (folgen bereits aus dem Kohn-Vogelius Resultat):

- $\sigma|_S$ und seine Ableitungen auf S sind eindeutig bestimmt durch Λ_σ .
- Stückweise analytische σ sind eindeutig bestimmt durch Λ_σ .



Konstruktion



Konstruktion

Konstruktive Version des Existenzbeweises:

Sei $h \in \mathcal{R}(L_{\Omega_1})$, $h \notin \mathcal{R}(L_{\Omega_2})$. Definiere $\gamma_\alpha \in L^2_\diamond(S)$ durch

$$\gamma_\alpha = (L_{\Omega_2} L_{\Omega_2}^* + \alpha I)^{-1} h, \quad \alpha > 0.$$

Dann ist

$$\|L'_{\Omega_2} \gamma_\alpha\|^2 \leq C \|L'_{\Omega_1} \gamma_\alpha\| \quad \text{und} \quad \|L'_{\Omega_2} \gamma_\alpha\| \rightarrow \infty \quad \text{für } \alpha \rightarrow 0.$$

Die von den Strömen $g_\alpha := \frac{1}{\|L'_{\Omega_2} \gamma_\alpha\|^{3/2}} \gamma_\alpha$ erzeugten Potentiale u_α erfüllen

$$\|L'_{\Omega_1} g_\alpha\|^2 \approx \int_{\Omega_1} \sigma |\nabla u_\alpha|^2 dx \rightarrow \infty,$$

$$\|L'_{\Omega_2} g_\alpha\|^2 \approx \int_{\Omega_2} \sigma |\nabla u_\alpha|^2 dx \rightarrow 0.$$



Konstruktion

Für $\sigma = 1$:

- h_z : Randpotential eines elektrischen Dipols in $z \in B$, d.h. $h_z = u_z|_S$, wobei

$$\Delta u_z = d \cdot \nabla \delta_z, \quad \partial_\nu u_z|_{\partial B} = 0$$

($d \in \mathbb{R}^n$, $|d| = 1$ beliebige Richtung).

- Wenn $B \setminus \overline{\Omega}$ zusammenhängend ist und an S angrenzt, dann gilt für alle $z \notin \partial\Omega$:

$$h_z \in \mathcal{R}(L_\Omega) \quad \text{genau dann, wenn} \quad z \in \Omega.$$

- Definieren wir zu h_z Ströme $g_{\alpha,z}$ und Potentiale $u_{\alpha,z}$, dann gilt

$$\int_{\Omega_1} \sigma |\nabla u_{\alpha,z}|^2 dx \rightarrow \infty, \quad \int_{\Omega_2} \sigma |\nabla u_{\alpha,z}|^2 dx \rightarrow 0$$

für jede Umgebung Ω_1 von z .



Implementierung

Implementierung von $L_\Omega L_\Omega^*$.

$$L_\Omega L_\Omega^* : L_\diamond^2(S) \rightarrow L_\diamond^2(S), \quad g \mapsto u|_S,$$

wobei $u \in H_\diamond^1(B)$ (für $\overline{\Omega} \subset B$) die Lösung ist von

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = \nabla \cdot \chi_\Omega \nabla v \quad \text{und} \quad \sigma \partial_\nu u|_{\partial B} = 0,$$

