# Theoretische Informatik I

Blatt 7, 30.11.2004, Abgabe 7.12.2004 in der Vorlesung

**Aufgabe 24.** $(2^k-1)$–`way Merge`. Formuliere, erläutere und analysiere einen Algorithmus, der $2^k-1$ sortierte Listen der Gesamtlänge $n$ in $\leq 2n(k-1)$ Vergleichen und $O(n\,k)$ Schritten durch Verschmelzen sortiert.

*Hinweis:* Führe $2^k-1$ Kandidaten für das nächste Element der verschmolzenen Liste als Heap der Tiefe $k-1$, je einen Kandidaten pro Liste.

`HEAP-SORT`$(S_1,\ldots,S_n)$ (nach FLOYD, sei $n=2^k-1$)

1. Konstruiere einen Heap $S[1:n]$ (in $T_1(2^k-1) := 2^{k+1}-2k-2$ Vergleichen)
2. `FOR` $r=n,\ldots,2$ `DO` $*$ $S[1:r]$ ist Heap $*$

   $S:=S_r,\ S_r:=S_1$, entferne $S_1$, rekonstruiere den Heap $S[1:r-1]$,
   speichere $S$ in das frei gewordene Blatt $S_j$ und
   lasse $S_r^{alt}=S$ so aufsteigen, dass $S[1:r-1]$ wieder Heap wird.

**Aufgabe 25.** Zeige durch Induktion über $k$ für die Anzahl der Vergleiche

1. von Schritt 1: $T_1(2^k-1) \leq 2\,T_1(2^{k-1}-1)+2k-2 \leq 2^{k+1}-2k-2$,
2. von Schritt 2, ohne das Aufsteigen von $S$:
   $\frac{1}{2}T_2(2^k-1) := \sum_{i=1}^{k-1} i2^i = (k-2)2^k+2$.

**Aufgabe 26.** Nehme zur Vereinfachung an, dass die $\bar{r} := r-r'+1$ Blatt-Schlüssel $S_b, b=r',\ldots,r$ mit $r' := \lceil r/2+1/4\rceil$ des Heap $S[1:r]$ zufällig permutiert sind. Sei $E_i$ das Ereignis, dass $S_r^{alt}=S$ vom freien Blatt in $S[1:r-1]$ genau $i$ Stufen aufsteigt. Zeige: $\mathbf{Ws}[E_i]=O(2^{-i})$, $\mathbf{Ws}[E_0]\geq \frac{1}{2}$.

*Hinweis:* $E_i$ impliziert, dass $S_r^{alt}=S>S_b$ für $2^i-1$ bestimmte $S_b$ in $S[1:r-1]$. Somit $\mathbf{Ws}[E_i] \leq \sum_{t=1}^{\bar{r}} \frac{1}{\bar{r}}[(t-1)/(\bar{r}-1)]^{2^i-1}$, denn

$\mathbf{Ws}[S_r^{alt}$ ist $t$-grösstes unter den $\bar{r}$ vielen $S_b] = \frac{1}{\bar{r}}$,

$\mathbf{Ws}[S_b<S_r^{alt}$ für die $2^i-1$ bestimmten $S_b] = [(t-1)/(\bar{r}-1)]^{2^i-1}$.

**Punktzahlen 6, 6, 8**