Diskrete Mathematik

Blatt 4, 12.05.2006, Abgabe 19.05.2006

Aufgabe 1. 5 Punkte. Löse das ganzzahlige lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 101 & -131 \\ 70 & -92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -100 \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad x, y \in \mathbf{Z}$$

modulo 99 und 101 und setze zu einer Lösung modulo $99 \cdot 101$ mittels CRT zusammen. Wie und weshalb erhält man eine Lösung in $\mathbf{Z}$?

Hinweis: Für die ganzzahlige Lösung x, y gilt $|x|, |y| < \frac{1}{2} \cdot 99 \cdot 101$.

Aufgabe 2. 5 Punkte.

a) Löse $(x^2+1)f + (2x^2 - x)g = x$ mit $f, g \in \mathbf{Q}[x]$.

b) Zeige: Zu $u, v, w \in \mathbf{Q}[x]$ gibt es $f, g \in \mathbf{Q}[x]$ mit $uf + vg = w$ gdw $\mathrm{ggT}(u, v) \mid w$.

Aufgabe 3. 6 Punkte. Betrachte die Gleichung

$$x^6 + 2y^2 = 779.$$

Löse modulo 2, 3, 7. Wie erhält man alle ganzzahligen Lösungen?

Aufgabe 4. 6 Punkte. Sei G eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung m und $G^k = \{x^k \mid x \in G\}$ die Menge der k–ten Potenzen. Zeige

a) $G^k \subset G$ ist Untergruppe der Ordnung $m/\mathrm{ggT}(m, k)$.

b) Zu jedem $y \in G$ hat die Gleichung $x^k = y$ entweder genau $\mathrm{ggT}(m, k)$ viele oder keine Lösung $x \in G$.