Theoretische Informatik I

Blatt 11, 11.01.2005, Abgabe 18.01.2005 in der Vorlesung

Aufgabe 37. Ein Vergleichsnetzwerk heisst *primitiv* (oder *Transpositionsnetzwerk*), wenn alle Vergleichsaustauschmoduln auf benachbarte Elemente/Linien zugreifen. Zeige, dass primitive Sortiernetzwerke zum Sortieren von $S_1, \dots, S_n$ mindestens $\Omega(n^2)$ Moduln benötigen.
Hinweis: Knuth, Aufgabe 5.3.4 (36).

Wir messen die Sortierstörung der Folge $S_1, \dots, S_n$ durch die *Inversionszahl* $\mathrm{Inv}(S_1, \dots, S_n) := \#\{(i,j) : i < j,\ S_i > S_j\}$.

Aufgabe 38. Zeige
1. $\max \mathrm{Inv}(S_1, \dots, S_n) \mid S_1, \dots, S_n \in \mathbb{Z}\} = n(n-1)/2$
2. Ist ein Modul des primitiven Vergleichsnetzwerks im Takt aktiv (im Sinne dass er seine Eingaben vertauscht), dann erniedrigt er Inv um 1.

(Damit werden im wost case $n(n-1)/2$ aktive Modultakte zum Sortieren benötigt, summiert über alle Moduln und Takte.)

Aufgabe 39. Bestimme den Erwartungswert von $\mathrm{Inv}(S_1, \dots, S_n)$ für eine zufällig permutierte Folge verschiedener $S_1, \dots, S_n \in \mathbb{Z}$ nach dem Sortieren von $S_j, \dots, S_{j+k-1}$ (mit Beweis).

Aufgabe 40. Zeige, dass ein primitives Vergleichsnetzwerk jede Eingabe $S_1, \dots, S_n$ sortiert, wenn es die Eingabe $n, n-1, \dots, 1$ sortiert.
Hinweis: Lemma 28.1 [CLR].

Punktzahlen 6, 4, 4, 6