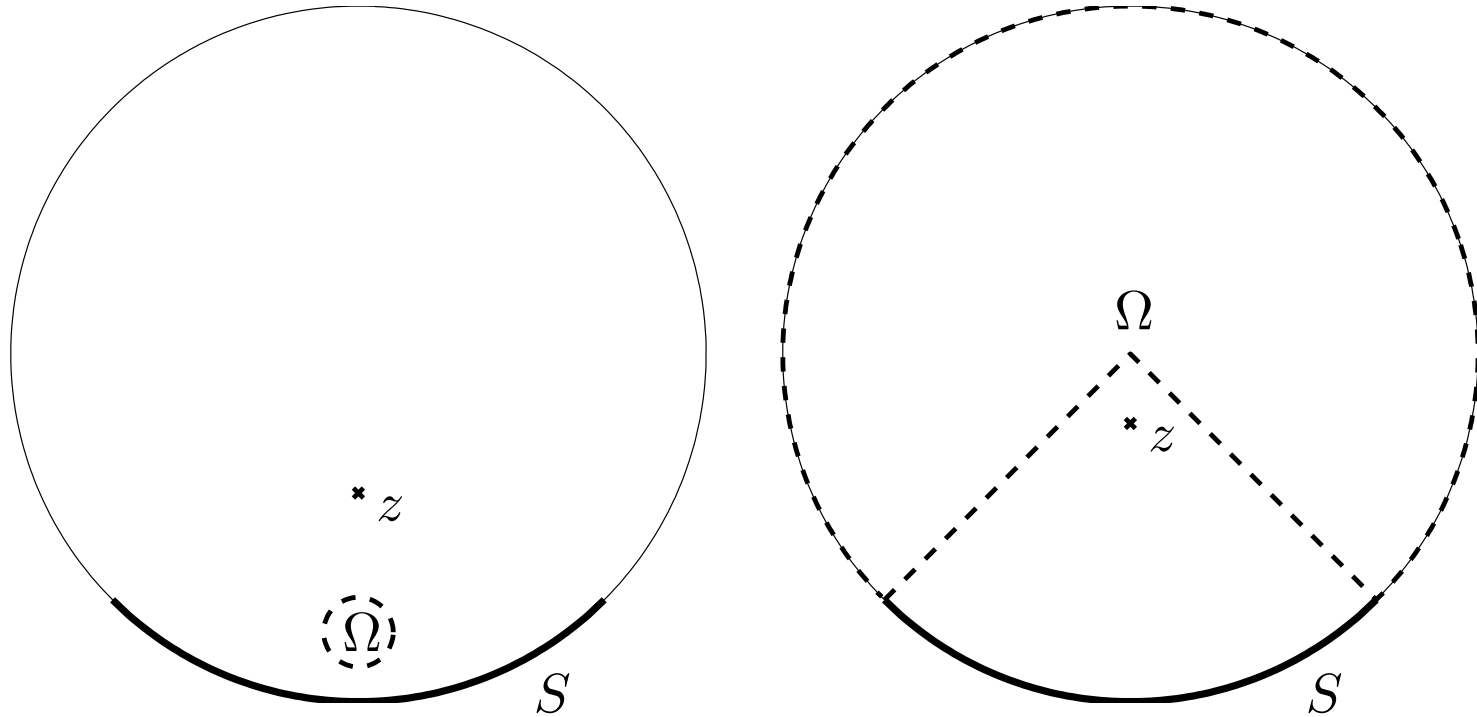
mit der Lösung $v \in H_\diamond^1(B)$ von

$$\nabla \cdot \sigma \nabla v = 0 \quad \text{und} \quad \sigma \partial_\nu v|_{\partial B} = \begin{cases} g & \text{auf } S, \\ 0 & \text{auf } \partial B \setminus S. \end{cases}$$

v und u lassen sich mit Standardlösern für lineare, elliptische Gleichungen berechnen (hier: Comsol).



