J.W. GOETHE-UNIVERSITÄT, FRANKFURT AM MAIN

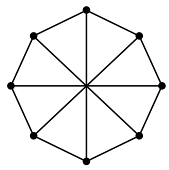
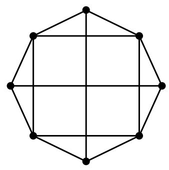
Sommersemester 2008

**Prof. Dr. C.P. Schnorr, Antoine Scemama**

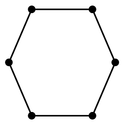
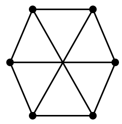
# Diskrete Mathematik, Übung 2

**Aufgabe 1.**

(1) Welche der folgenden Graphen sind planar? Finden Sie für jeden nicht planaren Graphen eine Unterteilung von $K_5$ oder $K_{3,3}$.

*i)*  *ii)* 

(2) Welche der folgenden Graphen auf 6 Knoten sind bipartit?

*i)*  *ii)* 

**Aufgabe 2.**

Sei $G := (S\dot{\cup}T, E)$ ein bipartiter Graph, so dass die Mengen $S$ und $T$ jeweils dieselbe Mächtigkeit haben. Zeigen Sie: Besitzt jede Teilmenge $A \subseteq S$ mindestens $|A| + 1$ Nachbarn in $T$, so läst sich jede Kante von $G$ zu einer vollständigen Heirat erweitern.

**Aufgabe 3.**

(1) Berechnen Sie den ggT von 2004 und 1492, und stellen Sie ihn als ganzzahlige Linearkombination dar.

(2) Geben Sie, sofern möglich, jeweils eine ganzzahlige Lösung der folgenden Gleichungen an.

(i) $91x + 221y = 15\,;$

(ii) $91x + 221y = 52\,.$

**Aufgabe 4.** *Worst-case Laufzeit des Euklidischen Algorithmus.*

Sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, $i \geq 2$ definierte Fibonacci-Folge.

(1) Zeigen Sie, dass der Euklidische Algorithmus bei Eingabe $m = F_{j+2}$, $n = F_{j+1}$ $(j \in \mathbb{N})$ genau $j$ Divisionen ausführt.

(2) Zeigen Sie für $i \in \mathbb{N}_0$

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right).$$

(3) Folgern Sie, dass der Euklidische Algorithmus bei der Eingabe $m > n > 0$ höchstens $c\,\ln(n\sqrt{5})$ Divisionen benötigt, wobei $c = (\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{-1} \approx 2.08$.

Die Dauer der Abschlussklausur beträgt 90 Minuten. Es werden keinerlei Hilfsmittel zugelassen. Es ist vorgesehen, dass eine Nachklausur angeboten wird (im Rahmen eines Bachelor-Studiengangs zählt diese als zweite Modulabschlussprüfung).

Abgabetermin dieses Blattes: 17. April 2008, 12.10 Uhr