Diskrete Mathematik

Blatt 1, 21.04.2006, Abgabe 28.04.2006

Aufgabe 1. 4 Punkte. a) Löse 1661 u + 2718 v = ggT(1661, 2718) mit positiven und mit zentrierten Quotienten.

b) Berechne ganzzahlige Lösungen der folgenden Ungleichungen, oder begründe die Unlösbarkeit

(1) $91x + 221y = 15$, (2) $91x + 221y = 52$.

Aufgabe 2. 6 Punkte. *Worst-case Laufzeit des Euklidischen Algorithmus.* Die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ wird definiert durch $F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ für $i \geq 2$.

a) Zeige, dass der Euklidische Algorithmus bei Eingabe von $m = F_{j+2}, n = F_{j+1}, j \geq 1$ genau j Diversionen ausführt.

b) Zeige $F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^i - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^i)$ für $i \geq 0$.

c) Folgern Sie, dass der Eukl. Alg. bei Eingabe von $m > n > 0$ höchstens $\log_\phi(n\sqrt{5})$ Divisionen benötigt, wobei $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

Aufgabe 3. 3 Punkte. $\mathbf{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ ist mit Addition und Multiplikation modulo 3 ein Körper. Löse zu $f = x^5 + 1$ und $g = x^3 + 2$ die Gleichung $fu + gv = \text{ggT}(f, g)$ für $u, v \in \mathbf{Z}_3[x]$ mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus für Polynome.

Aufgabe 4. 3 Punkte. *Ganze Gauss'sche Zahlen.*
Zeige, dass $\mathbf{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ mit $i^2 = -1$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist und dass genau vier Elemente von $\mathbf{Z}[i]$ ein multiplikatives Inverses besitzen. Ist $\mathbf{Z}[i]$ ein Integritätsbereich?