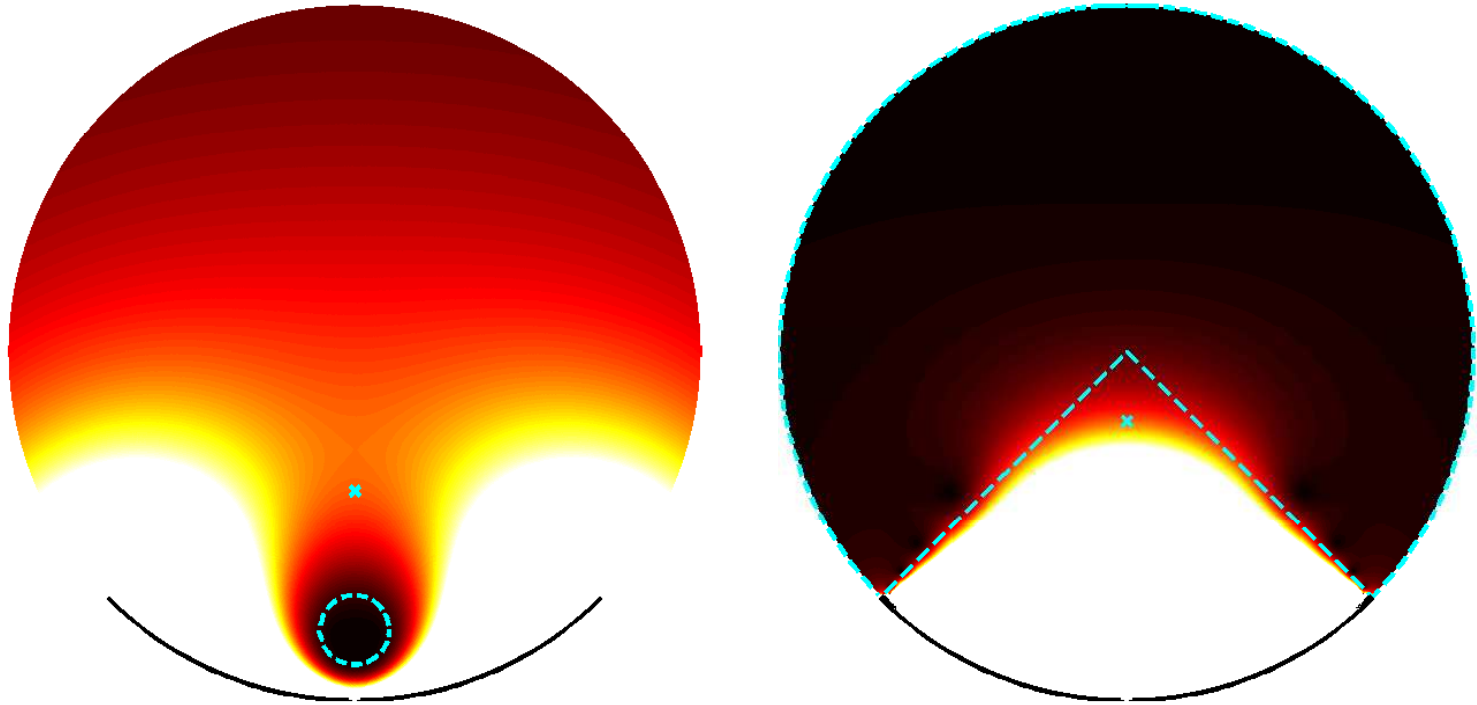
Numerisches Beispiel



Gesucht: Potential mit hoher Energie um z und niedriger Energie in Ω .



Numerisches Beispiel



Abgebildet ist $x \mapsto |\nabla u_{\alpha,z}(x)|$, α wurde "von Hand" gewählt, Farbskala abgeschnitten oberhalb von $2|\nabla u_{\alpha,z}(z)|$.

⇒ *Lokalisierte elektrische Potential können in nahezu beliebige Gebiete erzeugt werden.*

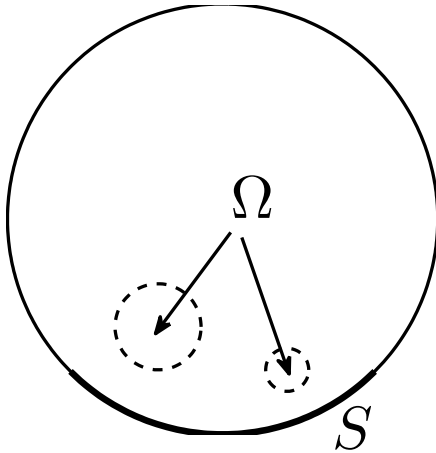


Rekonstruktionsverfahren für EIT



Rekonstruktionsverfahren für EIT

Spezielle EIT-Anwendung: Detektion von Einschlüssen.



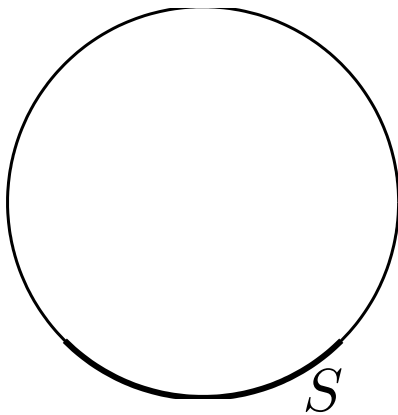
Strom-Spannungs Operator mit Einschlüssen:

$$\Lambda_1 : g \mapsto u_1|_{\partial B},$$

wobei

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u_1 = 0 \quad \partial_\nu u_1|_{\partial B} = \begin{cases} g & \text{auf } S, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $\sigma = 1 + \sigma_1 \chi_\Omega$, $\sigma_1 > 0$.



Strom-Spannungs Operator ohne Einschlüsse:

$$\Lambda_0 : g \mapsto u_0|_{\partial B},$$

wobei u_0 die entsprechende Gleichung für $\sigma = 1$ löst.

Ziel: Bestimme Ω aus dem Vergleich von Λ_1 mit Λ_0 .



Rekonstruktionsverfahren für EIT

„Naheliegende“ Verwendung lokalisierter Potentiale:

- Berechne Ströme g , die lokalisierte Potentiale erzeugen mit hoher Energie in einem Testgebiet U und niedriger Energie außerhalb.
- Monotonie-Eigenschaft
 - $\rightsquigarrow ((\Lambda_0 - \Lambda_1)g, g)$ groß, falls U die Einschlüsse Ω schneidet.
 - $\rightsquigarrow$ Rekonstruiere Ω durch „langames Vergrößern geeigneter U “.

Nachteile:

- Dies benötigt eine hohe Anzahl lokalisierter Potentiale.
- Analoge Idee lässt sich einfacher realisieren mit speziellen singulären Potentialen (Ikehata's probe method, Potthast's point source/singular sources method).

Hier: „weniger naheliegendes“ (einfaches) Rekonstruktionsverfahren.



Virtuelle Messoperatoren

Zusammenhang zwischen $\Lambda_0 - \Lambda_1$ und virtuellen Messoperator L_Ω :

Lemma

Es existieren $c, C > 0$, so dass

$$c \|L_\Omega^* g\|^2 \leq ((\Lambda_0 - \Lambda_1)g, g) \leq C \|L_\Omega^* g\|^2 \quad \text{für alle } g \in L_\diamond^2(S),$$

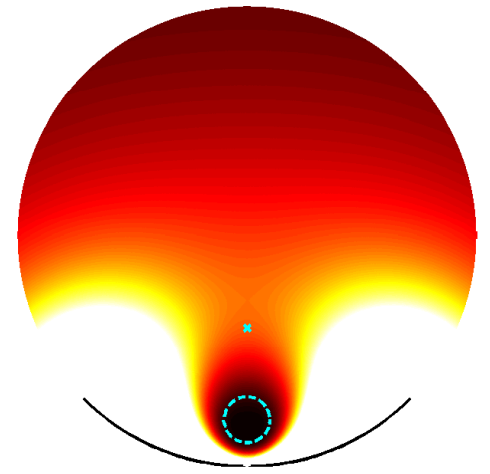
d.h. $L_\Omega L_\Omega^* \approx \Lambda_0 - \Lambda_1$.

Mittels $L_\Omega L_\Omega^*$ ließ sich ein Potential berechnen mit hoher Energie in $z \notin \Omega$ und niedriger Energie in Ω .

⇝ Einfaches Rekonstruktionsverfahren:

Gegeben $z \notin \overline{\Omega}$, erzeuge mit $\Lambda := \Lambda_0 - \Lambda_1$ so ein Potential und bestimme daraus Ω .

(Ein Punkt $z \notin \overline{\Omega}$ muss dafür bekannt sein!)



Rekonstruktionsverfahren

Satz

$z \notin \overline{\Omega}$, h_z : elektrischer Dipol in z , $g_z^\alpha := \Lambda^*(\Lambda\Lambda^* + \alpha I)^{-1}h_z \approx \Lambda^{-1}h_z$,
 u_z^α hom. Potential zu Randstrom $g_z^\alpha / (\Lambda g_z^\alpha, g_z^\alpha)^{3/2}$. Dann gilt

$$|\nabla u_z^\alpha(z)| \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad |\nabla u_z^\alpha(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Zusammenhang mit der Faktorisierungsmethode (vereinfacht):

● Faktorisierungsmethode (Kirsch, Hanke, Brühl,...):
 $z \notin \Omega$ genau dann, wenn $\|\Lambda^{-1/2}h_z\| \rightarrow \infty$.

● EIT-Analogon zur Arens-Variante dieses Kriteriums:
 $z \notin \Omega$ genau dann, wenn $|\nabla v_z^\alpha(z)| \rightarrow \infty$,
wobei v_z^α hom. Potential zum Randstrom $g_z^\alpha \approx \Lambda^{-1}h_z$.

● Hier: $z \notin \Omega$ fest. $|\nabla u_z^\alpha(x)| \rightarrow 0$ falls $x \in \Omega$.



Eigenschaften

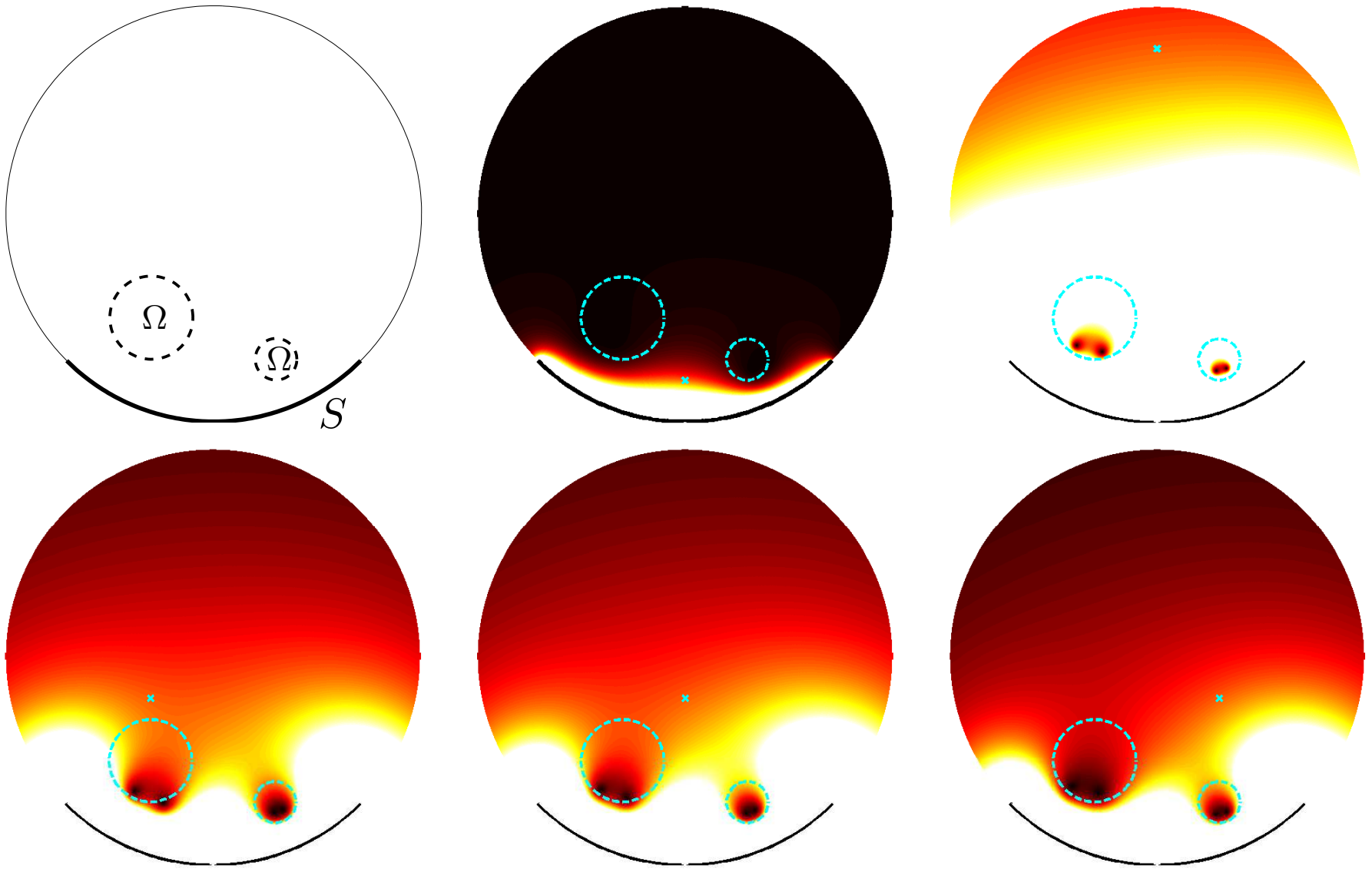
Rekonstruktionsverfahren: Gegeben $\Lambda = \Lambda_0 - \Lambda_1$, $z \notin \Omega$, berechne Potential u_z^α und markiere „alle Punkte x , an denen $|\nabla u_z^\alpha(x)|$ niedrig ist.“

- Λ muss nur für eine rechte Seite invertiert werden.
(Benötigt bei iterativer Durchführung nur wenige Messungen.)
- Nur ein homogenes Vorwärtsproblem muss gelöst werden.
- Unabhängig von Anzahl der Einschlüsse.
- $|\nabla u_z^\alpha|$ kann auch außerhalb Ω niedrig sein. Verfahren findet lediglich eine Obermenge von Ω !
- Was bedeutet „niedrig“ in praktischen Anwendungen?

Verfahren liefert eine sehr schnelle, grobe Rekonstruktion der Einschlüsse.



Numerisches Beispiel



Zusammenfassung

- Lokalisierte elektrische Potentiale existieren für fast beliebige Leitfähigkeiten in fast beliebigen Gebieten, wenn diese mit dem Rand verbunden sind.
- Konsequenz für das Calderon Problem mit lokalen Messungen: Zwei Leitfähigkeiten können durch Messungen unterschieden werden, falls die eine auf einem mit dem Rand verbundenen Teilgebiet größer ist.
- Lokalisierte Potentiale können praktisch durch Lösung schlecht gestellter Problem rekonstruiert werden.
- Für die Detektion von Einschlüssen in der EIT erhält man eine schnelle, grobe Rekonstruktion durch Konstruktion eines lokalisierten Potentials.

